ISBN : 978.602.361.002.0

MASALAH EIGEN MATRIKS TAK TERREDUKSI BERPANGKAT ATAS ALJABAR MAKS-PLUS INTERVAL

Siswanto
Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, UNS Jl. Ir. Sutami No. 36a, Surakarta
sis.mipauns@yahoo.co.id

ABSTRAK.: Aljabar maks-plus adalah himpunan $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$, $\mathbb{R}$ himpunan bilangan real dan$\varepsilon = -\infty$yang dilengkapi dengan operasi maksimum $(\oplus)$ dan plus $(\otimes)$..Matriks atas aljabar maks-plus merupakan matriks yang elemen-elemennya adalah elemen $\mathbb{R}_\varepsilon$.Matriks atas aljabar maks-plus dikatakan tak terreduksi jika graf komunikasi dari matriks tersebut terhubung kuat (*strongly connected*). Matriks tak terreduksi atas aljabar maks-plus dikatakan tak terreduksi kuat jika setiap matriks berpangkat dari matriks tersebut merupakan matriks tak terreduksi. Aljabar maks-plus interval adalah himpunan $I(\mathbb{R})_\varepsilon = \{ \mathrm{x} = [\underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}] | \underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}} \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \prec \underline{\mathrm{x}} \leq \overline{\mathrm{x}} \} \cup \{\varepsilon\}$ dan $\varepsilon = [\varepsilon, \varepsilon]$. yang dilengkapi dengan operasi maksimum $(\overline{\oplus})$ dan plus $(\overline{\otimes})$..Matriks atas aljabar maks-plus interval merupakan matriks yang elemen-elemennya adalah elemen $I(\mathbb{R}_\varepsilon)$.Telah dibahas tentang matriks tak terreduksi kuat serta masalah nilai eigen dan vektor eigen (masalah eigen) dari matriks tak terreduksi berpangkat atas aljabar maks-plus. Dalam penelitian ini akan dibahas tentang matriks tak terreduksi kuat dan masalah eigen dari matriks tak terreduksi berpangkat atas aljabar maks-plus interval.

Kata Kunci : matriks tak terreduksi kuat;masalaheigen; aljabar maks-plus interval.

1. PENDAHULUAN

Aljabar maks-plus adalah himpunan $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$, $\mathbb{R}$ himpunan bilangan real, $\varepsilon = -\infty$ dilengkapi dengan operasi maksimum $\oplus$ dan plus $\otimes$.Aljabar maks-plus merupakan semifield idempoten. Aljabar maks-plus telah digunakan untuk memodelkan dan menganalisis secara aljabar masalah perencanaan, komunikasi, produksi, sistem antrian dengan kapasitas berhingga, komputasi parallel, dan lalu lintas (Baccelli, *et.al*[1]). Dari himpunan $\mathbb{R}_\varepsilon$ dapat dibentuk himpunan matriks berukuran $m \times n$yang elemen-elemennya merupakan elemen $\mathbb{R}_\varepsilon$, yang selanjutnya disebut himpunan matriks atas aljabar maks-plus dan dinotasikan dengan $\mathbb{R}_\varepsilon^{m\times n}$ (Butkovic [2,3])

Menurut Tam [7], misalkan dalam aplikasi padasistem produksi, matriks produksi$A = (A_{ij}) \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n\times n}$dengan A_{ij} menunjukkan waktu berlangsungnya proses produksi dari mesin j ke i, sedangkan vektor $x(k) = (x_i(k)) \in \mathbb{R}_\varepsilon^n$ dengan $x_i(k)$ menunjukkan waktu mesin ke-*i* mulai bekerja pada tahap ke-*k*. Dalam proses produksi ini, dihasilkan persamaan $x(k+1) = A \otimes x(k)$. Salah satu kriteria yang digunakan oleh pengusaha pabrik (produsen) bahwa proses produksi diharapkan berlangsung secara periodik dengan periode tertentu misalkan λ, sehingga diperoleh $x(k+1) = \lambda \otimes x(k)$. Dari $x(k+1) = A \otimes x(k)$ dan

$x(k+1) = \lambda \otimes x(k)$diperoleh $A \otimes x(k) = \lambda \otimes x(k)$. Dari persamaan $A \otimes x(k) = \lambda \otimes x(k)$ yang dikatakan sebagai masalah nilai eigen (*eigen value*) dan vektor eigen (*eigen vector*) atau masalah eigen (*eigen problem*). dapat ditentukan nilai λ dan vektor $x(k)$berturut-turut disebut nilai eigen dan vektor eigen matriks *A*. Selain itu Butkovic [5]juga telah membahas tentang masalah nilai eigen.Lebih lanjut Butkovic [4] telah membahas tentang masalah eigen matriks tak terreduksi berpangkat dalam aljabar maks-plus.

Untuk menyelesaikan masalah jaringan dengan waktu aktifitas bilangan kabur seperti penjadwalan kabur dan sistem antrian kabur, aljabar maks-plus telah digeneralisasi menjadi aljabar maks-plus interval dan aljabar maks-plus bilangan kabur. Aljabar maks-plus interval yaitu himpunan $I(\mathbb{R})_\varepsilon$ dilengkapi dengan operasi$\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$, sedangkan aljabar maks-plus bilangan kabur yaitu himpunan $F(\mathbb{R})_\varepsilon$ dilengkapi dengan operasi $\tilde{\oplus}$ dan $\tilde{\otimes}$ (Rudhito (2011)).Siswanto [8] telah membahas tentang ruang eigen matriks atas aljabar maks-plus interval. Oleh karena itu,dalam penelitian ini akan dibahas tentang masalah eigen matriks tak terreduksi berpangkat dalam aljabar mak-plus interval.

Sebelum membahas hasil dalam penelitian ini disampaikan konsep-konsep yang diperlukan dalam pembahasan. Disajikan definisi dan teorema tentang aljabar maks-plus interval, matriks atas aljabar maks-plus interval, dan graf(Rudhito [11]).

