ISBN : 978.602.361.002.0

PENERAPAN SKEMA JACOBI DAN GAUSS SEIDEL PADA PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN POISSON

Trija Fayeldi
Universitas Kanjuruhan Malang
trija_fayeldi@yahoo.com

ABSTRAK. Differential equations are equations that involve an unknown function and derivatives.There will be times when solving the exact solution for the equation may be unavailable. At these times explicitand implicit methods will be used in place of exact solution.By manipulating such methods, one can find ways to provide goodapproximations compared to the exact solution.In some cases, manipulating such methods leads to a linear equation systems. The Jacobi and Gauss-Seidel method are two of the most famous numerical method for solving linear equation systems The diagonal dominance of the matrix is necessary condition before applying both methods. In this paper, we implement Jacobi and Gauss-Seidel methods for solving Poisson equation. We use literature study to investigate the problem. Some numerical experiments in various step size are given to show the difference of both methods on their computation time and number of iteration. From numerical experiments, it is shown that choosing step size influences both the computation time and number of iteration.

Kata Kunci: *Jacobi; Gauss-Seidel; Poisson equation; computation time*

1. PENDAHULUAN

Banyak permasalahan pada persamaan differensial parsial numerik yang dapat dibawa ke dalam bentuk matriks [1].Misalnya, pada persamaan Laplace berikut.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \qquad (1.1)$$

$$u(x,y) = \begin{cases} 0, x = 0, y = 1 \\ 1, x = 1, y = 0 \end{cases}$$

Kita diskritisasiu_{xx} danu_{yy}berturut-turut sebagai berikut.

$$u_{xx} = \frac{u_{r+1,s} - 2u_{r,s} + u_{r-1,s}}{\Delta x^2} \qquad (1.2)$$

$$u_{yy} = \frac{u_{r,s+1} - 2u_{r,s} + u_{r,s-1}}{\Delta y^2} \tag{1.3}$$

$$u_{r,s} = u(x_r, y_s) \tag{1.4}$$

Dengan menerapkan (1.2) dan (1.3), dan (1.4) ke (1.1), diperoleh skema berikut.

$$\frac{1}{4}u_{r-1,s} + \frac{1}{4}u_{r+1,s} - u_{r,s} + \frac{1}{4}u_{r,s-1} + \frac{1}{4}u_{r,s+1} = 0 \tag{1.5}$$

Jika kita pilih $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{3}$ maka skema (1.5) akan ekuivalen dengan SPL $A\vec{u} = b$ dengan

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} u_{2,2} \\ u_{2,3} \\ u_{3,3} \\ u_{3,2} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jika matriks A mempunyai invers A^{-1}, maka $\vec{u}$ dapat dicari dengan menggunakan $\vec{u} = A^{-1}b$. Selain dengan menggunakan $\vec{u} = A^{-1}b$, hampiran $\vec{u}$ dapat pula dicari secara numerik dengan menggunakan beberapa metode, di antaranya adalah GMRES [1], Bi-CGSTab[3], sertametode Jacobi dan metode Gauss-Seidel[2]. Pada makalah ini, akan dibahas tentang metode Jacobi dan metode Gauss-Seidel yang meliputi penurunan skema hingga implementasinya untuk menyelesaikan persamaan Poisson. Kemudian, kita akan mengamati pengaruh besarnya ukuran langkah yang dipilih terhadap waktu komputasi dan banyaknya iterasi yang diperlukan.

2. METODE PENELITIAN

2.1 Persamaan Differensial Parsial

Persamaan Differensial Parsial (PDP) adalah suatu persamaan differensial yang melibatkan lebih dari satu peubah bebas. Pada paper ini, kita akan meninjau suatu persamaan differensial parsial orde dua dengan bentuk umum sebagai berikut.

