DISTRIBUSI ERLANG DAN PENERAPANNYA

Rini Kurniasih[1] , Getut Pramesti[2]

Mahasiswi Pendidikan Matematika FKIP UNS, Dosen Pendidikan Matematika FKIP UNS

nia.rini.purita2316@gmail.com, getut.uns@gmail.com

ABSTRAK

Distribusi Erlang adalah distribusi kontinu dengan parameter $\theta > 0$ dan r bilangan bulat positif. Distribusi Erlang merupakan salah satu kasus khusus dari distribusi Gamma dengan parameter $\theta > 0$ dan $k > 0$. Sehingga dapat dikatakan distribusi Erlang adalah distribusi keluarga eksponensial dengan parameter θ. Oleh karena itu,tujuan penulisan ini adalah untuk mengetahui karakteristik dan sifat-sifat dari suatu distribusi Erlang serta penggunaan minitab untuk data yang berdistribusi Erlang. Karakteristik distribusi Erlang yang akan dibahas meliputi fungsi denstitas probabilitas, fungsi komulatif, fungsi karakteristik, fungsi pembangkit momen, serta sifat-sifat distribusi Erlang meliputi nilai harapan, mean (rerata), variansi, kemiringan (*skewness*), dan keruncingan (*kurtosis*). Sedangkan untuk penggunaan minitab untuk mendapatkan data-data yang berdistribusi Erlang dengan parameter θ yang sama dan parameter r yang berbeda akan menghasilkan mean dan variansi yang berbeda serta grafik fungsi probabilitasnya.

Kata Kunci: karakteristik, sifat-sifat, distribusi Erlang.

PENDAHULUAN

Distribusi probabilitas dibedakan menjadi dua berdasarkan variabel random yaitu distribusi probabilitas diskrit dan distribusi probabilitas kontinu. Distribusi probabilitas diskrit antara lain distribusi Bernauli, Binomial, Geometrik, Poisson, Negatif Binomial, Hipergeometrik, Seragam Diskrit, dan Generate. Sedangkan, distribusi probabilitas kontinu antara lain Pareto, Eksponensial, Weibull, Seragam Kontinu, Beta, Gamma, Arcsine dan Erlang.

Distribusi Gamma digunakan untuk memodelkan jenis peristiwa dalam statistik, teknik dan sains. Sebagai contoh dalam distribusi Eksponensial, Chi-kuadrat dan distribusi Erlang sebagai kasus khusus dalam distribusi Gamma. Nama Gamma (Γ) pada distribusi Gamma berasal dari fungsi gamma yang didefinisikan sebagai $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y}\, dy$ untuk $\alpha > 0$. Variabel random kontinu X yang berdistribusi Gamma dengan parameter skala θ dan parameter bentuk k dinotasikan sebagai $X \sim GAM(\theta, k)$.

Dalam hal ini akan dibahas distribusi Erlang yang merupakan distribusi khusus dari distribusi Gamma. Distribusi Erlang adalah distribusi Gamma dengan parameter $k = r$ dimana r bilangan bulat positif. Nama Erlang diambil dari 2 hal yaitu **Er**icsson **Lang**uage serta nama orang (A. K Erlang). Pembahasan mengenai sifat distribusi Erlang dan penerapannya ini belum dibahas dalam perkuliahan sehingga perlu kiranya dilakukan pembahasan mengenai sifat-sifat distribusi Erlang dan penggunaan minitab untuk data yang berdistribusi Erlang. Sehingga tujuan dari penulisan makalah ini adalah untuk mengetahui karakteristik dari distribusi Erlang dan penggunaan minitab untuk membangkitkan data yang berdistribusi Erlang.

METODE PENELITIAN

Tahap-tahap yang dilakukan dalam penulisan makalah seminar ini adalah studi literature yaitu penulis mempelajari beberapa sumber tertulis tentang mengidentifikasi suatu karakteristik serta sifat-sifat distribusi Erlang dan penggunaan minitab untuk data yang berdistribusi Erlang.

