GABUNGAN METODE BEDA HINGGA DAN EKSTRAPOLASI RICHARDSON UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH SYARAT BATAS DIMENSI SATU

THE MULTIGRID METHOD BETWEEN FINITE DIFFERENCE AND RICHARDSON EXTRAPOLATION TO SOLVE THE 1D LINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Masduki

Jurusan Pend. Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Muhammadiyah Surakarta
Jln. A. Yani, Tromol Pos I, Pabelan Kartasura, Surakarta 57102

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui efisiensi dan akurasi penyelesaian masalah syarat batas dimensi satu apabila diselesaikan dengan metode multigrid dengan operator antar gridnya diterapkan ide ekstrapolasi Richardson. Di sini untuk melakukan diskritisasi masalah syarat batasnya digunakan metode beda hingga. Hasil diskritisasi dengan metode beda hingga adalah sistem persamaan linier (SPL). Untuk menyelesaikan SPL yang diperoleh dari diskritisasi dengan metode beda hingga digunakan algoritma multigrid. Pada penelitian ini metode yang digunakan adalah studi pustaka yang didukung oleh implementasi program komputasi. Studi pustaka digunakan untuk mendapatkan informasi tentang masalah syarat batas, algoritma multigrid, dan ekstrapolasi Richardson. Sedangkan program komputasi digunakan untuk mengetahui efisiensi dan akurasi algoritma baru yang dikembangkan. Dari eksperimen numerik untuk empat kasus masalah syarat batas linear dimensi satu diperoleh bahwa penyelesaian masalah syarat batas dengan gabungan metode beda hingga dan ide ekstrapolasi Richardson, lebih akurat dan efisien dibandingkan dengan penyelesaian dengan metode Jacobi.

Kata Kunci: *metode beda hingga, multigrid, ekstrapolasi Richardson.*

ABSTRACT

This research aims at finding out the accurate and efficient algorithm, solving the 1D linear boundary value problem when it is solved by using multigrid method when the inter grid transfer is applied by Richardson Extrapolation. To solve the 1D linear boundary value problem numerically, it is discretized the equation by using finite difference method. This method gives the linear equation system and it is solved by using multigrid method. This research applies literature study and computation program implementation. The literature study is used to collect information about boundary value problem, multigrid algorithm, and Richardson extrapolation. The computation program is used to find out the efficiency and accuracy of the new algorithm. The finding says that numerical experiments for four cases show the applied of finite difference method with multigrid Richardson extrapolation that improves the accuracy and efficiency of solution 1D boundary value problem.

Keywords: *finite difference method, multigrid, Richardson Extrapolation*

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial merupakan formulasi dari model matematika dari suatu fenomena alam. Fenomena aliran panas pada pelat besi, aliran air pada suatu pipa, perkembangan bakteri, bergetarnya senar pada gitar dan lain sebagainya merupakan fenomena-fenomena yang dapat diformulasikan secara matematika dalam bentuk persamaan diferensial.

Penyelesaian MSB dapat dilakukan baik secara analitik maupun numerik. Secara analitik, MSB dapat diselesaikan dengan metode pemisahan variable, Sturm Liouville, D'Alembert, deret Fourier maupun transformasi Laplace. Tetapi tidak semua MSB dapat dengan mudah diselesaikan dengan cara analitis. Untuk itu diperlukan penyelesaian numeric yang diantaranya adalah dengan metode beda hingga. Penyelesaian masalah syarat batas dengan metode beda hingga menghasilkan sistem persamaan linier (maupun *nonlinier*).

Pada penelitian ini masalah syarat batas akan diselesaikan dengan metode beda hingga order dua. Sistem persamaan yang diperoleh selanjutnya diselesaikan dengan metode multigrid dengan iterasi matriknya digunakan metode Jacobi. Pada metode multigrid, operator prolongasi yang biasa digunakan adalah interpolasi linear. Pada penelitian ini, untuk meningkatkan efisiensi dan akurasi penyelesaian akan diterapkan ide ekstrapolasi Richardson pada operator prolongasi. Selanjutnya penyelesaian dengan pendekatan multigrid tersebut dibandingkan dengan iterasi Jacobi untuk mengetahui keefektifan metode multigrid yang digunakan. Keefektifan metode yang digunakan ditentukan dengan banyaknya *unit work* yang diperlukan untuk mencapai error toleransi tertentu.

