

GODUNOV CHART ANALYSIS FOR MULTILEVEL CHANNELS BY FINITE VOLUME

ANALISIS BAGAN GODUNOV UNTUK SALURAN BERTINGKAT DENGAN CARA VOLUME HINGGA

Nugroho Widiasmadi

Staf Edukasi Universitas Wahid Hasyim, Jalan Menoreh Tengah X/22 Sampangan Semarang.
Telp. 024-8505680, 024-70785578 E-mail: nugroho_w@yahoo.com

ABSTRACT

Godunov solve the Euler equations by analytical exact for each cell, then assemble each cell to obtain a settlement for the synthesis of the entire flow field. There are no alignment issues (*compatibility*) which is an absolute requirement in the conventional numerical solution also does not have to worry about the information propagates in the wrong direction. In this way the problem solved by the approach flow shock non resistant, is a fairly good approximation as evidenced by the numerical test. By assembling pieces of an exact analytical solution is obtained by synthesizing the entire flow field. Godunov operationalisation of this philosophy is to physically divide the flow field into cells that are close together, so that the Euler equations can be solved analytically exact for each element. Flow parameters are denoted as U and current vector being equal in value in the cell. Thus the interface of two adjacent elements can have a U value of different flow parameters. Within the scope of the flow physics, this small difference is a soft shock-absorbers (*infinitesimal shock or wavelets*) that can be smoothing, but if there is a large difference would indicate the presence of shock. Thus philosophy is very different Godunov numerical philosophy is as yet unknown where the equation St. Venant as the finite difference, or volume elements up to, where the entire solution of differential equations or integral regulator at once swept through the flow chamber.

Key words: compatibility, frictionless shallow water waves, homogeneous, Riemann solver, Riemann problem

ABSTRAK

Godunov memecahkan persamaan Euler dengan cara analitik eksak untuk setiap sel, kemudian merangkai setiap sel sehingga diperoleh sintesis penyelesaian untuk seluruh medan aliran. Tidak ada masalah keselarasan (*compatibility*) yang merupakan persyaratan mutlak dalam pemecahan numerik konvensional juga tidak perlu khawatir informasi merambat dalam arah yang salah. Dengan cara ini maka soal kejut diselesaikan dengan pendekatan aliran tak bertahanan, merupakan hampiran yang cukup baik yang dibuktikan oleh uji numerik. Dengan merakit kepingan-kepingan penyelesaian analitik eksak maka diperoleh sintesis seluruh medan aliran. Operasionalisasi dari falsafah Godunov ini adalah dengan membagi-bagi medan fisik aliran menjadi sel-sel yang saling rapat, sehingga persamaan Euler dapat diselesaikan secara analitik eksak untuk masing-masing unsur. Parameter aliran dilambangkan sebagai vektor arus U dan dianggap tetap nilainya di dalam sel. Dengan demikian pada antar muka dua unsur yang berdekatan dapat memiliki nilai parameter arus U yang berbeda. Dalam lingkup fisika aliran, perbedaan yang kecil ini merupakan kejut-kejut lembut (*infinitesimal shock or wavelets*) yang dapat dimuluskan, tetapi bila terjadi perbedaan yang besar akan menandai adanya kehadiran kejut. Dengan demikian falsafah Godunov sangat berbeda dengan falsafah numerik yang telah dikenal sebelumnya di mana persamaan St. Venant dikepingkan sebagai selisih hingga, unsur hingga atau volume hingga, di mana seluruh penyelesaian dari persamaan diferensial atau integral pengatur sekaligus menyapu seluruh ruang aliran.

Kata-kata Kunci: keselarasan, frictionless shallow water waves, homogeneous, Riemann solver, Riemann problem

PENDAHULUAN

Persamaan pengatur dari model fisika aliran tak mampat, dengan permukaan terbuka dan aliran mulus (*smooth flow*) adalah St. Venant, dimana percepatan vertikal diabaikan yang menyiratkan agihan tekanan hidrostatis sepanjang kedalaman aliran dan permukaan yang datar dan mulus (*tanpa kejut*). Dari segi matematika, persamaan ini termasuk dalam kelompok persamaan diferensial terpilah harkat satu, hiperbolik nir lempang. Teknik penyelesaian kiwari (*contemporary*) adalah dengan cara numerik selisih hingga, unsur hingga dan volume hingga. Perbedaan dari keti-ga pendekatan numerik akan dirangkum di bawah ini.