Dalam penulisan makalah ini bersifat penelitian studi literatur. Oleh karena itu, penulis melakukan pembuktian sendiri terhadap teorema-teorema yang terdapat dalam buku acuan dan penulis mencoba sendiri mencari beberapa karakteristik atau sifat-sifat lain yang tidak terdapat dalam teorema. Sumber data yang penulis gunakan dalam penulisan makalah ini berupa buku, makalah, artikel dan catatan-catatan online. Namun, tidak semua sumber tersebut penulis jadikan sebagai acuan secara langsung. Hanya sumber data berupa buku yang penulis jadikan acuan langsung terutama yang terkait dengan definisi dan teorema.

Penelitian diawali dari definisi distribusi Erlang, yang dalam hal ini sebagai pondasi penting yang dijadikan sebagai acuan untuk menemukan karakteristik distribusi tersebut. Selanjutnya memberikan contoh data yang berdistribusi Erlang dengan menggunakan software minitab16 yang kemudian dihitung mean dan variansi serta grafik fungsi densitas peluangnya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Distribusi Erlang adalah distribusi kontinu yang merupakan distribusi khusus dari distribusi Gamma. Sifat-sifat atau karakteristik distribusi Erlang adalah sebagai berikut :

a. Fungsi Peluang

Definisi (Montgomery & Runger, 2003: 129) Variabel random kontinu X dikatakan berdistribusi Erlang dengan parameter skala $\theta > 0$ dan parameter bentuk r yaitu $X \sim ERL(\theta, r)$.

Jika fungsi densitas probabilitasnya dituliskan dengan simbol $f(x)$ maka

$$f(x) = \frac{1}{\theta^r (r-1)!} x^{r-1} e^{-x/\theta} \quad ; x > 0$$

dengan r adalah bilangan bulat positif.

b. Fungsi Distribusi Kumulatif

Fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Gamma maka fungsi distribusi komulatif probabilitas dari variabel random kontinu X dengan $X \sim ERL(\theta, r)$ adalah

$$F(x; \theta, r) = \int_0^x \frac{t^{r-1} e^{-t/\theta}}{\theta^r (\mathrm{r} - 1)!} \, dt$$

c. Nilai Harapan

Nilai harapan dari variabel random kontinu $X \sim ERL(\theta, r)$ adalah

$$E[X] = \int_0^\infty x \, \frac{1}{\theta^r (r-1)!} x^{r-1} e^{-x/\theta} \, dx$$

misalkan $u = \frac{1}{\theta} x$ maka $du = \frac{1}{\theta} dx$

$$E[X] = \int_0^\infty (u\theta) \frac{1}{\theta^r (r-1)!} (u\theta)^{r-1} e^{-u} \, \theta du$$

$$= \int_0^\infty \frac{\theta^{1+r-1+1}}{\theta^r(r-1)!}(u)^{1+r-1}e^{-u}\,du$$

$$= \frac{\theta}{(r-1)!}\int_0^\infty u^{(r+1)-1}e^{-u}\,du$$

$$= \frac{\theta}{(r-1)!}\Gamma(r+1)$$

$$= r\theta$$

Jadi nilai harapan untuk variabel random kontinu $X \sim ERL(\theta, r)$ adalah

$$E[X] = r\theta$$

(1)

d. Momen dan Fungsi Pembangkit Momen

Momen ke-k dari variabel random kontinu yang berdistribusi Erlang adalah

$$E[X^k] = \int_0^\infty x^k \frac{1}{\theta^r(r-1)!}x^{r-1}e^{-x/\theta}\,dx$$

misalkan $u = \frac{1}{\theta}x$ maka $du = \frac{1}{\theta}dx$

$$E[X^k] = \int_0^\infty \frac{1}{\theta^r(r-1)!}(u\theta)^{k+r-1}e^{-u}\,\theta du$$

$$= \frac{\theta^k}{(r-1)!}\Gamma(k+r)$$

Jadi momen ke-k dari variabel random kontinu $X \sim ERL(\theta, r)$ adalah

$$E[X^k] = \frac{\theta^k}{(r-1)!}\Gamma(k+r)$$

(2)