Interval tertutup x dalam $\mathbb{R}_\varepsilon$adalah suatu himpunan bagian dari $\mathbb{R}_\varepsilon$ yang berbentuk $\mathrm{x} = [\underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}] = \{x \in \mathbb{R}_\varepsilon | \underline{\mathrm{x}} \le x \le \overline{\mathrm{x}}\}$. Interval x dalam $\mathbb{R}_\varepsilon$disebut interval maks-plus. Suatu bilangan $x \in \mathbb{R}_\varepsilon$dapat dinyatakan sebagai interval [*x*,*x*].

Definisi 1.1.*Dibentuk* $I(\mathbb{R})_\varepsilon = \{\mathrm{x} = [\underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}] | \underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}} \in \mathbb{R}, \varepsilon < \underline{x} \le \overline{x}\} \cup \{\varepsilon\}$, *dengan*$\varepsilon = [\varepsilon, \varepsilon]$. *Pada himpunan*$I(\mathbb{R})_\varepsilon$*didefinisikan operasi maksimum*$\overline{\oplus}$*dan plus*$\overline{\otimes}$*dengan*$\mathrm{x} \overline{\oplus} \mathrm{y} = [\underline{\mathrm{x}} \oplus \underline{\mathrm{y}}, \overline{\mathrm{x}} \oplus \overline{\mathrm{y}}]$ *dan*$\mathrm{x} \overline{\otimes} \mathrm{y} = [\underline{\mathrm{x}} \otimes \underline{\mathrm{y}}, \overline{\mathrm{x}} \otimes \overline{\mathrm{y}}]$ untuk setiap $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in I(\mathbb{R})_\varepsilon$.

Himpunan $I(\mathbb{R})_\varepsilon$dilengkapi dengan operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$merupakan semiring idempoten komutatif dengan elemen netral $\varepsilon = [\varepsilon, \varepsilon]$dan elemen satuan $\overline{0} = [0,0]$. Selanjutnya disebut aljabar maks-plus interval dan dinotasikan dengan$I(\mathbb{R})_{max} = (I(\mathbb{R})_\varepsilon; \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$.

Definisi 1.2. *Himpunan matriks berukuran* $m \times n$ *dengan elemen-elemen dalam* $I(\mathbb{R})_\varepsilon$*dinotasikan dengan* $I(\mathbb{R})_\varepsilon^{m \times n}$ *yaitu* $I(\mathbb{R})_\varepsilon^{m \times n} = \{\mathrm{A} = (\mathrm{A}_{ij}) | \mathrm{A}_{ij} \in I(\mathbb{R})_\varepsilon; i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n\}$. *Matriks anggota*$I(\mathbb{R})_\varepsilon^{m \times n}$*disebut matriks interval maks-plus. Selanjutnya matriks interval maks-plus cukup disebut dengan matriks interval*.

Definisi 1.3. *Untuk*$\mathrm{A} \in I(\mathbb{R})_\varepsilon^{m \times n}$*didefinisikan matriks*$\underline{\mathrm{A}} = (\underline{\mathrm{A}}_{ij}) \in \mathbb{R}_\varepsilon^{m \times n}$*dan* $\overline{\mathrm{A}} = (\overline{\mathrm{A}}_{ij}) \in \mathbb{R}_\varepsilon^{m \times n}$*masing-masing disebut matriks batas bawah dan matriks batas atas dari matriks interval* A.

Definisi 1.4. *Diberikan matriks interval*$\mathrm{A} \in I(\mathbb{R})_\varepsilon^{m \times n}$, dengan $\underline{\mathrm{A}}$*dan*$\overline{\mathrm{A}}$*masing-masing adalah matriks batas bawah dan matriks batas atas dari matriks* A. *Didefinisikan interval matriks dari* A *yaitu*$[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] = \{A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{m \times n} | \underline{\mathrm{A}} \le A \le \overline{\mathrm{A}}\}$*dan himpunan interval matriks dari* A *yaitu* $I(\mathbb{R}_\varepsilon^{m \times n})_b = \{[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] | \mathrm{A} \in I(\mathbb{R})_\varepsilon^{m \times n}\}$.

Definisi 1.5.

1. *Untuk* $\alpha \in I(\mathbb{R})_\varepsilon$, $[\underline{A}, \overline{A}]$, $[\underline{B}, \overline{B}] \in I(\mathbb{R}_\varepsilon^{m\times n})_b$ *didefinisikan*
   i. $\alpha \overline{\otimes} [\underline{A}, \overline{A}] = [\alpha \otimes \underline{A}, \alpha \otimes \overline{A}]$
   ii. $[\underline{A}, \overline{A}] \overline{\oplus} [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} \oplus \underline{B}, \overline{A} \oplus \overline{B}]$
2. *Untuk* $[\underline{A}, \overline{A}] \in I(\mathbb{R}_\varepsilon^{m\times k})_b$, $[\underline{B}, \overline{B}] \in I(\mathbb{R}_\varepsilon^{k\times n})_b$ *didefinisikan* $[\underline{A}, \overline{A}] \overline{\otimes} [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$.

Teorema 1,6. *Struktur aljabar dari* $I(\mathbb{R}_\varepsilon^{n\times n})_b$ *yang dilengkapi dengan operasi* $\overline{\oplus}$ *dan* $\overline{\otimes}$ *dinotasikan dengan* $I(\mathbb{R}_{max}^{n\times n})_b = (I(\mathbb{R}_\varepsilon^{n\times n})_b; \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ *merupakan dioid (semiring yang idempoten), sedangkan* $I(\mathbb{R}_\varepsilon^{n\times n})_b$ *merupakan semimodul atas* $I(\mathbb{R})_\varepsilon$.

Semimodul $I(\mathbb{R})_\varepsilon^{n\times n}$ atas $I(\mathbb{R})_\varepsilon$ isomorfik dengan semimodul $I(\mathbb{R}_\varepsilon^{n\times n})_b$ atas $I(\mathbb{R})_\varepsilon$, dengan pemetaan $f: I(\mathbb{R})_\varepsilon^{n\times n} \to I(\mathbb{R}_\varepsilon^{n\times n})_b$, $f(A) = [\underline{A}, \overline{A}]$, $\forall A \in I(\mathbb{R})_\varepsilon^{n\times n}$. Interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}] \in I(\mathbb{R}_\varepsilon^{n\times n})_b$ disebut interval matriks maks-plus yang bersesuaian dengan matriks interval maks-plus $A \in I(\mathbb{R})_\varepsilon^{n\times n}$ dan dinyatakan dengan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$.