Metode beda hingga telah digunakan luas sebagai salah satu metode standar untuk menyelesaikan masalah syarat batas (lihat Nakamura, 1991; Botha & Pinder, 1983; Smith, 1978) disamping metode lain seperti metode elemen hingga. Blyth et. al (1997) menggunakan ide ekstrapolasi Richardson sebagai skema multigrid untuk meningkatkan efisiensi penyelesaian persamaan integral Volterra dengan metode fungsi Walsh. Masduki (2001, 2005) menggunakan metode fungsi Walsh dan ide ekstrapolasi Richardson untuk menyelesaikan persamaan integral Volterra nonlinear dan persamaan integral Hammerstein. Eksperimen numerik menunjukkan bahwa penerapan ide ekstrapolasi Richardson mampu meningkatkan efisiensi penyelesaian persamaan integral.

Botha & Pinder (1983) memberikan bentuk MSB dimensi satu sebagai berikut:

$$-u''(x) + qu(x) = f(x), \qquad (1)$$

,

dengan syarat batas

$$0 < x < b$$

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = \gamma_1$$

$$-\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} + qv_i = f_i \quad , \qquad \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = \gamma_2 .$$

Untuk mendapatkan pendekatan turunan kedua, dengan menggunakan deret Taylor diperoleh pendekatan terpusat yaitu

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2). \qquad (2)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (1) dengan metode beda hingga diasumsikan MSB berbentuk:

$$-u''(x) + qu(x) = f(x), \qquad , \qquad (3)$$

dengan syarat batas $u(0) = u(1) = 0$. Misalkan $v_i \approx u(x_i)$ dan $f_i \approx f(x_i)$ untuk $i = 0,1,2,\ldots, N$. Dengan menerapkan persamaan (2) terhadap persamaan (3) diperoleh

$$. \qquad (4)$$

Karena $v_0 = v_N = 0$ maka persamaan (4) hanya berlaku untuk $i = 1,2,\ldots,N-1$. Dengan demikian persamaan (4) dapat dipandang sebagai sistem persamaan linier

$$\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f} \tag{5}$$

dimana

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-2} \\ v_{N-1} \end{bmatrix}, \text{ dan } f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Dengan demikian menyelesaikan persamaan MSB (1) dengan metode beda hingga identik dengan menyelesaikan sistem persamaan (6).

Skema ekstrapolasi Richardson digunakan untuk memperbaiki akurasi penyelesaian pada grid *fine* (Smith, 1971). Misalkan $v_{i,h}$, $v_{i,h/2}$, dan $v_{i,h/4}$ masing-masing adalah penyelesaian persamaan (6) apabila jarak antar grid pada domainnya adalah *h*, *h*/2, dan *h*/4 (dinotasikan dengan Ω_h, $\Omega_{h/2}$, dan $\Omega_{h/4}$). Dengan ekstrapolasi Richardson diperoleh penyelesaian pendekatan yang akurat pada Ω_h adalah sebagai berikut:

$$v_i = \frac{1}{3}\left(4v_{i,h} - v_{i,h/2}\right) \tag{7}$$

atau $$v_i = \frac{1}{3}\left(4v_{i,h/2} - v_{i,h/4}\right). \tag{8}$$

Persamaan (7) dan (8) disebut skema ekstrapolasi Richardson satu langkah. Dengan menggabungkan persamaan (7) dan (8) diperoleh penyelesaian pendekatan yang lebih akurat yaitu

$$v_i = \frac{1}{4}\left(5v_{i,h/2} - v_{i,h/4}\right) \tag{9}$$

yang selanjutnya disebut skema ekstrapolasi Richardson dua langkah.

Pada metode skema ekstrapolasi Richardson, untuk melakukan sekali *sweep* dengan masing-masing level dilakukan sekali iterasi adalah

$$N^2\left(1+\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots\right) \cong \frac{4}{3}UW.$$

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalalah studi pustaka dengan dukungan implementasi program komputasi. Dengan studi pustaka diharapkan diperoleh berbagai informasi yang berhubungan dengan masalah syarat batas, penyelesaian sistem persamaan linier, dan multigrid. Penggunaan program komputasi dimaksudkan untuk mengetahui akurasi dan efisiensi metode yang dikembangkan. Pada penelitian ini digunakan untuk implementasi numerik digunakan software *Matlab 5.3.1*

HASIL DAN PEMBAHASAN

$0 < x < 1$ Sebagai tes keakuratan kedua metode yang digunakan, akan diterapkan eksperimen numerik pada empat kasus yaitu dari Nakamura (1991) dan Power (1987).