Fungsi pembangkit momen untuk variabel random X yang berdistribusi Erlang adalah

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx}\,\frac{1}{\theta^r(r-1)!}x^{r-1}e^{-x/\theta}\,dx$$

$$= \frac{1}{\theta^r(r-1)!}\int_0^\infty e^{-(\frac{1}{\theta}-t)x}\,x^{r-1}\,dx$$

misal $u = \left(\frac{1}{\theta} - t\right)x$ atau $x = \frac{u}{\frac{1}{\theta}-t}$ dan $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\theta} - t$ atau $dx = \frac{du}{\frac{1}{\theta}-t}$

$$M_X(t) = \frac{1}{\theta^r(r-1)!}\int e^{-u}\left(\frac{u}{\frac{1}{\theta}-t}\right)^{r-1}\frac{du}{\frac{1}{\theta}-t}$$

$$= \left(\frac{1}{1-\theta t}\right)^r \frac{1}{(r-1)!}\int e^{-u}\,u^{r-1}du$$

$$= \left(\frac{1}{1-\theta t}\right)^r \frac{1}{(r-1)!}\,\Gamma(r)$$

$$= \left(\frac{1}{1-\theta t}\right)^r$$

Jadi fungsi pembangkit momen dari variabel random kontinu $X \sim ERL(\theta, r)$ adalah $M_X(t) = \left(\frac{1}{1-\theta t}\right)^r$ dengan $-\infty < t < \infty$.

e. Fungsi Karakteristik

Fungsi karakteristik dari variabel random kontinu X yang berdistribusi Erlang dengan parameter θ dan parameter bentuk r bilangan bulat positif maka

$$\phi_x(t) = \int_0^\infty e^{itx}\,\frac{1}{\theta^r(r-1)!}x^{r-1}e^{-x/\theta}\,dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x(\frac{1}{\theta}-it)}\,\frac{1}{\theta^r(r-1)!}x^{r-1}\,dx$$

misal $u = \left(\frac{1}{\theta} - it\right)x$ atau $x = \frac{u}{\frac{1}{\theta}-it}$ dan $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\theta} - it$ atau $dx = \frac{du}{\frac{1}{\theta}-it}$

$$\phi_x(t) = \int_0^\infty e^{-u}\,\frac{1}{\theta^r(r-1)!}\left(\frac{u}{\frac{1}{\theta}-it}\right)^{r-1}\frac{du}{\frac{1}{\theta}-it}$$

$$= \frac{1}{\theta^r(r-1)!}\frac{1}{\left(\frac{1}{\theta}-it\right)^r}\Gamma(r)$$

$$= \theta^{-r}\left(\frac{1}{\theta} - it\right)^{-r}$$

$$= (1 - it\theta)^{-r}$$

Jadi fungsi karakteristik dari variabel random kontinu $X \sim ERL(\theta, r)$ adalah

$\phi_x(t) = (1 - it\theta)^{-r}$ dengan $-\infty < t < \infty$ dan $i = \sqrt{-1}$.

f. Mean (Rerata) dan Variansi

Karena nilai harapan pada persamaan (1) sama dengan rerata atau mean, maka mean untuk variabel random kontinu $X \sim ERL(\theta, r)$ adalah

$$\mu = r\theta$$

(3)

Variansi variabel random X adalah $Var(X) = \sigma^2 = E[X^2] - (E[X])^2$. Dengan memanfaatkan persamaan (2) akan diperoleh