Definisi 1.7. *Didefinisikan* $I(\mathbb{R})_\varepsilon^n = \{x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T | x_i \in I(\mathbb{R})_\varepsilon; i = 1, 2, \ldots, n\}$. *Himpunan* $I(\mathbb{R})_\varepsilon^n$ *dapat dipandang sebagai himpunan* $I(\mathbb{R})_\varepsilon^{1\times n}$. *Anggota* $I(\mathbb{R})_\varepsilon^n$ *disebut vektor interval atas* $I(\mathbb{R})_\varepsilon$. *Vektor interval maks-plus* x *bersesuaian dengan interval vektor maks-plus yaitu* $x \approx [\underline{x}, \overline{x}]$.

Selanjutnya disajikan konsep graf berarah berbobot interval. Diberikan graf berarah $D = (N,E)$ dengan $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Graf berarah dikatakan berbobot interval jika setiap busur $(j, i) \in E$ dikawankan dengan suatu interval tertutup bilangan real $A_{ij} \in (I(\mathbb{R})_\varepsilon - \{[\varepsilon, \varepsilon]\})$. Interval bilangan real A_{ij} disebut bobot interval busur (j, i), dinotasikan dengan $w(i, j)$. Didefinisikan graf preseden (graf komunikasi) dari matriks $A \in I(\mathbb{R})_\varepsilon^{n\times n}$ adalah graf berarah berbobot interval $D_A = (N, E)$ dengan $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ dan $E = \{(j, i) | w(i, j) = A_{ij} \neq [\varepsilon, \varepsilon]\}$. Sebaliknya untuk setiap graf berarah berbobot interval $D_A = (N, E)$ selalu dapat didefinisikan suatu matriks $A \in I(\mathbb{R})_\varepsilon^{n\times n}$ yang disebut matriks bobot interval graf D dengan
$$\begin{cases} w(j, i), \text{ jika } (i, j) \in E \\ [\varepsilon, \varepsilon], \text{ jika } (i, j) \notin E \end{cases}.$$

Berikutbeberapa hasil penelitian sebelumnya yang digunakan dan terkait dengan penelitian ini yaitu tentang bobot lintasan interval, maksimum rata-rata sikel interval (Rudhito [6]}, ruang vektor-eigen dan basis ruang vektor-eigen serta dimensinya yang disebut dimensi suatu matriks atas aljabar maks-plus interval (Siswanto [8]).

Definisi 1.8. *Diberikan* $A \in I(\mathbb{R})_\varepsilon^{n\times n}$ *dan* D_A *graf komunikasi dari matriks* A. *Misalkan* $\pi = (i_1, i_2, \ldots, i_p)$ *suatu lintasan dalam* D_A, *bobot dari* π *adalah* $I\varpi(A, \pi) = A_{i_2 i_1} + A_{i_3 i_2} + \cdots + A_{i_p i_{p-1}}$ *jika p*=1 *dan* $\varpi(\pi, A) = \varepsilon$ *jika p* = 1.

Definisi 1.9. *Diberikan* $A \in I(\mathbb{R})_\varepsilon^{n\times n}$ *dan* D_A *graf komunikasi dari matriks* A. *Misalkan* $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_k, i_1)$ *suatu sikel dalam* D_A. *Rata-rata sikel* (mean cycle) *dari sikel* σ *dinotasikan dengan* $I\mu(A, \sigma)$, *yaitu* $I\mu(A, \sigma) = \frac{I\omega(A, \sigma)}{k}$. *Maksimum rata-rata sikel dari semua sikel dalam* D_A *dinotasikan dengan* $\lambda(A)$, *yaitu* $\lambda(A) = maks_\sigma \mu(A, \sigma)$.

Definisi 1.10. Diberikan $\mathrm{A} \in I(\Re)^{n\times n}_{maks}$ dengan $\mathrm{A} \approx [\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] \in I(\mathbb{R}^{n\times n}_{maks})_b$ dan $\lambda = [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}] \in I(\mathbb{R})_\varepsilon$, didefinisikan :

a. $\mathrm{V}(\mathrm{A}, \lambda) = \{\mathrm{x} \in I(\mathbb{R})^n_\varepsilon | \mathrm{A} \overline{\otimes} \mathrm{x} = \lambda \overline{\otimes} \mathrm{x}\}$,

b. $\mathrm{V}(\mathrm{A}) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda(\mathrm{A})} \mathrm{V}(\mathrm{A}, \lambda)$,

c. $\mathrm{V}^+(\mathrm{A},\lambda) = \mathrm{V}(\mathrm{A}, \lambda) \cap I(\mathbb{R})^n$ dan $\mathrm{V}^+([\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}], [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]) = \mathrm{V}([\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}], [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]) \cap I(\mathbb{R}^n)_b$,

d. $\mathrm{V}^+(\mathrm{A}) = \mathrm{V}(\mathrm{A}) \cap I(\mathbb{R})^n$ dan $\mathrm{V}^+([\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}]) = \mathrm{V}([\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}]) \cap I(\mathbb{R}^n)_b$,

Definisi 1.11. Misalkan $\mathrm{A} \in I(\mathbb{R})^{n\times n}_\varepsilon$, $\mathrm{A} \approx [\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] \in I(\mathbb{R}^{n\times n}_\varepsilon)_b$ dan $N = \{1, 2,, \ldots, n\}$ didefinisikan

i. $IE(\mathrm{A}) = \{i \in N | \exists \sigma = (i = i_1, i_2, \ldots, i_k, i_1)$ dalam $D_\mathrm{A} \ni \mu(\sigma, \mathrm{A}) = \lambda(\mathrm{A})\}$,

ii. $IE([\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}]) = \{i \in N | \exists \sigma = (i = i_1, i_2, \ldots, i_k, i_1)$ dalam $D_{\underline{\mathrm{A}}}$ dan $D_{\overline{\mathrm{A}}} \ni \mu(\sigma, \underline{\mathrm{A}}) = \underline{\lambda}(\underline{\mathrm{A}})$ dan $\mu(\sigma, \overline{\mathrm{A}}) = \overline{\lambda}(\overline{\mathrm{A}})\}$,

bahwa $IE(\mathrm{A}) = IE([\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}])$.