Pendekatan numerik selisih hingga (CSH), seluruh turunan-turunan kisan-kisan hidrodinamik (*derivatives of the hydrodynamic variabel*) dihampiri oleh selisih hingga antara dua titik yang berdekatan dalam medan aliran. Hampiran ini dilakukan dengan memekarkan (*expansion*) turunan kisan dengan deret Taylor untuk nilai pada titik kisi ($i+1$) dengan mengacu pada nilai pada titik kisi i . Titik-titik ini dibentuk oleh kisi-kisi di dalam ruang fisik aliran. Hampiran CSH telah merupakan unggulan dalam komputasi hidrodinamika.

Pada cara klasik ini, lokasi kejut harus diketahui terlebih dahulu, kemudian pada lokasi tersebut diterapkan persamaan pengatur kejut. Jadi pada cara ini terdapat dua persamaan pengatur yang mewakili aliran mulus yang dipisahkan oleh persamaan pengatur kejut. Bagan numerik cara klasik ini **nir-konservatif**

dan menggunakan **kisar-kisar primitif**. Bagan numerik penangkap kejut menggunakan **kisar-kisar arus** (*flux*) dimana massa, momentum atau energi dikonservasikan dan **kisar-kisar arus berketurunan**. Sesudah kisar-kisar arus dikembalikan kepada **kisar primitif**, maka akan dapat disimak apakah aliran mulus dan tak mulus.

Tuntutan setiap kisar anu dalam persamaan klasik St. Venant adalah keturunan (*differentiability requirement*), maka hanya aliran berubah lambat laun ($Fr < 1$) **dapat dengan baik** dimodelkan oleh persamaan ini. Bila terjadi katakumulasi (*discontinuities*) dalam kisar aliran yang diwakili oleh vektor $U=(u,v,h)$, maka hipotesis tentang kemulusan atau secara matematis keberturunan (*differentiability*) dilanggar, sehingga persamaan St. Venant dalam bentuk asli (klasik) tidak dapat digunakan. Bila kisar primitif diganti dengan kisar arus (*flux variabel*), maka kita peroleh suatu bentuk persamaan baru, dimana hukum dasar kekekalan berlaku dalam bentuk diferensial harkat satu.

Gejala kejut tersembunyi di dalam kisar arus, akan muncul dengan sendirinya-setelah kisar-kisar arus dikembalikan kepada kisar primitif sebagai bagian dari penyelesaian, sehingga kejut dapat disimulasikan tanpa harus mengetahui dimana dan kapan kejut akan terjadi. Pendekatan ini disebut cara penangkapan kejut (*shock capturing method*). Bentuk persamaan pengatur yang baru ini juga disebut bentuk divergensi, bentuk kekal, atau bentuk konservatif.

METODOLOGI

Metodologi dari penelitian ini mendasarkan dengan mence- tak persamaan St. Venant dalam bentuk konservatif, kemudian mengintegrasikan menurut theorem Gauss, maka dalam bentuk integral ini memang suku-suku konvektif dan suku laju lokal un- tuk semua jenis dan ragam aliran yaitu aliran laun lunak dan tak lunak, aliran deras dengan kejut yang jeda atau bergerak. Dengan memilih derap waktu, Δt cukup kecil, sehingga sasaran agar suku sumber menjadi cukup kecil terhadap suku-suku lainnya, dalam persamaan karakteristik disebut ketakubahan semu Riemann, yang berarti bahwa arus kanan tidak tepat sama dengan nol tetapi cukup kecil untuk diabaikan dalam model.