$E[X^k] = \frac{\theta^k}{(r-1)!}\Gamma(k + r)$ dengan $k = 2$ maka

$$E[X^2] = \frac{\theta^2}{(r-1)!}\Gamma(2 + r)$$

$$= \frac{\theta^2}{(r-1)!}(r + 1)r(r - 1)!$$

$$= r^2\theta^2 + r\theta^2$$

Sehingga

$$\sigma^2 = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$= r^2\theta^2 + r\theta^2 - (r\theta)^2$$

$$= r\theta^2$$

Jadi variansi untuk variabel random kontinu $X \sim ERL(\theta, r)$ adalah

$$\sigma^2 = r\theta^2$$

(4)

g. Kemiringan

Langkah 1 : Menentukan momen ke-3

$E[X^k] = \frac{\theta^k}{(r-1)!}\Gamma(k + r)$ dengan $k = 3$ maka

$E[X^3] = \frac{\theta^3}{(r-1)!}\Gamma(3 + r)$

$= \frac{\theta^3}{(r-1)!}(r + 2)(r + 1)r(r - 1)!$

$= (r^2\theta^2 + r\theta^2)(r\theta + 2\theta)$

Jadi momen ke-3 untuk variabel random kontinu $X \sim ERL(\theta, r)$ adalah

$$m_3 = (r^2\theta^2 + r\theta^2)(r\theta + 2\theta)$$

(5)

Langkah 2: Menentukan deviasi baku

Berdasarkan persamaan (4) maka akan diperoleh deviasi bakunya sebagai berikut:

$$\sigma = \sqrt{r\theta^2} = \theta\sqrt{r}$$

(6)

Langkah 3: Menentukan kemiringan distribusi

Berdasarkan persamaan (5) dan (6) maka koefisien momen kemiringannya adalah

$a_3 = \frac{m_3}{\sigma^3}$

$a_3 = \frac{(r^2\theta^2+r\theta^2)(r\theta+2\theta)}{(\theta\sqrt{r})^3}$

$a_3 = \frac{(r+1)(r+2)}{\sqrt{r}}$

(7)

Langkah 4: Menentukan jenis kemiringannya

Karena dalam kasus ini variabel random kontinu $X \sim ERL(\theta, r)$ dengan r adalah bilangan bulat positif sehingga apabila dipilih sebarang nilai r kemudian mensubstitusikannya ke persamaan (7).

Akibatnya:

untuk $r = 1$ maka $a_3 = \frac{(1+1)(1+2)}{\sqrt{1}} = 6 > 0$

untuk $r = 2$ maka $a_3 = \frac{(2+1)(2+2)}{\sqrt{2}} = 8.485 > 0$

untuk $r = 3$ maka $a_3 = \frac{(3+1)(3+2)}{\sqrt{3}} = 11.547 > 0$

untuk r menuju tak hingga maka akan selalu $a_3 > 0$.

Berdasarkan perhitungan diatas untuk r adalah bilangan bulat positif maka diketahui bahwa koefisien momen kemiringannya selalu menunjukkan $a_3 > 0$ yang mengindikasikan bahwa distribusi Erlang memiliki kemiringan positif.

h. Keruncingan

Langkah 1: Menentukan momen ke-4

$$E[X^k] = \frac{\theta^k}{(r-1)!}\Gamma(k + r) \text{ dengan } k = 4 \text{ maka}$$

$$E[X^4] = \frac{\theta^4}{(r-1)!}\Gamma(4 + r)$$

$$= \frac{\theta^4}{(r-1)!}(r + 3)(\mathrm{r} + 2)(\mathrm{r} + 1)\mathrm{r}(r - 1)!$$

$$= (\mathrm{r}\theta + 3\theta)(\mathrm{r}^2\theta^2 + \mathrm{r}\theta^2)(r\theta + 2\theta)$$

Jadi momen ke-4 untuk variabel random kontinu $X \sim ERL(\theta, r)$ adalah

$$m_4 = (\mathrm{r}\theta + 3\theta)(\mathrm{r}^2\theta^2 + \mathrm{r}\theta^2)(r\theta + 2\theta)$$

(8)