Anggota $IE(\mathrm{A})$ disebut sebagai titik-titik eigen atau titik-titik kritis dari graf berarah berbobot interval yang bersesuaian dengan A. Sikel σ disebut sebagai sikel kritis jika $\mu(\sigma, \mathrm{A}) = \lambda(\mathrm{A})$. Dari titik-titik kritis dan busur-busur semua sikel kritis, dapat dibuat graf berarah $C(\mathrm{A})$ disebut graf berarah kritis dari A .

Lema 1.12. Misalkan $\mathrm{A} \in I(\mathbb{R})^{n\times n}_\varepsilon$.Jika $C(\mathrm{A})$adalah graf berarah kritis dari A maka semua sikel dalam $C(\mathrm{A})$ merupakan sikel kritis.

Dua titik i dan j dalam $C(\mathrm{A})$ dikatakan ekuivalen jika i dan j keduanya termuat dalam sikel kritisyang sama dari A dinotasikan $i \sim j$. Dapat dibuktikan bahwa $\sim$ merupakan relasi ekuivalensi di dalam $IE(\mathrm{A})$. Banyaknya himpunan-himpunan maksimal dalam ekuivalensi vektor eigen dasar atau banyaknya komponen-komponen terhubung kuat dalam C(A) disebut dimensi dari ruang eigen dan dinotasikan dengan dim(A).

Definisi 1.13. Misalkan $\underline{\mathrm{g}}_k$ dan $\overline{\mathrm{g}}_k$, $\mathrm{k} = 1, 2, \ldots, n$ masing-masing adalah kolom-kolom matriks $\Gamma(\underline{\mathrm{A}}_\lambda)$ dan $\Gamma(\overline{\mathrm{A}}_\lambda)$. Dibentuk matriks $I\Gamma(\mathrm{A}_\lambda)$ dengan beberapa cara, salah satunya bahwa kolom-kolom matriks $I\Gamma(\mathrm{A}_\lambda)$ ditentukan sebagai berikut :

i. Jika pasangan $\underline{\mathrm{g}}_k$dan $\overline{\mathrm{g}}_k$ sedemikian hingga $\underline{\mathrm{g}}_k \preceq \overline{\mathrm{g}}_k$, $\forall \mathrm{k} = 1, 2, \ldots, n$maka diperoleh satu kolom yaitu vektor interval $\mathrm{g}_k \approx [\underline{\mathrm{g}}_k, \overline{\mathrm{g}}_k]$.

ii. Jika pasangan $\underline{\mathrm{g}}_k$dan $\overline{\mathrm{g}}_k$ tidak berlaku $\underline{\mathrm{g}}_k \preceq \overline{\mathrm{g}}_k$, $\forall \mathrm{k} = 1, 2, \ldots, n$ dapat dibentuk $\overline{\mathrm{g}}^*_k = \delta \otimes \overline{\mathrm{g}}_k$ dengan $\delta = maks_i((\overline{\mathrm{g}}_k)_i - (\underline{\mathrm{g}}_k)_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$

2. METODE PENELITIAN

Materi pokok untuk dasar penelitian ini adalah karya ilmiah hasil penelitian para pakar yang telah dimuat dalam buku atau jurnal. Metode yang dilakukan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka yaitu dengan cara mempelajari karya-karya ilmiah yang telah dihimpun. Selanjutnya, hasil penelitian dan penjelasannya disajikan dalam bentuk definisi, lema dan teorema.

ISBN : 978.602.361.002.0

3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas hasil utama dari penelitianini yaitu tentang masalah eigen matriks tak terreduksi berpangkat atas aljabar maks-plus interval.Selain hasil utama, dibahas hal-hal yang terkait dengan masalah eigen yaitu nilai eigen, ruang-vektor eigen (*eigenspace*) dan basisruang eigen.

Berikut sifat-sifat dua matriks tak terreduksi, dimana matriks yang satu merupakan kelipatan matriks yang lain.

Lema 3.1. *Misalkan* $A, B \in I(\mathbb{R})_\varepsilon^{n\times n}$, A *tak terreduksi dan* $B = \alpha \overline{\otimes} A$ *dengan* $\alpha \in \mathbb{R}$ *maka*

a. $\mu(B,\sigma) = \alpha \overline{\otimes} \mu(A,\sigma)$ *untuk setiap sikel* σ,

b. $\lambda(B) = \alpha \overline{\otimes} \lambda(A)$,

c. B tak terreduksi dan $IE(A) = IE(B)$,

d. $dim(A) = dim(B)$,

e. $IE(A)$ dan $IE(B)$ mempunyai kelas ekuivalensi yang sama,

f. $IV(A) = IV(B)$.

Bukti :

Diketahui $A, B \in I(\mathbb{R})_\varepsilon^{m\times n}$,A tak terreduksi dan $B = \alpha \overline{\otimes} A$ dengan $\alpha \in \mathbb{R}$.Misalkan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$, B $\approx [\underline{B}, \overline{B}]$ dan $\alpha \approx [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$. Karena matriks A tak terreduksi maka $\underline{A}$ dan $\overline{A}$ tak terreduksi. Karena B $\approx [\underline{B}, \overline{B}]$ dan $\alpha \overline{\otimes} A \approx [\underline{\alpha} \otimes \underline{A}, \overline{\alpha} \otimes \overline{A}]$ sedangkan $B = \alpha \overline{\otimes} A$ maka $\underline{B} = \underline{\alpha} \otimes \underline{A}$ dan $\overline{B} = \overline{\alpha} \otimes \overline{A}$. Oleh karena itu,

1. $\underline{A}, \underline{B} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{m\times n}$, $\underline{A}$ tak terreduksi dan $\underline{B} = \underline{\alpha} \otimes \underline{A}$ dengan $\underline{\alpha} \in \mathbb{R}$,
2. $\overline{A}, \overline{B} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{m\times n}$, $\overline{A}$ tak terreduksi dan $\overline{B} = \overline{\alpha} \otimes \overline{A}$ dengan $\overline{\alpha} \in \mathbb{R}$.