Masalah yang paling fundamental sekarang adalah bahwa pemodelan daulat aliran dengan sel-sel kecil yang memenuhi kai- dah kemandapan CFL adalah seolah aliran tak bertahanan dan se- olah tidak dipengaruhi oleh gravitasi. Bila ini benar, maka dari segi logika, rakitan sel-sel yang melingkupi seluruh daulat aliran tak bertahanan dan tidak dipengaruhi gravitasi dan tidak dipe- ngaruhi gesekan dinding. Maka kita akan nantikan suatu hasil si- mulasi yang jauh berbeda dari kenyataan. Tetapi, uji numerik membuktikan bahwa hasil simulasi cukup cermat dibandingkan dengan aliran nyata yang dihitung dengan cara lain yang teruji.

ANALISIS

Metode selisih hulu dari Godunov adalah sebagai bagan numerik, yang mana akan digunakan sebagai penyelesaian masa- lah Riemann secara lokal seperti uraian diatas. Dasar bagan terse- but adalah turunan pertama dalam ruang dan waktu. Turunan yang lebih tinggi tentunya juga dimungkinkan.

Menurut persamaan aliran air dua matra adalah :

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y = 0$$

dimana vektor dari variabel kekal dan arus adalah

$$U = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Dalam persamaan ini terdapat beberapa tambahan persaa- man untuk komponen tangensial kecepatan v , atau lebih tepat- nya hukum kekekalan untuk hv . Arah x merupakan arah normal terhadap permukaan dari volume tilik. Sehingga persamaan keke- kalan untuk

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} \right] \quad (2)$$

Gambar 1. b memperlihatkan penyebaran yang mungkin pada sel $i-1$, i dan $i+1$ untuk komponen vektor U^n . Jika $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$, dan secara lokal telah di set dengan hukum kekekalan dengan nilai awal yang meliputi 2 konstanta yang dipisahkan oleh ketidak kontinyuan. Hal Ini telah kita ketahui sebagai suatu kasus dengan nilai awal yang akan diberikan sebagai :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pers. Def.} : \quad U_t + F(U)_x = 0 \\ \text{Kond. Awal} : \quad U(x, t^n) = \begin{cases} U_i^n & \text{jika } x < x_{i+\frac{1}{2}} \\ U_{i+1}^n & \text{jika } x > x_{i+\frac{1}{2}} \end{cases} \end{array} \right\} \quad (3)$$

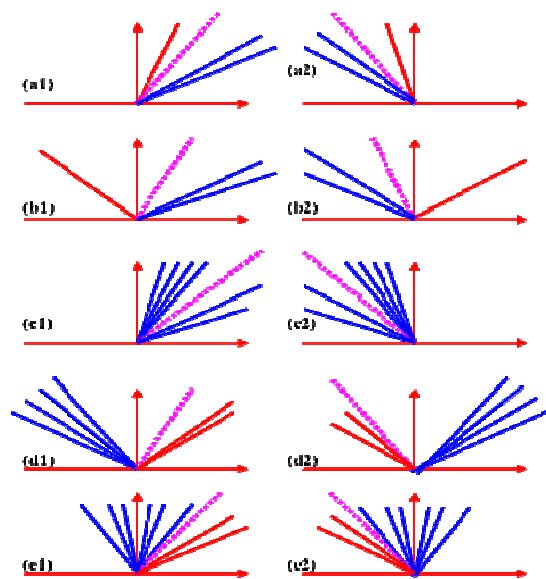
Jika kita lihat bahwa Ini merupakan hampiran Riemann di- mana kondisi nilai tersebut adalah U_i^n (sisi kiri) dan U_{i+1}^n (sisi kanan), penyelesaian yang dinotasikan oleh $U_{i+1/2}(x, t)$. Kerang- ka dari penyelesaian dua hal tersebut dapat dilihat pada gambar 1

c. Catatan bahwa masing-masing permasalahan Riemann se- tempat diatas pada kerangka acuan setempat yang dimilikinya da- ri referensi asli yaitu (0,0). Arus Godunov $F_{i+1/2}$ pada batas sel dalam $x_{i+1/2}$ didefinisikan sebagai fungsi arus secara fisik $F(U)$ yang dievaluasi dengan penyelesaian $U_{i+1/2}(x/t)$ yang mana die- valuasikan kembali sepanjang sumbu x pada koordinat lokal $x / t = 0$. Kemudian kita tulis sebagai :