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

dengan domain $x_0 \le x \le x_f$ dan $y_0 \le y \le y_f$ (2.1) dan kondisi awal

$u(x, y_0) = b_{y0}(x)$, $u(x, y_f) = b_{yf}(x)$

$u(x_0, y) = b_{x0}(y)$, dan $u(x_f, y) = b_{xf}(y)$

Jika dimisalkan $D = B^2 - 4AC$ maka PDP dapat dibedakan menjadi tiga kelompok, yaitu PDP Eliptik jika $D< 0$, PDP parabolik jika $D = 0$, dan PDP Hiperbolik jika $D> 0$. Oleh karena terkadang solusi analitik dari suatu PDP sulit untuk dicari maka digunakanlah metode beda hingga untuk menghampiri solusi analitik tersebut.

2.2 Metode Beda Hingga

Pandang PDP Eliptik berikut.

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{2.2}$$

Untuk menerapkan metode beda hingga pada (2.2), kita bagi domain x ke dalam M_x bagian dengan panjang setiap bagian $\Delta x = \frac{x_f - x_0}{M_x}$ di sepanjang sumbu x. Lakukan hal yang sama di sepanjang sumbu y, yaitu bagi domain y ke dalam M_y bagian dengan panjang setiap bagian $\Delta y = \frac{y_f - y_0}{M_y}$. Kemudian, gunakan beda pusat sehingga diperoleh (1.2) dan (1.3). Dari skema numerik yang dihasilkan, dapat dicari solusi numerik dari (2.2) secara iteratif dengan menggunakan bantuan perangkat lunak, misalnya Matlab [4].

3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

3.1 Metode Iteratif

Pandang sistem persamaan linear (SPL) berikut.

$$\begin{aligned}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots a_{1,N-1}x_{N-1} + a_{1,N}x_N &= b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots a_{2,N-1}x_{N-1} + a_{2,N}x_N &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{N-1,1}x_1 + a_{N-1,2}x_2 + \cdots a_{N-1,N-1}x_{N-1} + a_{N-1,N}x_N &= b_{N-1} \\
a_{N,1}x_1 + a_{N,2}x_2 + \cdots a_{N,N-1}x_{N-1} + a_{N,N}x_N &= b_N
\end{aligned}$$

SPL tersebut dapat dituliskan dalam bentuk berikut.

$$Ax = b \tag{3.1}$$

ISBN : 978.602.361.002.0

Pada (3.1), A adalah matriks tak singular dengan elemen diagonal tak nol, $A \in R^{n \times n}$, dan $x, b \in R^n$. Matriks A dapat kita tuliskan sebagai suatu matriks diagonal D, suatu matriks segitigabawah L, dan suatu matriks segitiga atas U dalambentuk $A = D - L - U$, dengan

$$D = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-1,N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{N,N} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{2,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_{N-1,1} & -a_{N-1,2} & -a_{N-1,3} & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{N,1} & -a_{N,2} & -a_{N,3} & \cdots & -a_{N,N-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{1,2} & -a_{1,3} & \cdots & -a_{1,N-1} & -a_{1,N} \\ 0 & 0 & -a_{2,3} & \cdots & -a_{2,N-1} & -a_{2,N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{3,N-1} & -a_{3,N} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{N-1,N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan pendekatan titik tetap$x = Mx + \hat{b}$, untuk suatu matriks M danvektor $\hat{b}$,bentuk$Ax = b$ dapat dituliskan secara iteratif sebagai

$Ax = b$

$(D - L - U)x = b$

$x = Mx + \hat{b}$

$x^{v+1} = Mx^{v} + \hat{b}$

$v = 0, 1, 2, \ldots$

Pemilihan matriks M dan vektor $\hat{b}$ akan disesuaikan, bergantung pada metode iteratif yangdigunakan. Iterasi harus diatur sedemikian rupa agar memenuhi $\lim_{v \to \infty} x^v = x$.Metode Jacobi dan Gauss-Seidel memerlukan tebakan awal x^0untuk memulai iterasi. Iterasidengan metode Jacobi dan Gauss-Seidel akan konvergen jika A adalah matriks dominan diagonalkuat.