Menurut konsep dalam aljabar maks-plus diperoleh,

1. a. $\mu(\underline{B},\underline{\sigma}) = \underline{\alpha} \otimes \mu(\underline{A},\underline{\sigma})$ untuk setiap sikel $\underline{\sigma}$,
   b. $\underline{\lambda}(\underline{B}) = \underline{\alpha} \otimes \underline{\lambda}(\underline{A})$,
   c. $\underline{B}$ tak terreduksi dan $E(\underline{A}) = E(\underline{B})$,
   d. $dim(\underline{A}) = dim(\underline{B})$,
   e. $E(\underline{A})$dan $E(\underline{B})$ mempunyai kelas ekuivalensi yang sama,
   f. $V(\underline{A}) = V(\underline{B})$.

dan

2. a. $\mu(\overline{B},\overline{\sigma}) = \overline{\alpha} \otimes \mu(\overline{A},\overline{\sigma})$ untuk setiap sikel $\overline{\sigma}$,
   b. $\overline{\lambda}(\overline{B}) = \overline{\alpha} \otimes \overline{\lambda}(\overline{A})$,
   c. $\overline{B}$ tak terreduksi dan $E(\overline{A}) = E(\overline{B})$,
   d. $dim(\overline{A}) = dim(\overline{B})$,
   e. $E(\overline{A})$dan $E(\overline{B})$ mempunyai kelas ekuivalensi yang sama,
   f. $V(\overline{A}) = V(\overline{B})$.

Oleh karena itu,

a. $I\mu(B,\sigma) = \alpha \overline{\otimes} I\mu(A,\sigma)$ untuk setiap sikel σ,

ISBN : 978.602.361.002.0

b. $\lambda(\mathrm{B}) = \alpha \overline{\otimes} \lambda(\mathrm{A})$,
c. B tak terreduksi dan $IE(\mathrm{A}) = IE(\mathrm{B})$,
d. $dim(\mathrm{A}) = dim(\mathrm{B})$,
e. $IE(\mathrm{A})$ dan $IE(\mathrm{B})$ mempunyai kelas ekuivalensi yang sama,
f. $IV(\mathrm{A}) = IV(\mathrm{B})$.

Berikut sifat-sifat yang nyatakan hubungan dua matriks dimana matriks yang satu merupakan perkalian invers matriks permutasi dengan matriks yang lain dikalikan matriks permutasi.

Lema 3.2. *Misalkan* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in I(\mathbb{R})_{\varepsilon}^{m\times n}$ *dan* $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1} \overline{\otimes} \mathrm{A} \overline{\otimes} \mathrm{P}$ *dengan* P *adalah matrikspermutasi maka berlaku*

a. A *tak terreduksi jika dan hanya jika* B *tak terreduksi*,
b. *Himpunan panjang sikel pada* D_{A} *dan* D_{B} *sama*,
c. A *dan* B *mempunyai nilai eigen sama*,
d. *terdapat fungsi bijektifantara* $IV(\mathrm{A})$ *dan* $IV(\mathrm{B})$ *yaitu* $IV(\mathrm{B}) = \{\mathrm{P}^{-1} \overline{\otimes} \mathrm{x} | \mathrm{x} \in \mathrm{V}(\mathrm{A})\}$.

Bukti :

Diketahui $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in I(\mathbb{R})_{\varepsilon}^{m\times n}$ dan $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1} \overline{\otimes} \mathrm{A} \overline{\otimes} \mathrm{P}$ dengan P adalah matriks permutasi. Misalkan $\mathrm{A} \approx [\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}]$, $\mathrm{B} \approx [\underline{\mathrm{B}}, \overline{\mathrm{B}}]$ dan $\mathrm{P} \approx [\underline{\mathrm{P}}, \overline{\mathrm{P}}]$. Karena $\mathrm{B} \approx [\underline{\mathrm{B}}, \overline{\mathrm{B}}]$ dan $\mathrm{P}^{-1} \overline{\otimes} \mathrm{A} \overline{\otimes} \mathrm{P} \approx \left[\underline{\mathrm{P}}^{-1} \otimes \underline{\mathrm{A}} \otimes \underline{\mathrm{P}}, \overline{\mathrm{P}}^{-1} \otimes \overline{\mathrm{A}} \otimes \overline{\mathrm{P}}\right]$ maka $\underline{\mathrm{B}} = \underline{\mathrm{P}}^{-1} \otimes \underline{\mathrm{A}} \otimes \underline{\mathrm{P}}$ dan $\overline{\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{P}}^{-1} \otimes \overline{\mathrm{A}} \otimes \overline{\mathrm{P}}$. Oleh karena itu,

1. $\underline{\mathrm{A}}, \underline{\mathrm{B}} \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{m\times n}$ dan $\underline{\mathrm{B}} = \underline{\mathrm{P}}^{-1} \otimes \underline{\mathrm{A}} \otimes \underline{\mathrm{P}}$,
2. $\overline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{B}} \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{m\times n}$ dan $\overline{\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{P}}^{-1} \otimes \overline{\mathrm{A}} \otimes \overline{\mathrm{P}}$.

Menurut konsep dalam Aljabar maks-plus diperoleh,

1. a. $\underline{\mathrm{A}}$ tak terreduksi jika dan hanya jika $\underline{\mathrm{B}}$ tak terreduksi,
   b. Himpunan panjang sikel pada $D_{\underline{\mathrm{A}}}$ dan $D_{\underline{\mathrm{B}}}$ sama,
   c. $\underline{\mathrm{A}}$ dan $\underline{\mathrm{B}}$ mempunyai nilai eigen sama,
   d. terdapat fungsi bijektif antara $V(\underline{\mathrm{A}})$ dan $V(\underline{\mathrm{B}})$ yaitu $V(\underline{\mathrm{B}}) = \{\underline{\mathrm{P}}^{-1} \otimes \underline{\mathrm{x}} | \underline{\mathrm{x}} \in V(\underline{\mathrm{A}})\}$
2. a. $\overline{\mathrm{A}}$ tak terreduksi jika dan hanya jika $\overline{\mathrm{B}}$ tak terreduksi,
   b. Himpunan panjang sikel pada $D_{\overline{\mathrm{A}}}$ dan $D_{\overline{\mathrm{B}}}$ sama,
   c. $\overline{\mathrm{A}}$ dan $\overline{\mathrm{B}}$ mempunyai nilai eigen sama,
   d. terdapat fungsi bijektif antara $V(\overline{\mathrm{A}})$ dan $V(\overline{\mathrm{B}})$, yaitu $V(\overline{\mathrm{B}}) = \{\overline{\mathrm{P}}^{-1} \otimes \overline{\mathrm{x}} | \overline{\mathrm{x}} \in V(\underline{\mathrm{A}})\}$.