Kasus 1.

Diberikan MSB dimensi satu dari Nakamura (1991) pada contoh 10.1 hal. 357 sebagai berikut:

$$-2u''(x) + u(x) = \exp(-0.2x)\,, \qquad , \tag{10}$$

dengan syarat batas tipe Dirichlet yaitu

$$u(0) = u(1) = 0\,.$$

Penyelesaian MSB (10) dengan metode beda hingga (2) diperoleh sistem persamaan linier

$$\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f} \tag{11}$$

dengan $A = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 4+h^2 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 4+h^2 & -2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -2 & \ddots & -2 & 0 \\ \vdots & \ddots & -2 & 4+h^2 & -2 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 & 4+h^2 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-2} \\ v_{N-1} \end{bmatrix}$ dan

$$f = \begin{bmatrix} \exp(-0.2x_1) \\ \exp(-0.2x_2) \\ \vdots \\ \exp(-0.2x_{N-2}) \\ \exp(-0.2x_{N-1}) \end{bmatrix}$$

Dalam penelitian ini digunakan $N = 128$ dan 256.

Selanjutnya persamaan (11) diselesaikan dengan metode Jacobi dan pendekatan multigrid dengan operator transfer antar gridnya diterapkan ekstrapolasi Richardson. Keakuratan masing-masing metode pendekatan dalam menyelesaikan persamaan (11) dibandingkan dengan melihat error yang diperoleh. Besar error, iterasi, dan unit work yang diperlukan pada tiap level disajikan pada tabel 1.

Tabel 1. Error, Iterasi, dan UW Tiap Level Penyelesaian Persamaan (11)

N	**Metode Iterasi Jacobi**		**Ekstrapolasi Richardson**	
	Error	*Iterasi* (UW)	*Error*	*Iterasi* (UW)
128	1.5696×10^{-3}	15 (15)	7.1082×10^{-4}	2 (8/3)
256	8.0266×10^{-4}	15 (15)	3.7563×10^{-4}	2 (8/3)

Berdasarkan Tabel 1 tampak bahwa untuk N=128 penyelesaian dengan metode Jacobi memerlukan 15 iterasi (15 UW) untuk mendapatkan error sebesar 1.5696×10^{-3}. Sedangkan setelah diterapkan ide ekstrapolasi Richardson hanya diperlukan 2 iterasi (8/3 UW) untuk mendapatkan error sebesar 7.1082×10^{-4}. Selanjutnya untuk N=256 penyelesaian dengan metode Jacobi memerlukan 15 iterasi (15 UW) untuk mendapatkan error sebesar 8.0266×10^{-4}. Sedangkan setelah diterapkan ide ekstrapolasi Richardson hanya diperlukan 2 iterasi (8/3

UW) untuk mendapatkan error sebesar 3.7563 x $10^{-4.}$ Dari eksperimen numerik untuk N=128 dan N=256 tampak bahwa penyelesaian masalah syarat batas (10) dengan metode multigrid ekstrapolasi Richardson lebih akurat dan efisien dibandingkan dengan penyelesaian dengan metode standar, dalam hal ini adalah metode iterasi Jacobi.

Kasus 2.

Diberikan MSB dimensi satu dari Power (1987) pada latihan 1.b hal. 27 sebagai berikut:

$$u''(x) + u(x) = 1, \qquad 0 < x < 1, \tag{12}$$

dengan syarat batas tipe Dirichlet yaitu

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Penyelesaian MSB (12) dengan metode beda hingga (2) diperoleh sistem persamaan linier

$$\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f} \tag{13}$$

Besar error, iterasi, dan unit work yang diperlukan pada tiap level disajikan pada tabel 2.

