ISBN : 978.602.361.002.0

ESTIMASI PARAMETER MODEL GEOGRAPHICALLY WEIGHTED ORDINAL LOGISTIC REGRESSION (GWOLR)

Syilfi[1], Vita Ratnasari[2]
Mahasiswa Jurusan Statistika Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)[1],
Dosen Jurusan Statistika Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)[2]
fifi.salima@gmail.com[1], vitaratna70@gmail.com[2]

ABSTRAK. Analisis regresi logistik ordinal merupakan analisis regresi yang digunakan untuk memodelkan hubungan antara variabel respon yang bersifat kategorik dan berskala ordinal dengan satu atau lebih variabel prediktor. Metode ini merupakan salah satu jenis analisis regresi global, dimana parameter dalam model digunakan secara global untuk semua lokasi. Sementara itu, fakta di lapangan menunjukkan bahwa terdapat banyak kejadian yang bergantung pada lokasi geografis. Jika masing-masing koefisien regresi logistik ordinal bergantung pada lokasi geografis dimana data tersebut diamati, maka digunakan model *Geographically Weighted Ordinal Logistic Regression* (GWOLR). GWOLR merupakan gabungan antara regresi logistik ordinal dan *Geographically Weighted Regression* (GWR). Estimasi parameter dalam model GWOLR menggunakan metode maksimum *likelihood* terboboti, yaitu dengan memaksimumkan fungsi *ln-likelihood* terboboti. Pembobot yang digunakan dalam fungsi *ln-likelihood* terboboti adalah faktor letak geografis yaitu garis lintang selatan dan garis bujur timur pada masing-masing lokasi pengamatan. Faktor ini memiliki nilai yang berbeda untuk setiap lokasi yang menunjukkan sifat lokal pada model GWOLR, sehingga setiap lokasi pengamatan mempunyai nilai parameter regresi logistik ordinal yang berbeda-beda.

Kata Kunci: *GWOLR; MLE terboboti*; *letak geografis.*

1. PENDAHULUAN

Analisis regresi merupakan salah satu analisis statistika yang digunakan untukmemodelkan hubungan antara variabel respon dengan satu atau lebih variabelprediktor. Salah satu jenisnya yaitu analisis regresi logistik ordinal yang digunakan untuk memodelkan hubungan antara variabel respon yang bersifat kategorik dan berskala ordinal dengan satu atau lebih variabel prediktor. Dalam berbagai bidang ilmu seperti misalnya geografi, ekonomi, ilmu lingkungan dan epidemiologi, data umumnya terkait dengan lokasi geografis dimana data tersebut diamati. Metode statistika yang telah dikembangkan untuk memodelkan hubungan antara variabel respon dengan variabel prediktor yang bergantung pada lokasi geografis dimana data tersebut diamati adalah model *Geographically Weighted Regression* (GWR) oleh Fotheringham, Brunsdon dan Charlton [3]. Model GWR menghasilkan penaksir parameter model yang bersifat lokal untuk setiap titik atau lokasi dimana data tersebut diamati.

ISBN : 978.602.361.002.0

Untuk variabel respon yang bersifat kategori telah dikembangkan model *Geographically Weighted Logistic Regression* (GWLR) oleh Atkinson, German,Sear dan Clark [2]. GWLR merupakan bentuk kombinasi dari model GWRdan model regresi logistik. Atkinson *et al.* [2] menggunakan model GWLRdengan variabel respon biner untuk menjelaskan ketergantungan pada lokasigeografis dari hubungan antara erosi sungai (ada atau tidak adanya erosi) denganbeberapa variabel yang mempengaruhi erosi di sungai Dyfi Afon, West Wales.Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa praktek-praktek manajemen yangberbeda harus dilaksanakan pada lokasi yang berbeda di sepanjang sungai yangdiamati. Model GWLR dapat juga dikembangkan untuk variabel respon berskalaordinal, yaitu model *Geographically Weighted Ordinal Logistic Regression*(GWOLR).