Oleh karena itu,

a. A tak terreduksi jika dan hanya jika B tak terreduksi,
b. Himpunan panjang cycle pada D_{A} dan D_{B} sama,
c. A dan B mempunyai nilai eigen sama,
d. terdapat fungsi bijektif antara $\mathrm{V}(\mathrm{A})$ dan $\mathrm{V}(\mathrm{B})$ dengan $\mathrm{V}(\mathrm{B}) = \{\mathrm{P}^{-1} \overline{\otimes} \mathrm{x} | \mathrm{x} \in \mathrm{V}(\mathrm{A})\}$.

Sifat-sifat yang menyatakan hubungan dua matriks tak terreduksi, matriks yang satu merupakan perkalian invers matriks diagonal dengan matriks tersebut dikalikan dengan matriks diagonalnya sebagai berikut.

ISBN : 978.602.361.002.0

Lema 3.3. *Misalkan* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in I(\mathbb{R})_{\varepsilon}^{n\times n}$, A *tak terreduksi dan* $\mathrm{B} = \mathrm{D}^{-1} \overline{\otimes} \mathrm{A} \overline{\otimes} \mathrm{D}$ *dengan* $\mathrm{D} = diag(\mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2, \ldots, \mathrm{d}_n)$, $\mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2, \ldots, \mathrm{d}_n \in J(\mathbb{R})$ *maka*

a. $I\omega(\mathrm{A}, \sigma) = I\omega(\mathrm{B}, \sigma)$ *untuk setiap cycle* σ,

b. $\lambda(\mathrm{A}) = \lambda(\mathrm{B})$,

c. B *tak terreduksi dan* $IE(\mathrm{A}) = IE(\mathrm{B})$,

d. $IE(\mathrm{A})$ *dan* $IE(\mathrm{B})$ *mempunyai kelas ekuivalensi yang sama*,

e. $I\Gamma(\mathrm{B}) = \mathrm{D}^{-1} \overline{\otimes} I\Gamma(\mathrm{A}) \overline{\otimes} \mathrm{D}$.

Bukti :

Diketahui $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in I(\mathbb{R})_{\varepsilon}^{n\times n}$, A tak terreduksi dan $\mathrm{B} = \mathrm{D}^{-1} \overline{\otimes} \mathrm{A} \overline{\otimes} \mathrm{D}$ dengan $\mathrm{D} = diag(\mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2, \ldots, \mathrm{d}_n)$, $\mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2, \ldots, \mathrm{d}_n \in J(\mathbb{R})$. Misalkan $\mathrm{A} \approx [\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}]$, $\mathrm{B} \approx [\underline{\mathrm{B}}, \overline{\mathrm{B}}]$ dan $\mathrm{d}_i \approx [\underline{\mathrm{d}}_i, \overline{\mathrm{d}}_i]$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. Karena matriks A tak terreduksi maka $\underline{\mathrm{A}}$ dan $\overline{\mathrm{A}}$ tak terreduksi. Karena $\mathrm{B} \approx [\underline{\mathrm{B}}, \overline{\mathrm{B}}]$ dan $\mathrm{D}^{-1} \overline{\otimes} \mathrm{A} \overline{\otimes} \mathrm{D} \approx \left[\underline{\mathrm{D}}^{-1} \otimes \underline{\mathrm{A}} \otimes \underline{\mathrm{D}}, \overline{\mathrm{D}}^{-1} \otimes \overline{\mathrm{A}} \otimes \overline{\mathrm{D}}\right]$ maka $\underline{\mathrm{B}} = \underline{\mathrm{D}}^{-1} \otimes \underline{\mathrm{A}} \otimes \underline{\mathrm{D}}$ dan $\overline{\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{D}}^{-1} \otimes \overline{\mathrm{A}} \otimes \overline{\mathrm{D}}$ dengan $\underline{\mathrm{D}} = diag(\underline{\mathrm{d}}_1, \underline{\mathrm{d}}_2, \ldots, \underline{\mathrm{d}}_n)$, $\overline{\mathrm{D}} = diag(\overline{\mathrm{d}}_1, \overline{\mathrm{d}}_2, \ldots, \overline{\mathrm{d}}_n)$, $\underline{\mathrm{d}}_1, \underline{\mathrm{d}}_2, \ldots, \underline{\mathrm{d}}_n \in \mathbb{R}$; $\overline{\mathrm{d}}_1, \overline{\mathrm{d}}_2, \ldots, \overline{\mathrm{d}}_n \in \mathbb{R}$. Oleh karena itu,

1. $\underline{\mathrm{A}}, \underline{\mathrm{B}} \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n\times n}$, $\underline{\mathrm{A}}$ tak terreduksi dan $\underline{\mathrm{B}} = \underline{\mathrm{D}}^{-1} \otimes \underline{\mathrm{A}} \otimes \underline{\mathrm{D}}$ dengan $\underline{\mathrm{D}} = diag(\underline{\mathrm{d}}_1, \underline{\mathrm{d}}_2, \ldots, \underline{\mathrm{d}}_n)$, $\underline{\mathrm{d}}_1, \underline{\mathrm{d}}_2, \ldots, \underline{\mathrm{d}}_n \in \mathbb{R}$,
2. $\overline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{B}} \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n\times n}$, $\overline{\mathrm{A}}$ tak terreduksi dan $\overline{\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{D}}^{-1} \otimes \overline{\mathrm{A}} \otimes \overline{\mathrm{D}}$ dengan $\overline{\mathrm{D}} = diag(\overline{\mathrm{d}}_1, \overline{\mathrm{d}}_2, \ldots, \overline{\mathrm{d}}_n)$, $\overline{\mathrm{d}}_1, \overline{\mathrm{d}}_2, \ldots, \overline{\mathrm{d}}_n \in \mathbb{R}$.