Gambar 1.(a1) memperlihatkan suatu kasus dimana aliran yang terjadi adalah superkritik terhadap sisi kanan, gelombang sisi kiri adalah kejut, gelombang sisi kanan adalah penghalusan dan gelombang tengah adalah geser. Secara jelas hal ini meru- pakan suatu kasus dengan nilai $U_{i+1/2}(0)$ sepanjang sumbu t atau secara sederhana ditulis U_i^n .

Gambar 1.(b1) memperlihatkan kasus yang serupa dari aliran superkritik terhadap sisi kiri, dan $U_{i+1/2}(0) = U_{i+1}^n$. Gambar 1.(a5) dan 1.(b5) memperlihatkan aliran kritik yang mana merupakan penyelesaian dengan hampiran Riemann yang harus dievaluasi di dalam kipas penghalusan, Menurut persamaan line- ar dengan kecepatan konstan dari perambatan gelombang λ da- pat dituliskan sebagai :

$$q_t + f(q)_x = 0 ; \quad f(q) = \lambda q \quad (\text{fungsi arus}) \quad (7)$$



Gambar 1. Ada 10 macam pola gelombang yang mungkin muncul dalam evaluasi $U_{i+1/2}(0)$ dalam perhitungan arus Godunov untuk kasus 1 Matra, gambar ini pada kondisi dasar berair (*wed bed*)

Cara penyatuan arus bagan Godunov adalah

$$f_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (1 + s) (\lambda q_i^n) + \frac{1}{2} (1 - s) (\lambda q_{i+1}^n) \quad (4)$$

di mana $s = (\lambda)$ yang merupakan bagan hubungan yang dibaca

$$q_i^{n+1} = q_i^n - \frac{1}{2} (1 + s) c (q_i^n - q_{i-1}^n) - \frac{1}{2} (1 - s) c (q_{i+1}^n - q_i^n) \quad (5)$$

kondisi stabilitas secara linear untuk bagan Godunov adalah

$$|c| \leq 1 \quad (6)$$

$$\Delta t = \frac{C_{cfl} \Delta x}{S_{max}^n} \quad (7)$$

Penyamaan dari kondisi ini dapat dibaca sebagai

dimana S_{max}^n adalah kecepatan penjalaran maksimum di dalam nilai absolut di dalam persamaan differensial. Untuk suatu kasus linear $S_{max}^n = \lambda$.

$$0 < C_{cfl} \leq 1 \quad (8)$$

Pilihan secara praktis dalam perhitungan dari nilai C_{cfl} tertutup terhadap nilai maksimum oleh kondisi stabilitas (bentuk linear). Biasanya nilai $C_{cfl} = 0,9$.

Selain pada gambar 2 maka diberikan uraian dalam gambar 3. sebagai pemahaman terhadap sifat arus lokal. Gambar 3 tersebut diatas menjelaskan pada $f(u) = au, a > 0$. Penyelesaian secara eksak dengan pendekatan Riemann (U_{i-1}^n, U_i^n) untuk $a > 0$ dapat ditulis :

$$u_{i-\frac{1}{2}}(x/t) = \begin{cases} u_{i-1}^n & \text{jika } x/t < a, \\ u_i^n & \text{jika } x/t > a \end{cases} \quad (9)$$

Dengan pendekatan ini maka kita gunakan titik acuan lokal (0,0), dengan penyelesaian $U_{i+1/2}(x/t)$ dari pendekatan ini (U_i^n, U_{i+1}^n) maka memberikan :

$$u_{i+\frac{1}{2}}(x/t) = \begin{cases} u_{i-1}^n & \text{jika } x/t < a, \\ u_i^n & \text{jika } x/t > a \end{cases} \quad (10)$$