Langkah 2: Menentukan keruncingan distribusi

Berdasarkan persamaan (6) dan (8) maka koefisien momen kemiringan untuk variabel random kontinu $X \sim ERL(\theta, r)$ adalah

$$a_4 = \frac{m_4}{\sigma^4}$$

$$a_4 = \frac{(\mathrm{r}\theta+3\theta)(\mathrm{r}^2\theta^2+\mathrm{r}\theta^2)(r\theta+2\theta)}{(\theta\sqrt{r})^4}$$

$$a_4 = \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{r}$$
(9)

Langkah 3: Menentukan jenis keruncingannya

Karena dalam kasus ini variabel random kontinu $X \sim ERL(\theta, r)$ dengan r adalah bilangan bulat positif sehingga apabila dipilih sebarang nilai r kemudian mensubstitusikannya ke persamaan (9).

Akibatnya:

untuk $r = 1$ maka $a_4 = \frac{(1+1)(1+2)(1+3)}{1} = 24 > 3$

untuk $r = 2$ maka $a_4 = \frac{(2+1)(2+2)(2+3)}{2} = 30 > 3$

untuk $r = 3$ maka $a_4 = \frac{(3+1)(3+2)(3+3)}{3} = 40 > 3$

untuk r menuju tak hingga maka akan selalu $a_4 > 3$.

Berdasarkan perhitungan diatas untuk r adalah bilangan bulat positif maka diketahui bahwa koefisien momen keruncingan selalu menunjukkan $a_4 > 3$ yang berarti bahwa keruncingan distribusi Erlang disebut leptokurtik (runcing).

Contoh aplikasi distribusi Erlang untuk membangkitkan data dengan menggunakan software minitab16

Data yang digunakan dalam makalah seminar ini merupakan data dengan distribusi Erlang yang dibangkitkan melalui software minitab16 dengan parameter skala (*scale parameter*) $\theta = 0{,}3$ dan parameter bentuk (*shape parameter*) $r = 1{,}2{,}5$. Data yang berdistribusi Erlang dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Data yang berdistribusi Erlang dengan $\theta = 0{,}3$ dan $r = 1{,}2{,}5$

No	$r = 1$	$r = 2$	$r = 5$
1	0,176437	1,37690	1,15356

2	0,235061	0,20646	2,50148
3	0,166937	0,39385	1,59090
4	0,017480	0,27688	0,89222
5	0,351759	0,62666	3,72337
6	0,676877	0,13733	2,94462
7	0,119168	0,41343	0,90402
8	0,504290	1,35201	0,92960
9	0,574186	0,27974	0,84215
10	0,198275	0,75925	1,63566
11	0,041942	0,19178	2,06384
12	0,504070	0,54427	2,80343
13	0,034947	0,22821	1,80542
14	0,080737	0,35993	0,88183
15	0,046816	0,99694	2,95939

Akan ditentukan fungsi pembangkit momen, fungsi karakteristik, mean, variansi serta grafik fungsi densitas peluangnya.

1. Fungsi pembangkit momen

   Dengan menggunakan rumus $M_X(t) = \left(\frac{1}{1-\theta t}\right)^r$ dengan $-\infty < t < \infty$ maka

   untuk $r = 1$ diperoleh $M_X(t) = \frac{1}{1-0{,}3t}$,

   untuk $r = 2$ diperoleh $M_X(t) = \left(\frac{1}{1-0{,}3t}\right)^2$, dan

   untuk $r = 5$ diperoleh $M_X(t) = \left(\frac{1}{1-0{,}3t}\right)^5$.

2. Fungsi karakteristik

   Dengan menggunakan rumus $\phi_x(t) = (1 - it\theta)^{-r}$; $i = \sqrt{-1}$, $-\infty < t < \infty$

   untuk $r = 1$ diperoleh $\phi_x(t) = (1 - 0{,}3it)^{-1}$,

   untuk $r = 2$ diperoleh $\phi_x(t) = (1 - 0{,}3it)^{-2}$, dan

   untuk $r = 5$ diperoleh $\phi_x(t) = (1 - 0{,}3it)^{-5}$.