Tabel 2. Error, Iterasi, dan UW Tiap Level Penyelesaian Persamaan (13)

N	Metode Iterasi Jacobi		Ekstrapolasi Richardson	
	Error	*Iterasi* (UW)	*Error*	*Iterasi* (UW)
128	4.1790 x 10^{-3}	15 (15)	1.9756 x 10^{-3}	1 (4/3)
256	2.1117 x 10^{-3}	15 (15)	9.5111x 10^{-4}	1 (4/3)

Berdasarkan Tabel 2 tampak bahwa untuk N=256 penyelesaian dengan metode Jacobi memerlukan 15 iterasi (15 UW) untuk mendapatkan error sebesar 2.1117 x 10^{-3}. Sedangkan setelah diterapkan ide ekstrapolasi Richardson hanya diperlukan 1 iterasi (4/3 UW) untuk mendapatkan error sebesar 9.5111 x $10^{-4.}$ Selanjutnya untuk N=128 penyelesaian dengan metode Jacobi memerlukan 15 iterasi (15 UW) untuk mendapatkan error sebesar 4.1790 x 10^{-3}. Sedangkan setelah diterapkan ide ekstrapolasi Richardson hanya diperlukan 1 iterasi (4/3 UW) untuk mendapatkan error sebesar 1.9756 x 10^{-3}. Dari eksperimen numerik untuk N=128 dan N=256 tampak bahwa penyelesaian masalah syarat batas (12) dengan metode multigrid ekstrapolasi Richardson lebih akurat dan efisien dibandingkan dengan penyelesaian dengan metode standar, dalam hal ini adalah metode iterasi Jacobi.

Kasus 3.

Diberikan MSB dimensi satu dari Nakamura (1991) pada latihan 10.4 hal. 399 sebagai berikut:

$$y''(x) = -w(x)/T, \qquad 0 < x < 1,$$

dengan $$w(x) = 20(1+e^{x/25}) \tag{14}$$

$$T = 5000$$

dan syarat batas tipe Dirichlet yaitu

$$u(0) = u(1) = 0\,.$$

Penyelesaian MSB (17) dengan metode beda hingga (2) diperoleh sistem persamaan linier

$$\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f} \tag{15}$$

Besar error, iterasi, dan unit work yang diperlukan pada tiap level disajikan pada tabel 3.

Tabel 3. Error, Iterasi, dan UW Tiap Level Penyelesaian Persamaan (15)

N	Metode Iterasi Jacobi		Ekstrapolasi Richardson	
	Error	*Iterasi* (UW)	*Error*	*Iterasi* (UW)
128	3.101 x 10^{-5}	15 (15)	1.54 x 10^{-6}	1 (4/3)
256	1.567 x 10^{-5}	15 (15)	5.83 x 10^{-6}	1 (4/3)

Berdasarkan Tabel 3. tampak bahwa untuk N=128 penyelesaian dengan metode Jacobi memerlukan 15 iterasi (15 UW) untuk mendapatkan error sebesar 3.101 x 10^{-5}. Sedangkan setelah diterapkan ide ekstrapolasi Richardson hanya diperlukan 1 iterasi (4/3 UW) untuk mendapatkan error sebesar 1.54 x 10^{-6}. Selanjutnya untuk N=256 penyelesaian dengan metode Jacobi memerlukan 15 iterasi (15 UW) untuk mendapatkan error sebesar 1.567 x 10^{-5}. Sedangkan setelah diterapkan ide ekstrapolasi Richardson hanya diperlukan 1 iterasi (4/3 UW) untuk mendapatkan error sebesar 5.83 x $10^{-6.}$ Dari eksperimen numerik untuk N=128 dan N=256 tampak bahwa penyelesaian masalah syarat batas (14) dengan metode multigrid ekstrapolasi Richardson lebih akurat dan efisien dibandingkan dengan penyelesaian dengan metode standar, dalam hal ini adalah metode iterasi Jacobi.

Kasus 4.

Diberikan MSB dimensi satu dari Nakamura (1991) pada latihan 10.11 hal. 401 sebagai berikut:

$$-T''(x) = q(x)/k, \qquad 0 < x < 1,$$

dengan $q(x) = 100e^{-10x}$ (16)

k=30

dan syarat batas tipe Dirichlet yaitu $T(0) = T(1) = 0$.

Penyelesaian MSB (16) dengan metode beda hingga (2) diperoleh sistem persamaan linier

$$\boldsymbol{Av} = \boldsymbol{f} \qquad (17)$$

Besar error, iterasi, dan unit work yang diperlukan pada tiap level disajikan pada tabel 4.