Definisi 3.1

Matriks A berukuran $N \times N$dikatakan dominan diagonal kuat jika $|a_{ii}| > \sum_{j=1,\, j \neq i}^{N} \left| a_{ij} \right|$.

3.2 Penurunan Skema Metode Jacobi dan Gauss Seidel

Penurunan skema metode Jacobi dapat dituliskan sebagai berikut.

$Ax = b$

$(D - L - U)x = b$

$Dx - (L + U)\, x = b$

$Dx = (L + U)\, x + b$

$x = D^{-1}(L + U)\, x + D^{-1}b$

Sehingga, metode Jacobi dapat dituliskan secara iteratif dalam bentuk

$$x^{v+1} = M_J x^v + \hat{b}_J \tag{3.2}$$

dengan dengan $M_J = D^{-1}(L + U)$ dan $\hat{b}_J = D^{-1}b$

Selain dengan menggunakan metode Jacobi, sistem persamaan linear $Ax = b$ dapat puladidekati dengan menggunakan metode Gauss-Seidel sebagai berikut.

$Ax = b$

$(D - L - U)x = b$

$(D - L)\, x - Ux = b$

$(D - L)\, x = Ux + b$

$x = (D - L)^{-1}Ux + (D - L)^{-1}b$

Sehingga, metode Gauss-Seidel dapat dituliskan secara iteratif dalam bentuk

$$x^{v+1} = M_{GS} x^v + \hat{b}_{GS} \tag{3.3}$$

dengan dengan$M_{GS} = (D - L)^{-1}$ dan $\hat{b}_{GS} = (D - L)^{-1}b$

ISBN : 978.602.361.002.0

3.3 Kriteria Penghentian Iterasi

Terdapat banyak kriteria yang dapat digunakan untuk menghentikan iterasi. Dalam paper ini, kita akan menggunakan

$$\left\| b - Ax^{v} \right\| < \varepsilon \qquad (3.4)$$

dengan b adalah hasil eksak, Ax^v adalah hampiran b pada iterasi ke v, dan $\varepsilon > 0$ adalah suatu nilai yang kita pilih sebagai kriteria penghentian iterasi. Selain itu, batasiterasi maksimum yang diizinkan adalah 300 iterasi.

Pada bagian ini, akan diberikan dua implementasi penggunaan metode Jacobi dan Gauss Seidel dalam menemukan hampiran numerik persamaan Poisson. Pada implementasi 1, hanya digunakan satu ukuran langkah, sedangkan pada implementasi 2 akan dipilih beberapa ukuran langkah untuk mengamati pengaruh ukuran langkah terhadap proses perhitungan.