2. METODE PENELITIAN

2.1 Model Regresi Logistik Ordinal

Model regresi logistik termasuk dalam model linear umum (*Generalized Linear Models*). Model yang digunakan untuk regresi logistik ordinal adalah model logit kumulatif (*Cumulative Logit Models*). Misalkan variabel respon Y memiliki *G* buah kategori berskala ordinal dan $\mathbf{x}_i$ menyatakan vektor variabel prediktor pada pengamatan ke-i, $\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ip} \end{bmatrix}^T$ dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, n,$ maka model regresi logistik ordinal dapat dinyatakan sebagai :

$$\text{logit}\left[P\left(Y_i \le g \mid \mathbf{x}_i\right)\right] = \ln\left[\frac{P\left(Y_i \le g \mid \mathbf{x}_i\right)}{1 - P\left(Y_i \le g \mid \mathbf{x}_i\right)}\right] = \alpha_g + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} \qquad (1)$$

Misal $\pi_g\left(\mathbf{x}_i\right) = P\left(Y_i = g \mid \mathbf{x}_i\right)$ menyatakan peluang variabel respon pada pengamatan ke-*i* mempunyai kategori ke-g terhadap $\mathbf{x}_i$, maka

$$\begin{aligned} P\left(Y_i \le g \mid \mathbf{x}_i\right) &= P\left(Y_i = 1 \mid \mathbf{x}_i\right) + P\left(Y_i = 2 \mid \mathbf{x}_i\right) + \cdots + P\left(Y_i = g \mid \mathbf{x}_i\right) \\ &= \pi_1\left(\mathbf{x}_i\right) + \pi_2\left(\mathbf{x}_i\right) + \cdots + \pi_g\left(\mathbf{x}_i\right) \end{aligned}$$

Sehingga peluang untuk masing-masing kategori respon dapat dinyatakan sebagai:

$$\pi_g\left(\mathbf{x}_i\right) = P\left(Y_i = g \mid \mathbf{x}_i\right) = P\left(Y_i \le g \mid \mathbf{x}_i\right) - P\left(Y_i \le g - 1 \mid \mathbf{x}_i\right) \qquad (2)$$

Jika dimisalkan variabel respon mempunyai 4 buah kategori $(G = 4),$ maka model regresi logistik ordinal yang terbentuk adalah (Agresti, 2002):

$$\text{logit}\left[P\left(Y_i \le 1 \mid \mathbf{x}_i\right)\right] = \ln\left[\frac{P\left(Y_i \le 1 \mid \mathbf{x}_i\right)}{1 - P\left(Y_i \le 1 \mid \mathbf{x}_i\right)}\right] = \alpha_1 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}$$

$$\text{logit}\left[P\left(Y_i \le 2 \mid \mathbf{x}_i\right)\right] = \ln\left[\frac{P\left(Y_i \le 2 \mid \mathbf{x}_i\right)}{1 - P\left(Y_i \le 2 \mid \mathbf{x}_i\right)}\right] = \alpha_2 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}$$

$$\operatorname{logit}\left[P\left(Y_i \le 3 \mid \mathbf{x}_i\right)\right] = \ln\left[\frac{P\left(Y_i \le 3 \mid \mathbf{x}_i\right)}{1-P\left(Y_i \le 3 \mid \mathbf{x}_i\right)}\right] = \alpha_3 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}$$

dengan $P\left(Y_i \le 1 \mid \mathbf{x}_i\right) = \dfrac{e^{\alpha_1 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}{1+e^{\alpha_1 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}$, $P\left(Y_i \le 2 \mid \mathbf{x}_i\right) = \dfrac{e^{\alpha_2 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}{1+e^{\alpha_2 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}$

dan $P\left(Y_i \le 3 \mid \mathbf{x}_i\right) = \dfrac{e^{\alpha_3 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}{1+e^{\alpha_3 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}$. Sehingga didapatkan peluang untuk masing-masing kategori respon sebagai berikut :