Menurut konsep dalam Aljabar maks-plus diperoleh

1. a. $\omega(\underline{\mathrm{A}}, \underline{\sigma}) = \omega(\underline{\mathrm{B}}, \underline{\sigma})$ untuk setiap cycle $\underline{\sigma}$,
   b. $\underline{\lambda}(\underline{\mathrm{A}}) = \underline{\lambda}(\underline{\mathrm{B}})$,
   c. $\underline{\mathrm{B}}$ tak terreduksi dan $E(\underline{\mathrm{A}}) = E(\underline{\mathrm{B}})$,
   d. $E(\underline{\mathrm{A}})$ dan $E(\underline{\mathrm{B}})$, mempunyai kelas ekuivalensi yang sama.
   e. $\Gamma(\underline{\mathrm{B}}) = \underline{\mathrm{D}}^{-1} \otimes \Gamma(\underline{\mathrm{A}}) \otimes \underline{\mathrm{D}}$.
2. a. $\omega(\overline{\mathrm{A}}, \sigma) = \omega(\overline{\mathrm{B}}, \sigma)$ untuk setiap cycle ω,
   b. $\overline{\lambda}(\overline{\mathrm{A}}) = \overline{\lambda}(\overline{\mathrm{B}})$,
   c. $\overline{\mathrm{B}}$ tak terreduksi dan $E(\overline{\mathrm{A}}) = E(\overline{\mathrm{B}})$,
   e. $E(\overline{\mathrm{A}})$ dan $E(\overline{\mathrm{B}})$ mempunyai kelas ekuivalensi yang sama.
   a. $\Gamma(\overline{\mathrm{B}}) = \overline{\mathrm{D}}^{-1} \otimes \Gamma(\overline{\mathrm{A}}) \otimes \overline{\mathrm{D}}$.

Oleh karena itu,

a. $I\omega(\mathrm{A}, \sigma) = I\omega(\mathrm{B}, \sigma)$ untuk setiap cycle σ,

b. $\lambda(\mathrm{A}) = \lambda(\mathrm{B})$,

c. B tak terreduksi dan $IE(\mathrm{A}) = IE(\mathrm{B})$,

d. $IE(\mathrm{A})$ dan $IE(\mathrm{B})$ mempunyai kelas ekuivalensi yang sama,

e. $I\Gamma(\mathrm{B}) = \mathrm{D}^{-1} \overline{\otimes} I\Gamma(\mathrm{A}) \overline{\otimes} \mathrm{D}$.

Berikut teorema yang menyajikan hubungan dua matriks.

ISBN : 978.602.361.002.0

Teorema 3.4. *Misalkan* $A \in I(\mathbb{R})_\varepsilon^{n\times n}$ *tak terreduksi dan definit. Jika* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in IV(A)$, $D = diag(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *dan* $B = D^{-1} \otimes A \otimes D$ *maka* B *non positif, tak terreduksi dan definit. Oleh karena itu,* σ*sikel kritis untuk* A *jika dan hanya jika* σ*sikel nol untuk* B.

Bukti :

Diketahui A $\in I(\mathbb{R})_\varepsilon^{n\times n}$ tak terreduksi dan definit, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in V(A)$, $D = diag(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dan $B = D^{-1} \otimes A \otimes D$. Misalkan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$, x $\approx [\underline{x}, \overline{x}]$, $x_i \approx [\underline{x}_i, \overline{x}_i]$ dan $d_i \approx [\underline{d}_i, \overline{d}_i]$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. Karena matriks A tak terreduksi dan definit maka matriks $\underline{A}$ dan $\overline{A}$ masing-masing tak terreduksi dan definit. Karena $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in V(A)$ maka $\underline{x} = (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n)^T \in V(\underline{A})$ dan $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)^T \in V(\overline{A})$. Karena $D = diag(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ maka $\underline{D} = diag(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n)$, $\overline{D} = diag(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$. Karena $B = D^{-1} \otimes A \otimes D$, B $\approx [\underline{B}, \overline{B}]$ dan $D^{-1} \overline{\otimes} A \overline{\otimes} D \approx \left[\underline{D}^{-1} \otimes \underline{A} \otimes \underline{D}, \overline{D}^{-1} \otimes \overline{A} \otimes \overline{D}\right]$ maka $\underline{B} = \underline{D}^{-1} \otimes \underline{A} \otimes \underline{D}$ dan $\overline{B} = \overline{D}^{-1} \otimes \overline{A} \otimes \overline{D}$. Oleh karena itu,

1. $\underline{A} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{m\times n}$, $\underline{A}$ tak terreduksi dan definit, $\underline{x} = (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n)^T \in V(\underline{A})$, $\underline{D} = diag(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n)$, $\underline{B} = \underline{D}^{-1} \otimes \underline{A} \otimes \underline{D}$.
2. $\overline{A} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{m\times n}$, $\overline{A}$ tak terreduksi dan definit $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)^T \in V(\overline{A})$. $\overline{D} = diag(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$. $\overline{B} = \overline{D}^{-1} \otimes \overline{A} \otimes \overline{D}$.

Menurut konsep dalam aljabar maks-plus maka

1. B non positif, tak terreduksi dan definit. Oleh karena itu, σsikel kritis untuk A jika dan hanya jika σsikel nol untuk B.
2. B non positif, tak terreduksi dan definit. Oleh karena itu, σsikel kritis untuk A jika dan hanya jika σsikel nol untuk B.

Akibatnya, B non positif, tak terreduksi dan definit. Oleh karena itu, σsikel kritis untuk A jika dan hanya jika σsikel nol untuk B.

Berikut disajikan hasil utama dari penelitian ini.