3.4 Implementasi 1

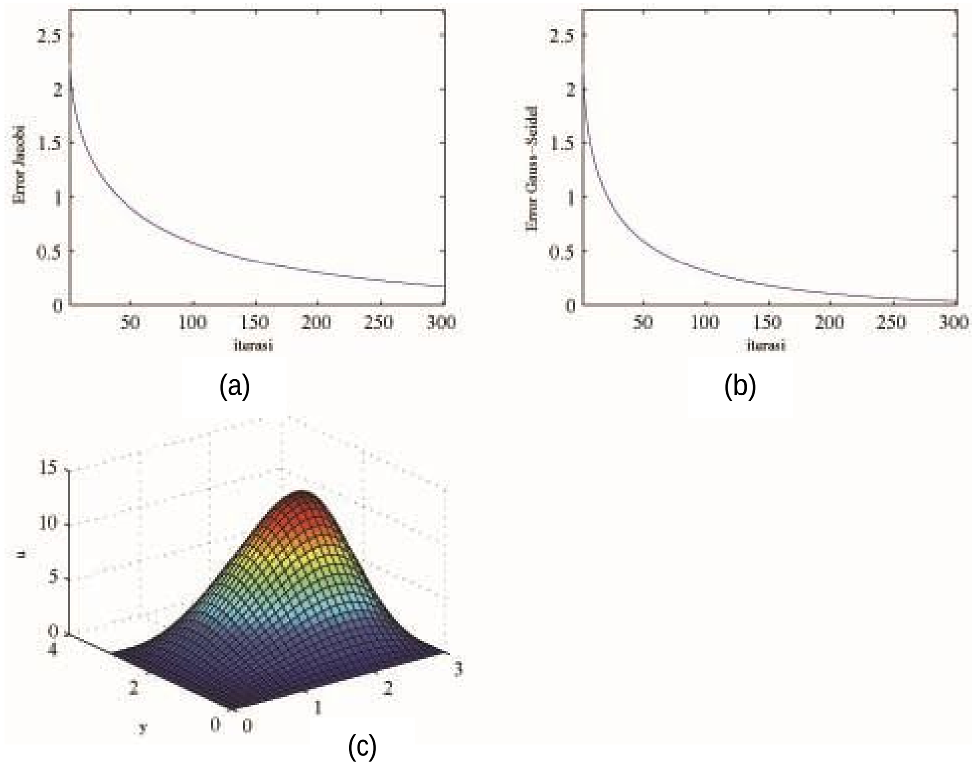
Pada implementasi ini, metode Jacobi dan metode Gauss-Seidel akan diterapkan pada suatupersamaan Poisson berikut.

$$u_{xx} + u_{yy} = 2x^2y^2,\ 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 3 \qquad (3.5)$$

dengan syarat batas Dirichlet dan $\Delta x = \Delta y = \dfrac{1}{10}$.

Dengan menerapkan (1.2), (1.3), dan (1.4) pada (3.5), dapat dibentuk SPL $Ax = b$ dengan A adalah matriks berukuran841×841. Oleh karena ukurannya besar, maka perilaku hampiran hanya akan diamati melalui nilai dari error yang dihasilkan, yaitu nilai dari (3.4).

ISBN : 978.602.361.002.0



Gambar 3.1 (a) Error Jacobi, (b) Error Gauss Seidel,(c) Surface Plot Implementasi 1

Pada Gambar 3.1 (a) dan Gambar 3.1(b), terlihat bahwa error semakin menurun untuk kedua metode. Sehingga, dapatdisimpulkan bahwa iterasi konvergen untuk kedua metode. Kendatipun begitu, metode Gauss-Seidel lebih cepat konvergen dibandingakn dengan metode Jacobi. Untuk metode Jacobi, diperolehbanyaknya iterasi 300 dengan waktu komputasi 19.938 detik. Untuk metode Gauss-Seideldiperoleh banyaknya iterasi 300 dengan waktu komputasi 20.219 detik.

3.5 Implementasi 2

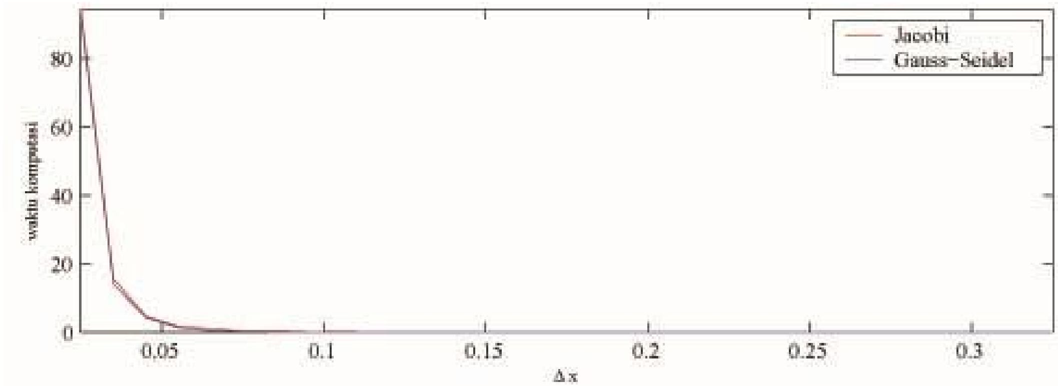
Pada implementasi ini, akan diamati pengaruh perubahan $\Delta x = \Delta y$ terhadap waktu komputasidan banyak iterasi. Sebagai contoh kasus, pandang permasalahan Poisson berikut.