Peluang kategori pertama

$$\begin{aligned}\pi_1\left(\mathbf{x}_i\right) &= P\left(Y_i = 1 \mid \mathbf{x}_i\right) = P\left(Y_i \le 1 \mid \mathbf{x}_i\right)\\ &= \frac{e^{\alpha_1 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}{1+e^{\alpha_1 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}\end{aligned}$$

Peluang kategori kedua

$$\begin{aligned}\pi_2\left(\mathbf{x}_i\right) &= P\left(Y_i = 2 \mid \mathbf{x}_i\right) = P\left(Y_i \le 2 \mid \mathbf{x}_i\right) - P\left(Y_i \le 1 \mid \mathbf{x}_i\right)\\ &= \frac{e^{\alpha_2 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}{1+e^{\alpha_2 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} - \frac{e^{\alpha_1 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}{1+e^{\alpha_1 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}\end{aligned}$$

Peluang kategori ketiga

$$\begin{aligned}\pi_3\left(\mathbf{x}_i\right) &= P\left(Y_i = 3 \mid \mathbf{x}_i\right) = P\left(Y_i \le 3 \mid \mathbf{x}_i\right) - P\left(Y_i \le 2 \mid \mathbf{x}_i\right)\\ &= \frac{e^{\alpha_3 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}{1+e^{\alpha_3 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} - \left(\frac{e^{\alpha_2 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}{1+e^{\alpha_2 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} - \frac{e^{\alpha_1 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}{1+e^{\alpha_1 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}\right)\\ &= \frac{e^{\alpha_3 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}{1+e^{\alpha_3 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} - \frac{e^{\alpha_2 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}{1+e^{\alpha_2 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} + \frac{e^{\alpha_1 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}{1+e^{\alpha_1 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}\end{aligned}$$

Peluang kategori keempat

$$\begin{aligned}\pi_4\left(\mathbf{x}_i\right) &= P\left(Y_i = 4 \mid \mathbf{x}_i\right) = P\left(Y_i \le 4 \mid \mathbf{x}_i\right) - P\left(Y_i \le 3 \mid \mathbf{x}_i\right) - P\left(Y_i \le 2 \mid \mathbf{x}_i\right) - P\left(Y_i \le 1 \mid \mathbf{x}_i\right)\\ &= 1 - \frac{e^{\alpha_3 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}{1+e^{\alpha_3 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}\end{aligned}$$

Nilai peluang untuk masing-masing kategori respon digunakan sebagai pedoman untuk pengklasifikasian. Suatu pengamatan akan masuk dalam respon kategori ke-g berdasarkan nilai peluang yang terbesar.

2.2 Model *Geographically Weighted Ordinal Logistic Regression* (GWOLR)

Model GWOLR merupakan bentuk kombinasi dari model GWR dan model regresi logistik ordinal. Model GWOLR digunakan untuk memodelkan hubungan antara variabel respon berskala ordinal dengan variabel prediktor yang masing-masing koefisien regresinya bergantung pada lokasi dimana data tersebut diamati. Misalkan variabel respon terdiri dari G buah kategori berskala ordinal, maka model GWOLR dapat ditulis sebagai berikut :

ISBN : 978.602.361.002.0

$$\ln\left[\frac{P\left(Y_i \le g \mid \mathbf{x}_i\right)}{1-P\left(Y_i \le g \mid \mathbf{x}_i\right)}\right] = \alpha_g\left(u_i, v_i\right) + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\left(u_i, v_i\right), \quad g = 1, 2, \ldots, G-1$$

dengan $\mathbf{x}_i$ menyatakan vektor variabel prediktor lokasi ke-*i*, $\mathbf{x}_i = \left[x_{i1} \quad x_{i2} \quad \cdots \quad x_{ip}\right]^T$, $P\left(Y_i \le g \mid \mathbf{x}_i\right)$ menyatakan peluang kumulatif kategori respon ke-*g* terhadap $\mathbf{x}_i$, $\boldsymbol{\beta}\left(u_i, v_i\right)$ merupakan vektor koefisien regresi untuk lokasi ke-*i*, $\alpha_g\left(u_i, v_i\right)$ merupakan intersep dan memenuhi kondisi $\alpha_1\left(u_i, v_i\right) \le \alpha_2\left(u_i, v_i\right) \le \cdots \le \alpha_{G-1}\left(u_i, v_i\right)$, dan $\left(u_i, v_i\right)$ adalah titik koordinat (*longitude, latitude*).