3. Mean

   Dengan menggunakan rumus pada persamaan (3) yaitu $\mu = r\theta$ maka :

   untuk $r = 1$ diperoleh mean $\mu = 0{,}3$,

   untuk $r = 2$ diperoleh mean $\mu = 0{,}6$, dan

   untuk $r = 5$ diperoleh mean $\mu = 1{,}5$.

4. Variansi

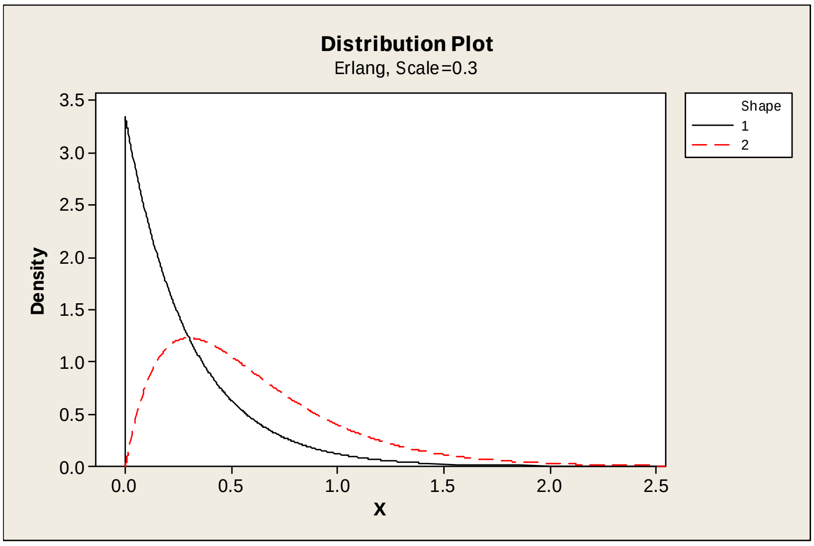
   Dengan menggunakan rumus pada persamaan (4) yaitu $\sigma^2 = r\theta^2$ maka :

   untuk $r = 1$ diperoleh variansi $\sigma^2 = 0{,}09$,

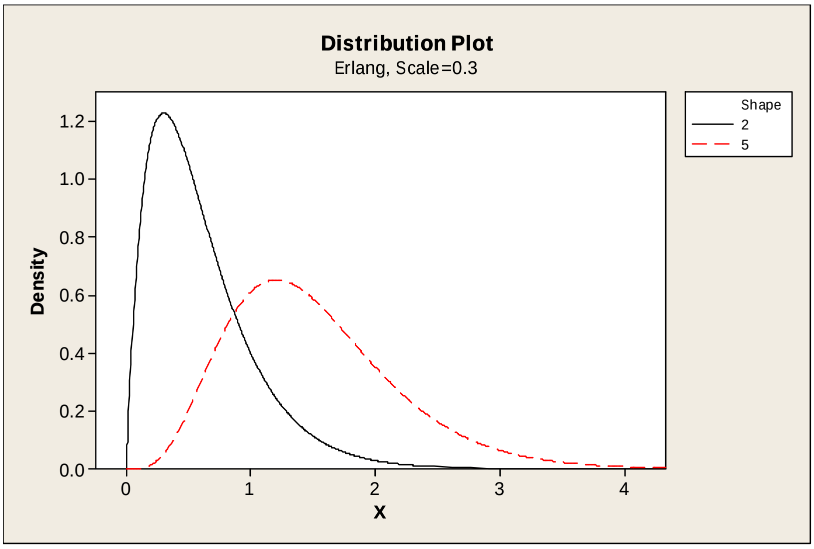
   untuk $r = 2$ diperoleh variansi $\sigma^2 = 0{,}18$, dan

   untuk $r = 5$ diperoleh variansi $\sigma^2 = 0{,}45$.