$$u_{xx} + u_{yy} = x + y,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \tag{3.6}$$

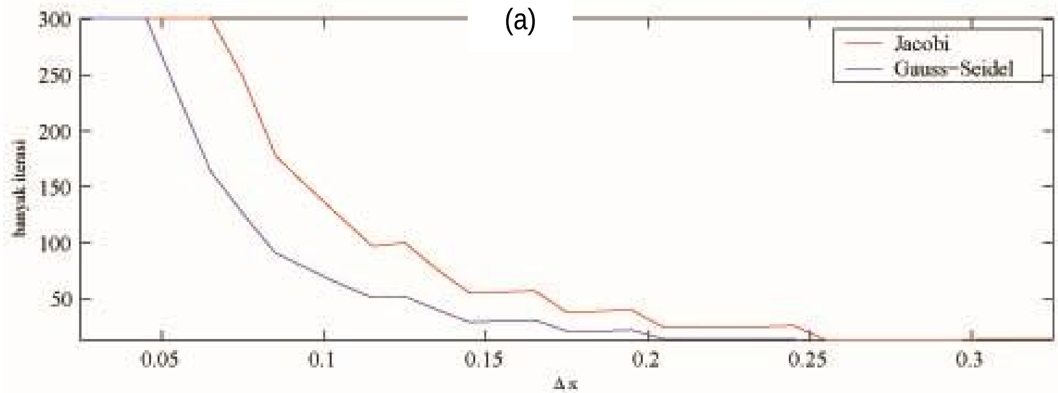
dengan syarat batas Dirichlet, serta $\Delta x = \Delta y$bervariasi antara $\frac{1}{40}$ hingga $\frac{1}{3}$.

Plot hubungan antara Δx terhadap waktu komputasi dan Δx terhadap banyak iterasi dapat dilihat pada Gambar 3.2 berikut.

ISBN : 978.602.361.002.0



(a)



(b)

Gambar 3.2 (a) Plot Δx Terhadap Waktu Komputasi dan (b) Plot Δx Terhadap Banyak Iterasi

Dari Gambar 3.2 (a), dapat diamati bahwa terdapat perbedaan waktu komputasi kedua metode untuk semua ukuran langkah yang digunakan walaupun tidak signifikan. Pada Gambar 3.2 (b), terdapat perbedaan signifikan dalam hal banyaknya iterasi yang diperlukan oleh kedua metode pada suatu ukuran langkah tertentu.

4. SIMPULAN

Dari uraian sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa suatu SPL $Ax = b$ dapat diselesaikan secara iteratif dengan Metode Jacobi ataupun MetodeGauss-Seidel, dalam hal ini Metode Gauss-Seidel jauh lebih cepat konvergen dibandingkan dengan Metode Jacobi. Selain itu, Pemilihan ukuran langkah berpengaruh terhadap waktu komputasi dan banyaknya iterasi.

DAFTAR PUSTAKA

[1]Saad Y, Schultz M H. 1986.*GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems*. SIAM J. Sci. Stat. Comput. 7: 856-869.

[2]Salkuyeh , Davod Khojasteh. 2007.*Generalized Jacobi and Gauss-Seidel Methods for Solving Linear System of Equations*.Numer. Math. J. Chinese Univ. (English Ser.). 16: 164-170.

[3]van der Vorst H A. 1992.*Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems*. SIAM J. Sci. Stat. Comput., 12: 631-644.

[4]Yang, Won-young. 2005.*Applied Numerical Methods Using Matlab*. New Jersey: John Wiley and Sons.