2.3 Estimasi Parameter Model GWOLR

Parameter model GWOLR dapat diestimasi menggunakan metode maksimum *likelihood* terboboti, yaitu dengan memberikan pembobot geografis yang berbeda untuk setiap lokasi pada fungsi *ln-likelihood*. Estimasi parameter pada lokasi ke-*i* diperoleh dengan melakukan turunan parsial pertama terhadap parameter yang akan diestimasi dan kemudian disamakan dengan nol (Atkinson, German, Sear, dan Clark [2]).

Hasil turunan parsial pertama yang diperoleh berbentuk nonlinear sehingga diperlukan suatu metode numerik untuk memperoleh estimasi parameternya. Metode numerik yang dapat digunakan adalah metode iterasi Newton-Raphson. Oleh karena itu diperlukan turunan parsial kedua dari fungsi ln-likelihood terboboti terhadap parameter yang akan diestimasi.

3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Pada penelitian ini, parameter dalam model GWOLR yaitu $\boldsymbol{\theta}\left(u_i, v_i\right) = \left[\alpha_1\left(u_i, v_i\right) \quad \alpha_2\left(u_i, v_i\right) \quad \cdots \quad \alpha_{G-1}\left(u_i, v_i\right) \quad \boldsymbol{\beta}\left(u_i, v_i\right)\right]^T$ diestimasi dengan menggunakan metode maximum likelihood terboboti. Langkah awal dengan membentuk fungsi likelihood. Misalkan diambil $n$sampel random $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ dengan peluang hasil pada kategori *g* adalah $\pi_g^*\left(\mathbf{x}_i\right)$. Jika dimisalkan variabel respon memiliki 4 buah kategori maka fungsi *likelihood* yang terbentuk kemudian di-*ln*-kan sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
L^*(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{n} \Big\{ & y_{j1}\left(\alpha_1\left(u_i,v_i\right) + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\left(u_i,v_i\right)\right) - \left(y_{j1}+y_{j2}+y_{j3}\right)\ln\left[1+e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)}\right] \\
& + y_{j2}\ln\left[e^{\alpha_2(u_i,v_i)+\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)} - e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)}\right] \\
& -\left(y_{j2}+y_{j3}\right)\ln\left[1+e^{\alpha_2(u_i,v_i)+\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)}\right] \\
& + y_{j3}\ln\Big[e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)} - e^{\alpha_2(u_i,v_i)+\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)} + e^{\alpha_3(u_i,v_i)+\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)} \\
& +2e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\alpha_3(u_i,v_i)+2\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)} + e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\alpha_2(u_i,v_i)+\alpha_3(u_i,v_i)+3\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)}\Big] \\
& -\left(1-y_{j2}-y_{j1}\right)\ln\left[1+e^{\alpha_3(u_i,v_i)+\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)}\right]\Big\} w_j\left(u_i,v_i\right)
\end{aligned}
$$