Teorema 3.5. *Misalkan* k, n *himpunan bilangan bulat positif* $A \in I(\mathbb{R})_\varepsilon^{n\times n}$ *tak terreduksi kuat maka*

1. $\lambda(A^{\overline{\otimes} k}) = (\lambda(A))^{\overline{\otimes} k}$ *dan* $IV(A) \subseteq IV(A^{\overline{\otimes} k})$,
2. $I\Gamma(\lambda(A^{\overline{\otimes} k}))^{\overline{\otimes} -1} \overline{\otimes} A^{\overline{\otimes} k}) \leq I\Gamma((\lambda(A))^{\overline{\otimes} -1} \overline{\otimes} A)$,
3. $IE(A) = IE\left(A^{\overline{\otimes} k}\right)$ *dan kelas ekuivalensi* $IE\left(A^{\overline{\otimes} k}\right)$ *sama dengan kelas ekuivalensi* $IE(A)$ *atau penghalusannya,*
4. *Jika* v_j *dan* u_j $(j \in IE(A))$ *berturut-turut vektor eigen dasar dari* A *dan* $A^{\overline{\otimes} k}$ *maka* $v_j \geq u_j$ *untuk semua* $j \in IE(A)$.

Bukti :

Diketahui k, n himpunan bilangan bulat positif $A \in I(\mathbb{R})_\varepsilon^{n\times n}$ tak terreduksi kuat. Misalkan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$, karena A tak terreduksi kuat maka $\underline{A}$ dan $\overline{A}$ terreduksi kuat.

ISBN : 978.602.361.002.0

Menurut konsep dalam aljabar maks-plus :

a. $\underline{\lambda}(\underline{A}^{\otimes k}) = (\underline{\lambda}(\underline{A}))^{\otimes k}$dan $V(\underline{A}) \subseteq V(\underline{A}^{\otimes k})$,

b. $\Gamma((\underline{\lambda}(\underline{A}^{\otimes k}))^{\otimes -1} \otimes \underline{A}^{\otimes k}) \leq \Gamma((\underline{\lambda}(\underline{A}))^{\otimes -1} \otimes \underline{A})$,

c. $E(\underline{A}) = E(\underline{A}^{\otimes k})$ dan kelas ekuivalensi $E(\underline{A}^{\otimes k})$ sama dengan kelas ekuivalensi $E(\underline{A})$ atau perhalusannya,

d. Jika $\underline{v}_j$ dan$\underline{u}_j$ $\left(j \in \mathrm{E}(\underline{A})\right)$ berturut-turut vektor eigen dasar dari A dan $A^{\otimes k}$ maka

$\underline{v}_j \geq \underline{u}_j$ untuk semua $j \in \mathrm{E}(\underline{A})$.

dan

a. $\overline{\lambda}(\overline{A}^{\otimes k}) = (\overline{\lambda}(\overline{A}))^{\otimes k}$dan $V(\overline{A}) \subseteq V(\overline{A}^{\otimes k})$,

b. $\Gamma((\overline{\lambda}(\overline{A}^{\otimes k}))^{\otimes -1} \otimes \overline{A}^{\otimes k}) \leq \Gamma((\overline{\lambda}(\overline{A}))^{\otimes -1} \otimes \overline{A})$,

c. $E(\overline{A}) = E(\overline{A}^{\otimes k})$ dan kelas ekuivalensi $E(\overline{A}^{\otimes k})$ sama dengan kelas ekuivalensi $E(\overline{A})$ atau penghalusannya,

d. Jika $\overline{v}_j$ dan $\overline{u}_j(j \in \mathrm{E}(\overline{A}))$ berturut-turut vektor eigen dasar dari $\overline{A}$ dan $\overline{A}^{\otimes k}$ maka $\overline{v}_j \geq \overline{u}_j$ untuk semua $j \in \mathrm{E}(\overline{A})$.

Oleh karena itu,

a. $\lambda(A^{\overline{\otimes} k}) = (\lambda(A))^{\overline{\otimes} k}$dan $IV(A) \subseteq IV(A^{\overline{\otimes} k})$,

b. $I\Gamma(\lambda(A^{\overline{\otimes} k}))^{\overline{\otimes} -1} \overline{\otimes} A^{\overline{\otimes} k}) \leq I\Gamma((\lambda(A))^{\overline{\otimes} -1} \overline{\otimes} A)$,

c. $IE(A) = IE\left(A^{\overline{\otimes} k}\right)$ dan kelas ekuivalensi $IE\left(A^{\overline{\otimes} k}\right)$ sama dengan kelas ekuivalensi $IE(A)$ atau penghalusannya,

d. Jika v_j dan $u_j(j \in IE(A))$ berturut-turut vektor eigen dasar dari A dan $A^{\overline{\otimes} k}$ maka $v_j \geq u_j$ untuk semua $j \in IE(A)$.

4. SIMPULAN

Dari pembahasan diperoleh hasil tentang nilai eigen dan ruang eigen dari matriks tak terreduksi berpangkat atas aljabar maks-plus interval yang disajikan dalam Teorema 3.5. Hasil-hasil lain disajikan dalam Lema 3.1, 3.2, 3.3 dan Teorema 3.4.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Baccelli, F., Kohen, G., Olsder, G. J and Quadrat, J. P., 2001. Synchronization and Linearity An Algebra for Discrete Event Systems. New York: Wiley.

[2] Butkovic, P. 2000. Simple Image Set of (max,+) Linear Mappings. Discrete Applied Mathematics. Vol. 105, pp:73–86.

[3] Butkovic, P. 2003. Max-Algebra: The Linear Algebra of Combinatorics?. Linear Algebra and Its Application. Vol. 421. pp:313–335.

[4] Butkovic, P., Cuninghame-Green, R.A. 2007. On Matrix Powers in Max-Algebra. Linear Algebra and Its Application. Vol. 367. pp:370 –381.

[5] Butkovic, P.2010. Max Linear Systems: Theory and Algorithm, London: Springer.

[6] Rudhito, Andy., 2011. Aljabar Maks-Plus Bilangan Kabur dan Penerapannya pada Masalah Penjadwalan dan Jaringan Antrian. Disertasi : Program Studi S3 Matematika FMIPA UGM. Yogyakarta.

[7] Tam, K.P. 2010. Optimizing and Approximating Eigen Vectors in Max-Algebra. Birmingham: University of Birmingham.

[8] Siswanto, dkk. 2014. Ruang Vektor Eigen suatu Matriks atas Aljabar Max-Plus Interval. Jurnal Matematika & Sains (JMS). FMIPA ITB, Vol. 19 No. 1 Hal 8 – 15.