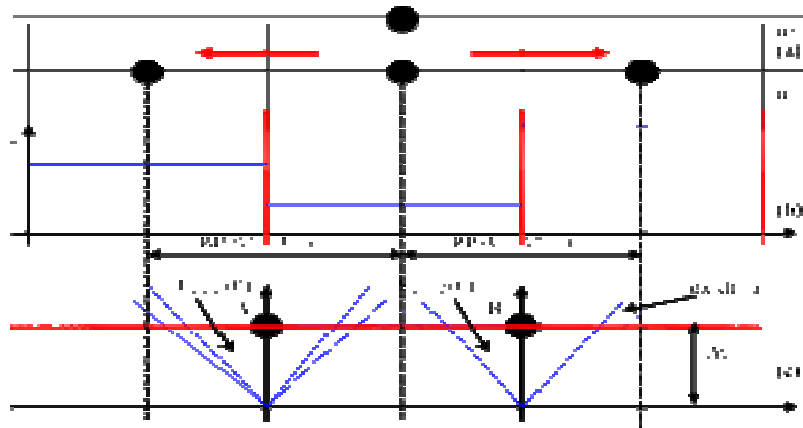
Pada gambar 3 Persamaan integral diatas dievaluasi selama Δt (waktu keping/ lokal) kita mempunyai :

$$c = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{2} \quad (11)$$

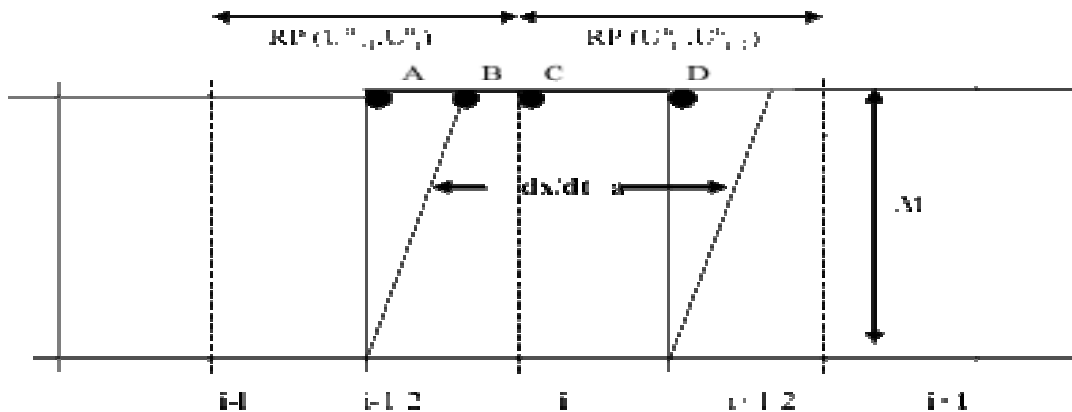
Kita lihat kembali persamaan kekekalan diatas sebagai :

$$u_t + f(u)_x = 0, f(u) = \frac{1}{2}u^2 \quad (13)$$

dimana $f(u)$ hasil dari integral $f(u)_x$.



Gambar 2 . Bagan untuk 1 Matra untuk aliran (a) volume tilik pada kerangka $x-t$ (b) rata-rata integral memberikan potongan dengan data konstan (c) struktur penyelesaian pada batas sel dalam



Gambar 3. Laju penjarangan gelombang positif a (+) pada level waktu n dalam sel i

MODEL ALIRAN PADA SALURAN PELUNCUR DUA TINGKAT

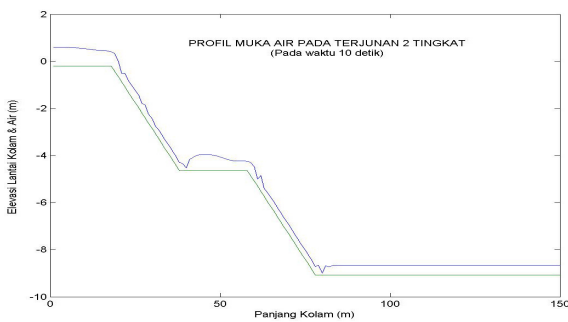
Pada Model ini akan diperlihatkan kondisi profil muka air pada saluran peluncur dengan kemiringan 0,2217 yang dikombinasi bertahap dan untuk model ini dibuat dua tahap atau dua tingkat, panjang kemiringan tiap tahap dibuat masing-masing sama panjang yaitu 20 meter yang diproyeksikan dengan bidang datar. Antara tahap satu dan kedua dibuat jarak sejauh 20 meter. Seperti halnya pada model peluncur diatas maka untuk kecepatan