Tabel 4. Error, Iterasi, dan UW Tiap Level Penyelesaian Persamaan (17)

N	**Metode Iterasi Jacobi**		**Ekstrapolasi Richardson**	
	Error	*Iterasi* (UW)	*Error*	*Iterasi* (UW)
128	3.120 x 10-5	15 (15)	7.810 x 10-6	1 (4/3)
256	1.3009 x 10-4	15 (15)	1.2906 x 10-4	1 (4/3)

Berdasarkan Tabel 4. tampak bahwa untuk N=128 penyelesaian dengan metode Jacobi memerlukan 15 iterasi (15 UW) untuk mendapatkan error sebesar 3.120 x 10^{-5}. Sedangkan setelah diterapkan ide ekstrapolasi Richardson hanya diperlukan 1 iterasi (4/3 UW) untuk mendapatkan error sebesar 7.810 x $10^{-6.}$ Selanjutnya untuk N=256 penyelesaian dengan metode Jacobi memerlukan 15 iterasi (15 UW) untuk mendapatkan error sebesar 1.3009 x 10^{-4}. Sedangkan setelah diterapkan ide ekstrapolasi Richardson hanya diperlukan 1 iterasi (4/3 UW) untuk mendapatkan error sebesar 1.2096 x $10^{-4.}$ Dari eksperimen numerik untuk N=128 dan N=256 tampak bahwa penyelesaian masalah syarat batas (17) dengan metode multigrid ekstrapolasi Richardson lebih akurat dan efisien dibandingkan dengan penyelesaian dengan metode standar, dalam hal ini adalah metode iterasi Jacobi.

SIMPULAN DAN SARAN

Dari hasil eksperimen numerik untuk keempat kasus yang diselesaikan maka dapat disimpulkan bahwa penyelesaian masalah syarat batas dimensi satu dengan gabungan metode beda hingga dan ekstrapolasi Richardson lebih efisien dan akurat dibandingkan dengan metode Jacobi.

Selanjutnya, penelitian tentang penyelesaian masalah syarat batas secara numerik, khususnya dengan metode multigrid masih terbuka luas. Teknik-teknik operator antar grid yang lebih efisien dan akurat masih perlu dikembangkan. Selain itu penelitian untuk menyelesaikan masalah syarat batas nonlinear juga merupakan bidang yang masih luas untuk diteliti.

PERSANTUNAN

Ucapan terima kasih saya ucapkan kepada lembaga penelitian UMS yang telah membantu mendanai penelitian ini. Juga kepada teman-teman sejawat di Jurusan Pendidikan Matematika FKIP UMS yang telah memberikan saran-saran perbaikan pada penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Blyth, W. F., May, R. L., and Widyaningsih, P., 1997, *The Solution of Integral Equations using Walsh Function and A Multigrid Approach*, Computational Techniques and Applications: CTAC97 Proceedings of Eight Biennial Conference, editor J. Noye, M. Tuebner, and A. Gill, Computational Mathematics Group, World Scientific Publishing Co, Hal: 99-106.

Briggs, B. L., 1988, *A Multigrid Tutorial,* Second ed., Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.

Botha, J. F., and Pinder, G. F., 1983, *Fundamental Concepts in the Numerical Solution of Differential Equations*, John Wiley & Sons, New York.

Burden, R. L., Faires, J. D., Reynolds, A. C., 1981, *Numerical Analysis*, second eds. Prindle, Weber & Schmidt, Massachusets.

Masduki, 2001, Penerapan Metode Fungsi Walsh dan Ekstrapolasi Richardson untuk Menyelesaikan Persamaan Integral Volterra Nonlinear, *Jurnal MIPA*, Vol. 20 no. 2, Juli 2001

________, 2005, Penyelesaian Numerik dari Persamaan Integral Hammerstein Menggunakan Fungsi Walsh dan Multigrid, *Prosiding* Seminar Nasional Matematika, 27 Agustus 2005 di UNDIP Semarang, hal. 17-20

Nakamura, S., 1991, *Applied Numerical Methods with Software*, Prentice Hall International Editions, New Jersey.

Power, L. D., 1987, *Boundary Value Problem*, third edition, Harcourt Brace Jovanovich, Florida.

Smith, G. D., 1971, *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Oxford University Press, London.