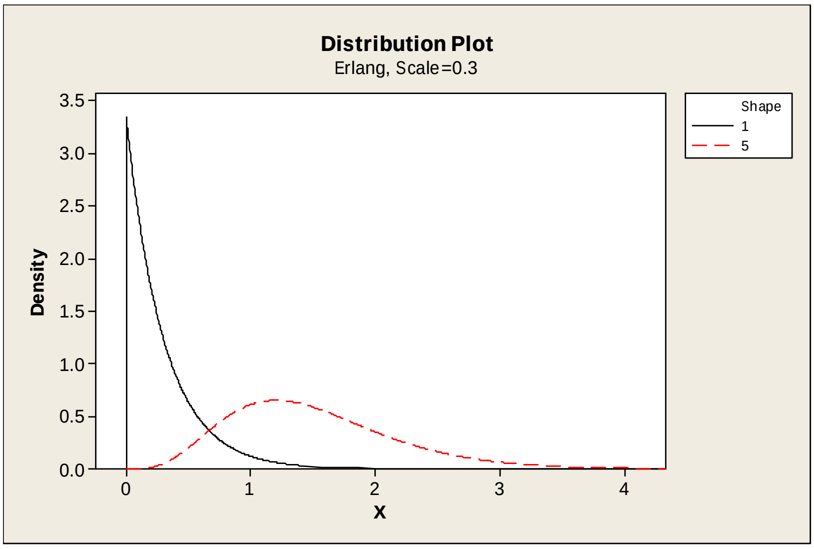
5. Grafik fungsi densitas peluang



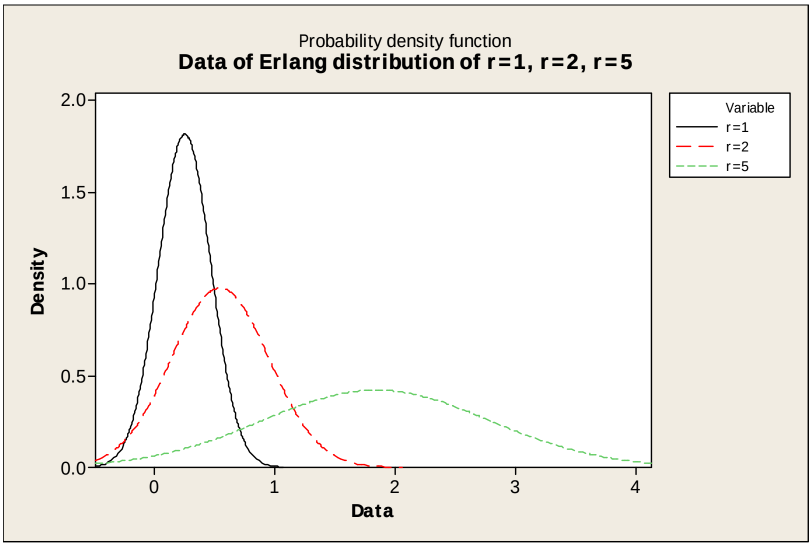
Gambar 5.1. Grafik dua fungsi densitas peluang distribusi Erlang dengan $\theta = 0{,}3$ dan $r = 1\ dan\ r = 2$.



Gambar 5.2. Grafik dua fungsi densitas peluang distribusi Erlang dengan $\theta = 0{,}3$ dan $r = 2\ dan\ r = 5$.



Gambar 5.3. Grafik dua fungsi densitas peluang distribusi Erlang dengan $\theta = 0{,}3$ dan $r = 1\ dan\ r = 5$.



Gambar 5.4. Grafik fungsi densitas peluang dari data-data yang berdistribusi Erlang pada **Tabel 1.**

Analisis data-data yang berdistribusi Erlang pada **Tabel 1.** dengan parameter skala $\theta = 0{,}3$ dan parameter bentuk $r = 1, 2, 5$ dengan membandingkan ketiga data yang memiliki parameter bentuk berbeda dan parameter skala yang sama adalah

1. Mean dengan $r = 1$ lebih kecil daripada mean dengan $r = 2$ dan mean dengan $r = 2$ juga lebih kecil daripada mean dengan $r = 5$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa semakin besar parameter bentuk r dengan parameter

skala yang tetap maka meannya juga akan semakin besar. Artinya nilai harapannya juga semakin besar apabila parameter bentuk r dan parameter skala yang tetap karena mean sama dengan nilai harapan.