Faktor letak geografis merupakan faktor pembobot pada model GWOLR yang disimbolkan dengan $w_j\left(u_i,v_i\right)$. Faktor ini memiliki nilai yang berbeda untuk setiap lokasi yang menunjukkan sifat lokal pada model GWOLR. Oleh karena itu pembobot diberikan pada bentuk *ln*likelihoodnya untuk model GWOLR. Estimasi parameter dilakukan dengan melakukan turunan parsial pertama dari fungsi *ln-likelihood* terhadap parameter yang akan diestimasi dan kemudian disamakan dengan nol.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L^*}{\partial \alpha_1} = \sum_{j=1}^{n} \Bigg\{ & y_{j1} - \left(y_{j1}+y_{j2}+y_{j3}\right)\frac{e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)}}{1+e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)}} - y_{j2}\frac{e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)}}{e^{\alpha_2+\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}} - e^{\alpha_1+\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}}} \\
& + y_{j3}\frac{e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)} + 2e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\alpha_3(u_i,v_i)+2\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)}}{e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)} - e^{\alpha_2(u_i,v_i)+\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)} + e^{\alpha_3(u_i,v_i)+\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)} + 2e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\alpha_3(u_i,v_i)+2\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)}} \\
& \frac{+e^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+3\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}}}{+e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\alpha_2(u_i,v_i)+\alpha_3(u_i,v_i)+3\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)}}\Bigg\} = 0
\end{aligned}
$$

Selain parameter di atas, juga dilakukan penurunan terhadap $\frac{\partial^2 L^*}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}, \frac{\partial^2 L^*}{\partial\alpha_1\partial\alpha_3}$, $\frac{\partial^2 L^*}{\partial\alpha_1\partial\boldsymbol{\beta}}, \frac{\partial^2 L^*}{\partial\alpha_2^2}, \frac{\partial^2 L^*}{\partial\alpha_2\partial\alpha_3}, \frac{\partial^2 L^*}{\partial\alpha_2\partial\boldsymbol{\beta}}, \frac{\partial^2 L^*}{\partial\alpha_3^2}$, dan $\frac{\partial^2 L^*}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}^T}$ .Hasil turunan parsial pertama yang diperoleh merupakan fungsi nonlinear terhadap parameter yang akan diestimasi sehingga diperlukan suatu metode numerik untuk memperoleh estimasi parameternya. Metode numerik yang dapat digunakan adalah metode iterasi Newton-Raphson. Oleh karena itu diperlukan turunan parsial kedua dari fungsi *ln-likelihood* terhadap parameter yang akan diestimasi. Hasil turunan parsial kedua terhadap parameter yang akan diestimasi sehingga diperoleh :

$$\frac{\partial^2 L^*}{\partial \alpha_1^2} = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \left(y_{j1} + y_{j2} + y_{j3} \right) \frac{e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)}}{\left[1 + e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)} \right]^2} - y_{j2} \frac{e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\alpha_2(u_i,v_i)+2\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)}}{\left[e^{\alpha_2(u_i,v_i)+\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)} - e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)} \right]^2} \right.$$

$$+ y_{j3} \frac{e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\alpha_3(u_i,v_i)+2\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)} - e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\alpha_2(u_i,v_i)+2\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)} + 2e^{\alpha_1(u_i,v_i)+2\alpha_3(u_i,v_i)+3\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)} - 2e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\alpha_2(u_i,v_i)+\alpha_3(u_i,v_i)+3\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)}}{\left(e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)} - e^{\alpha_2(u_i,v_i)+\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)} + e^{\alpha_3(u_i,v_i)+\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)} \right.}$$

$$\left. \frac{+e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\alpha_2(u_i,v_i)+2\alpha_3(u_i,v_i)+4\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)} - e^{\alpha_1(u_i,v_i)+2\alpha_2(u_i,v_i)+\alpha_3(u_i,v_i)+4\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)}}{\left. +2e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\alpha_3(u_i,v_i)+2\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)} + e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\alpha_2(u_i,v_i)+\alpha_3(u_i,v_i)+3\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)} \right)^2} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 L^*}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = \sum_{j=1}^{n} \left\{ y_{j2} \frac{e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\alpha_2(u_i,v_i)+2\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)}}{\left(e^{\alpha_2(u_i,v_i)+\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)} - e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)} \right)^2} + y_{j3} \frac{e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\alpha_2(u_i,v_i)+2\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)}}{\left(e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)} \right.} \right.$$

$$\left. \frac{+2e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\alpha_2(u_i,v_i)+\alpha_3(u_i,v_i)+3\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)} - e^{\alpha_1(u_i,v_i)+2\alpha_2(u_i,v_i)+\alpha_3(u_i,v_i)+4\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)}}{\left. -e^{\alpha_2(u_i,v_i)+\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)} + e^{\alpha_3(u_i,v_i)+\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)} + 2e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\alpha_3(u_i,v_i)+2\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)} + e^{\alpha_1(u_i,v_i)+\alpha_2(u_i,v_i)+\alpha_3(u_i,v_i)+3\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(u_i,v_i)} \right)^2} \right\}$$