Aliran diambil dari debit rencana yang telah didesain pada bangunan pelimpah yaitu sebesar 1 meter/det, sehingga dengan desain spillway yang diberikan akan memberikan kedalaman air sebesar 0.6 meter. Kedalaman ini sebagai control kedalaman awal. Posisi titik diskontinyu terletak pada 20 meter dari saluran pengarah. Panjang saluran tetap sama yaitu 150 meter (lihat gambar 4a s/d 4b), sehingga melalui pendekatan Riemann juga akan dibuat sebanyak 150 ruang tilik. Kedalaman hilir merupakan kondisi genangan yang rutin terjadi di kolam olak atau akan terisi

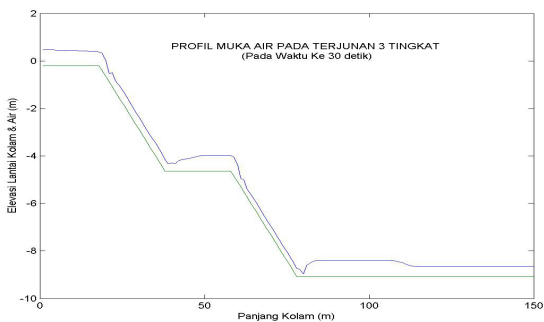
oleh aliran base flow, dalam penelitian ini diambil sebesar 0,2 meter.

Pada perhitungan pertama dari model ini akan diperlihatkan profil aliran air deras pada waktu sepuluh detik setelah pintu dibuka secara mendadak. Pada waktu itu pola-pola kejut akan terlihat sepanjang saluran peluncur tingkat pertama. Pola kejut ini selanjutnya akan diikuti dengan loncatan air pada awal lantai datar sebagai penghubung peluncur kedua. Selanjutnya pola kejut akan muncul lagi pada peluncur kedua hanya bedanya untuk kasus ini muncul pada posisi awal saluran peluncur. Pada kaki peluncur kedua selanjutnya muncul loncatan air, namun ketinggian loncatan pada kolam olak ini lebih kecil jika dibandingkan pada loncatan yang terjadi pada lantai peralihan di atasnya (lihat gambar 4a), aliran dengan kedalaman konstan akan terbentuk pada lantai kolam olak sedalam 0,2 meter yang terjadi pada sekitar 5 meter dari kaki saluran peluncur.

Pada perhitungan kedua dari model ini akan diperlihatkan profil aliran air deras pada waktu tiga puluh detik setelah pintu dibuka secara mendadak. Pada waktu itu pola-pola kejut akan terlihat berkurang sepanjang saluran peluncur tingkat pertama. Loncatan air akan berjalan ke arah hilir ini dapat dilihat baik pada lantai peralihan dan lantai kolam olak (lihat gambar 4b), aliran dengan kedalaman konstan akan terbentuk pada lantai kolam olak sedalam 0,2 meter yang terjadi pada sekitar 5 meter dari kaki saluran peluncur dimuka aliran gelombang kejut yang terbentuk dari loncatan air yang timbul pada kaki peluncur kedua.



Gambar 4a. Profil Aliran pada 10 detik



Gambar 4b. Profil Aliran pada 30 detik

TIGA TINGKAT

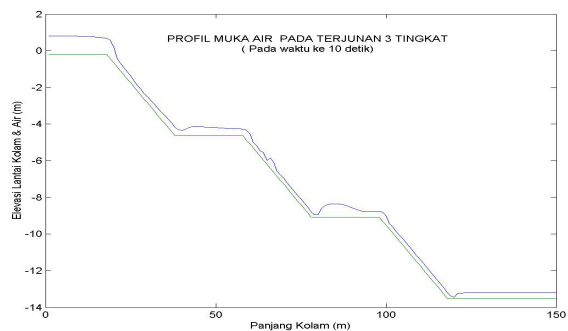
Pada Model ini akan diperlihatkan kondisi profil muka air pada saluran peluncur dengan kemiringan 0,2217 yang dikombinasi bertahap dan untuk model ini dibuat tiga tahap atau tiga tingkat, panjang kemiringan tiap tahap dibuat masing-masing sama panjang yaitu 20 meter yang diproyeksikan pada bidang datar. Antara tahap satu dan lainnya dibuat berjarak sejauh 20 meter.