2. Variansi dengan $r = 1$ lebih kecil daripada variansi dengan $r = 2$ dan variansi dengan $r = 2$ juga lebih kecil daripada variansi dengan $r = 5$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa semakin besar parameter bentuk r dengan parameter skala yang tetap maka variansinya juga akan semakin besar.
3. Berdasarkan grafik fungsi densitas peluang pada **Gambar 5.1-5.3** dapat dikatakan dengan parameter skala yang tetap $\theta = 0{,}3$ dan parameter bentuk yang semakin besar $r = 1, 2, 5$ maka keruncingannya semakin berkurang dan mendekati kurva simetrik yang artinya meannya berada pada titik tengah distribusi sehingga ekor kanan dan kirinya tak akan pernah memotong sumbu horizontal. Sedangkan untuk grafik data-data yang berdistribusi Erlang pada **Gambar 5.4** juga melihatkan hasil yang sama dengan grafik fungsi densitas peluang berarti kesimpulan yang didapatkan juga sama.

SIMPULAN

Berdasarkan penelitian studi literatur yang telah penulis lakukan mengenai karakteristik dan sifat-sifat distribusi Erlang serta data yang berdistribusi Erlang, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Sifat-sifat atau karakteristik dari suatu variabel random kontinu X yang berdistribusi Erlang dengan parameter θ dan r bilangan bulat positif $X \sim ERL(\theta, r)$ yaitu fungsi densitas probabilitas $f(x) = \frac{1}{\theta^r (r-1)!} x^{r-1} e^{-x/\theta}$; $x > 0$, fungsi distribusi kumulatif $F(x; \theta, r) = \int_0^x \frac{t^{r-1} e^{-t/\theta}}{\theta^r (\mathrm{r}-1)!}\, dt$, nilai harapan adalah $E[X] = r\theta$, momen ke-k adalah $E[X^k] = \frac{\theta^k}{(r-1)!} \Gamma(k + r)$, fungsi pembangkit momennya $M_X(t) = (1 - \theta t)^{-r}$ dengan $-\infty < t < \infty$, fungsi karakteristik adalah $\phi_x(t) = (1 - it\theta)^{-r}$ dengan $i = \sqrt{-1}$ dan $-\infty < t < \infty$, mean $\mu = r\theta$, variansi

$\sigma^2 = r\theta^2$, kemiringan positif dan keruncingan distribusi Erlang disebut leptokurtik (runcing).

2. Dengan menggunakan minitab untuk membangkitkan data yang berdistribusi Erlang dengan parameter skala yang sama $\theta = 0{,}3$ dan parameter bentuk yang berbeda $r = 1, 2, 5$ menunjukkan semakin besar mean dan variansi apabila semakin besar parameter bentuknya dan keruncingan grafik fungsi densitas peluangnya semakin berkurang dan mendekati kurva simetrik.

DAFTAR RUJUKAN

Budiyono. 2009. *Statistika untuk Penelitian edisi ke-2*. Surakarta: UNS Press.

Mendenhall, III William., Scheaffer, Richard.L. & Wackerly, Dennis.D. 2008. *Mathematical Statistics with Applications 7th Edition*. Canada: Thomson Learning, Inc.

Montgomery, C. Douglas & Runger, C. George. 2003. *Applied Statistics and Probability for Engineers*. USA: John Wiley & Son, Inc.

Rosenkrantz, Walter A. 1997. *Introduction to Probability and Statistics for Scientists and Engineers*. USA: McGraw-Hill, Inc.

Walpole, R.E. & Myers, R.H. 2002. *Probability & Statistics for Engineers & Scientists Seventh Edition*. USA: Prentice-Hall, Inc.