Selain kedua parameter di atas, juga dilakukan estimasi terhadap parameter $\dfrac{\partial^2 L^*}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_3}$, $\dfrac{\partial^2 L^*}{\partial \alpha_1 \partial \boldsymbol{\beta}}$, $\dfrac{\partial^2 L^*}{\partial \alpha_2^2}$, $\dfrac{\partial^2 L^*}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_3}$, $\dfrac{\partial^2 L^*}{\partial \alpha_2 \partial \boldsymbol{\beta}}$, $\dfrac{\partial^2 L^*}{\partial \alpha_3^2}$, dan $\dfrac{\partial^2 L^*}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^T}$.

Persamaan yang digunakan dalam proses iterasi Newton-Raphson untuk mendapatkan nilai $\hat{\boldsymbol{\theta}}(u_i,v_i)$ yaitu :

$$\boldsymbol{\theta}^{(t+1)}(u_i,v_i) = \boldsymbol{\theta}^{(t)}(u_i,v_i) - \left[\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\theta}^{(t)}\right)(u_i,v_i) \right]^{-1} \mathbf{q}\left(\boldsymbol{\theta}^{(t)}(u_i,v_i)\right)$$

Proses iterasi Newton-Raphson berhenti jika terpenuhi kondisi konvergen, yaitu selisih $\left\| \boldsymbol{\theta}^{(t+1)}(u_i,v_i) - \boldsymbol{\theta}^{(t)}(u_i,v_i) \right\| \le \varepsilon$, dimana ε adalah bilangan yang sangat kecil. Hasil estimasi yang diperoleh adalah $\boldsymbol{\theta}^{(t+1)}(u_i,v_i)$ pada saat iterasi terakhir.Prosedur iterasi ini diulang untuk setiap lokasi ke-*i*, sehingga akan didapatkan penaksir parameter lokal model GWOLR.

4. SIMPULAN

Parameter model GWOLR dapat diestimasi menggunakan metode maksimum *likelihood* terboboti, yaitu dengan memberikan pembobot geografis yang berbeda untuk setiap lokasi pada fungsi *ln-likelihood*. Estimasi parameter pada lokasi ke-*i* diperoleh dengan

ISBN : 978.602.361.002.0

melakukan turunan parsial pertama terhadap parameter yang akan diestimasi dan kemudian disamakan dengan nol. Hasil turunan parsial pertama yang diperoleh merupakan fungsi nonlinear terhadap parameter yang akan diestimasi sehingga diperlukan suatu metode numerik untuk memperoleh estimasi parameternya. Metode numerik yang dapat digunakan adalah metode iterasi Newton-Raphson. Oleh karena itu diperlukan turunan parsial kedua dari fungsi *ln-likelihood* terhadap parameter yang akan diestimasi.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Agresti, A. (2002). *Categorical Data Analysis* (Second ed.). New York: John Wiley & Sons.

[2] Atkinson, P. M., German, S. E., Sear, D. A., & Clark, M. J. (2003). Exploring the Baltagi, B. H. 2005. *Econometric Analysis of Panel Data*. New York: John Wiley dan Sons.

[3] Fotheringham, A. S., Brunsdon, C., & Charlton, M. (2002). *Geographically Weighted Regression*. UK: John Wiley & Sons.

[4] Nekaya, T., Fotheringham, A. S., Brunsdon, C., & Charlton, M. (2005). Geographically Weighted Poisson Regression for Disease Association. *Mapping Statistics in Medicine, 24*(17), 2695-2717.