Seperti halnya pada model peluncur diatas maka untuk kecepatan aliran diambil dari debit rencana yang telah didesain pada bangunan pelimpah yaitu sebesar 1 meter/det, sehingga dengan desain spillway yang diberikan akan memberikan keda-

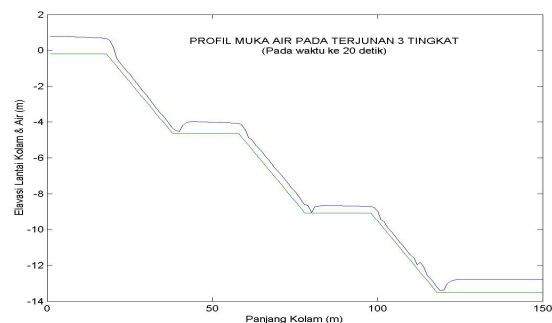
laman air sebesar 0.6 meter. Kedalaman ini sebagai control kedalaman awal. Posisi titik diskontinyu terletak pada 20 meter dari saluran pengarah. Panjang saluran tetap sama yaitu 150 meter (lihat gambar 5a s/d 5b), sehingga melalui pendekatan Riemann juga akan dibuat sebanyak 150 ruang tilik. Kedalaman hilir merupakan kondisi genangan yang rutin terjadi di kolam olak atau akan terisi oleh aliran base flow , dalam penelitian ini diambil sebesar 0,2 meter.

Pada perhitungan pertama dari model ini akan diperlihatkan profil aliran air deras pada waktu sepuluh detik setelah pintu dibuka secara mendadak. Pada waktu itu pola-pola kejut akan terlihat sepanjang saluran peluncur tingkat pertama, kedua dan ketiga. Pada peluncur pertama kejut akan terjadi pada awal lantai peluncur, pola kejut ini selanjutnya akan diikuti dengan loncatan air pada awal lantai datar sebagai penghubung peluncur kedua. Selanjutnya pola kejut akan muncul lagi pada peluncur kedua dengan ketinggian lebih bervariasi, pola kejut ini selanjutnya akan diikuti dengan loncatan air pada awal lantai datar sebagai penghubung peluncur ketiga. Pada peluncur ketiga kejut akan terjadi pada awal lantai peluncur dengan pola yang lebih lembut, Pada kaki peluncur ketiga selanjutnya muncul loncatan air, namun ketinggian loncatan pada kolam olak ini lebih kecil jika dibandingkan pada loncatan yang terjadi pada lantai peralihan di atasnya (lihat gambar 5a), aliran dengan kedalaman konstan akan terbentuk pada lantai kolam olak sedalam 0,2 meter yang terjadi pada sekitar 6 meter dari kaki saluran peluncur.

Pada perhitungan kedua dari model ini akan diperlihatkan profil aliran air deras pada waktu tigapuluh detik setelah pintu dibuka secara mendadak. Pada waktu itu pola-pola kejut di kedua saluran peluncur relative sama namun loncatan air yang terjadi pada lantai peralihan pertama lebih besar (lihat gambar 5b) dan sebaliknya yang terjadi pada lantai peralihan kedua berkurang kedalamannya dan selanjutnya aliran kejut bervariasi lebih banyak akan muncul pada saluran peluncur ketiga. Pada lantai kolam olak akan terjadi loncatan air sepanjang sekitar 5 meter dan selanjutnya aliran dengan kedalaman konstan akan terbentuk pada lantai kolam olak sedalam 0,2 meter yang terjadi setelah loncatan air pada sekitar 6 meter dari kaki saluran peluncur.



Gambar 5a. Profil Aliran pada 10 detik



Gambar 5b. Profil Aliran pada 30 detik

KESIMPULAN

1. Gagasan Godunov pada dasarnya adalah *mereduksi* masalah global menjadi masalah lokal (*reduction of global problem to a local one*), sangat berbeda dengan semua pendekatan penyelesaian masalah ketakmulusan dengan membangun (*construct*) bagan penyelesaian global (menyeluruh) kemudian menerapkan kepada lokal. Jadi dalam penyelesaian jenis Godunov (*Godunov's type of solution*), soal lokal berupa RP dipecahkan dengan menggunakan apapun teknik yang tersedia generic RS (*Riemann Solver*). Kemudian RS lokal ini dirakit menjadi RS global dengan rotasi matrix. Adapun soal lokal yang dipecahkan lokal adalah perkiraan arus (*approximate flux*), yang menerobos antar muka sel volume hingga.
2. Dari hasil uji numerik terlihat bahwa pengaruh gesekan yang ditimbulkan oleh angka meaning dan grafitasi tidak seluruhnya sirna bersama dengan dihilangkannya suku sumber. Hal ini dapat dimengerti bahwa sebagian dari pengaruh ini (cukup besar) telah dimasukkan dalam suku *konvektif* dan *kelajuan gelombang* yang dapat dikatakan sebagai faktor tersembunyi. Dalam ungkapan laju gelombang tersembunyi pengaruh gravitasi g dan kedalaman aliran h dalam ungkapan $c = \sqrt{gh}$, di mana h sendiri mencerminkan pengaruh gesekan dinding dan gesekan antar butir fluida.
3. Meskipun demikian, asal saja keping waktu cukup kecil, maka pengaruh gesekan dan gravitasi dapat dibuat sekecil mungkin, sehingga suku sumber dapat kita abaikan. Dengan pengabaian suku sumber ini, maka kita peroleh hampiran Riemann takubah (*Riemann invariants approximation*), di mana arus ke luar dari sell dapat ditentukan dengan hampiran ketakubahan Riemann (*Riemann invariant*).

REFERENSI

- E.F. Toro. (2001). *Riemann solver and numerical method*, Springer Verlag.
- S.Osher, and F. Solomon (2001). *Upwind Difference Schemes for Hyperbolic system conservation Laws*, mathematics of computation, Vol. 38.
- S.J.Billed and E.F. Toro (1997). "On WAF-type schemes for multidimensional hyperbolic conservation laws." *Journal of Computational physics*, 1997.
- B. Engquist and S. Osher. (1981). *One sided difference approximations for non-linear conservation laws*. Mathematics of Computation, 1981.
- L. Fraccoloro and E.F. Toro. (1995). "Experimental and Numerical assessment of shallow water model for two-dimensional dam-break type." *Journal of computational Physics*, 1995.
- Nugroho W. (2004). "Penyelesaian soal Riemann dengan pendekatan Volume Hingga untuk masalah Gelombang Air dangkal." Thesis Doctor, Universitas Tarumanagara.
- Sugandar S.(2004). "Analisis Hidrodinamika Aliran Kejut" (*Integrasi Tatar-Aliran Mulus dan Kejut/Tak mulus, Makalah PAU-Ilmu Rekayasa Fluida & Hidrodinamika*) - ITB, Bandung.
- Sugandar S. dan Nugroho W.(2004). "Riemann Solver Implementation to Overland Surface Run-Off Flow due to Spatial Rain Fall Distribution." *Jurnal Ilmiah Universitas Tarumanegara*, Jakarta.
- Choudhry, M. Hanif. (1995). *Open Channel Flow*, McGraw Hill.
- AM. Wasantha. (1998). "Weighted implicit Finite Volume Model for Overland Flow." *Journal of Fluid Dynamics*.
- HIC Versteeg & W Malalasekera. (1998). *Computational Fluid Dynamics – the Finite Volume*. Jhon Wiley, New York.