PELABELAN HARMONIS GANJIL PADA GABUNGAN GRAF ULAR DAN GRAF ULAR BERLIPAT

Fery Firmansah
Prodi Pendidikan Matematika
FKIP Universitas Widya Dharma Klaten, 57438
Email :feryfirmansah@unwidha.ac.id

Abstrak

Graf $G=(V(G),E(G))$ *dengan* $V(G)$ *adalah himpunan simpul dan* $E(G)$ *adalah himpunan busur disebut sebagai graf* $G(p,q)$ *jika memiliki* $p=|V(G)|$ *simpul dan* $q=|E(G)|$ *busur. Graf* $G(p,q)$ *disebut sebagai graf harmonis ganjil jika terdapat fungsi* $f:V(G)\rightarrow\{0,1,2,\ldots,2q-1\}$ *yang bersifat injektif sedemikian sehingga menginduksi suatu fungsi* $f^*:E(G)\rightarrow\{1,3,5,\ldots,2q-1\}$ *yang bersifat bijektif, yang didefinisikan oleh* $f^*(uv)=f(u)+f(v)$ *dan fungsi* f *disebut sebagai fungsi pelabelan harmonis ganjil dari graf* $G(p,q)$. *Graf ular* kC_4 *dengan* $k\geq 1$ *adalah graf terhubung dengan* k *blok yang memiliki titik potong blok berupa lintasan dan setiap* k *blok isomorfik dengan graf lingkaran* C_4. *Graf* $kC_4\cup kC_4$ *dengan* $k\geq 1$ *adalah gabungan dua graf ular* kC_4 *dengan* $k\geq 1$. Graf *lingkaran berlipat* $C_4(r)$ *dengan* $r\geq 1$ *adalah graf yang dibentuk dari graf lingkaran* C_4 *dengan himpunan simpul* $\{u_0,v_1,v_2,u_1\}$ *dengan menambahkan simpul baru* $w_1^1,w_2^1,\ldots,w_r^1,w_1^2,w_2^2,\ldots,w_r^2$ *yang terhubung dengan simpul* u_0 *dan* u_1.*Graf ular berlipat* $kC_4(r)$ *dengan* $k\geq 1$ *dan* $r\geq 1$ *adalah graf terhubung dengan* k *blok yang memiliki titik potong blok berupa lintasan dan setiap* k *blok isomorfik dengan graf lingkaran berlipat* $C_4(r)$ *dengan* $r\geq 1$. *Pada makalah ini akan diberikan pelabelan harmonis ganjil pada gabungan graf ular* $kC_4\cup kC_4$ *dengan* $k\geq 1$ *dan graf ular berlipat* $kC_4(r)$ *dengan* $k\geq 1$ *dan* $r\geq 1$ *sedemikian sehingga gabungan graf ular* $kC_4\cup kC_4$ *dengan* $k\geq 1$ *dan graf ular berlipat* $kC_4(r)$ *dengan* $k\geq 1$ *dan* $r\geq 1$ *adalah graf harmonis ganjil.*

Kata Kunci: *gabungan graf ular;graf ular berlipat; pelabelan harmonis ganjil; graf harmonis ganjil.*

1. PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang berkembang sangat pesat baik dalam teori maupun aplikasi. Diantara sekian banyaknya topik penelitian teori graf terdapat topik penelitian tentang pelabelan graf yang diperkenalkan oleh Sedlacek pada tahun 1963. Sampai tahun 2015 telah ditemukan banyak hasil riset dari pelabelan graf yang dikumpulkan serta diperbaharui secara teratur oleh Gallian. Dari sisi aplikasi pelabelan graf dapat diaplikasikan dalam berbagai bidang keilmuan diantaranya teori koding, radar, astronomi, desain sirkuit, manajemen data base dan kriptografi (Gallian, 2015).

Pelabelan harmonis ganjil diperkenalkan pertama kali oleh Liang dan Bai pada tahun 2009. Pada makalah ini pembahasan dibatasi untuk graf sederhana, berhingga dan tidak berarah. Graf $G=(V(G),E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan simpul dan $E(G)$ adalah himpunan busur disebut sebagai graf $G(p,q)$ jika memiliki $p=|V(G)|$ simpul dan $q=|E(G)|$ busur. Graf $G(p,q)$ disebut sebagai graf harmonis ganjil jika terdapat fungsi $f:V(G)\rightarrow\{0,1,2,...,2q-1\}$ yang bersifat injektif sedemikian sehingga menginduksi suatu fungsi $f^*:E(G)\rightarrow\{1,3,5,...,2q-1\}$ yang bersifat bijektif, yang didefinisikan oleh $f^*(uv)=f(u)+f(v)$ dan fungsi *f* disebut sebagai fungsi pelabelan harmonis ganjil dari graf $G(p,q)$ (Liang dan Bai, 2009).

Liang dan Bai (2009) telah menunjukkan sifat-sifat graf yang mempunyai pelabelan harmonis ganjil diantaranya jika G adalah graf harmonis ganjil maka G adalah graf bipartit dan jika graf $G(p,q)$ adalah graf harmonis ganjil maka $2\sqrt{q}\le p\le 2q-1$.Dalam makalah yang samaLiang dan Bai (2009) juga telah membuktikan bahwa graf lingkaran C_n adalah graf harmonis ganjil jika dan hanya jika $n\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$, graf komplit K_n adalah graf harmonis ganjil jika dan hanya jika $n=2$, graf komplit k-partit $K(n_1,n_2...,n_k)$ adalah graf harmonis ganjil jika dan hanya jika $k=2$, graf kincir angin K_n^t adalah graf harmonis ganjil jika dan hanya jika $n=2$.

Vaidya dan Shah (2011) membuktikan bahwa graf shadow dan graf split dari graf lintasan P_n dan graf bintang $K_{1,n}$ adalah graf harmonis ganjil. Saputri, Sugeng dan Froncek (2013) membuktikan bahwa graf dumbel $D_{n,k,2}, n\equiv k\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$ dan $n\equiv k\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$ dan graf $C_n\Theta K_1, n\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$ adalah graf harmonis ganjil, graf $C_n\times P_m$ adalah graf harmonis ganjil jika dan hanya jika $n\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$. Abdel-Aal (2014) membuktikan bahwa graf yang dibentuk dari dua copy graf lingkaran C_n genap dengan satu busur persekutuan, dua copy graf lingkaran $C_n, n\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$ dengan satu simpul persekutuan adalah graf harmonis ganjil. Firmansah dan Sugeng (2015) membuktikan bahwa graf kincir angin belanda $C_4^{(k)}$ dengan $k\ge 1$ dan gabungan graf kincir angin belanda $C_4^{(k)}\cup C_4^{(k)}$ dengan $k\ge 1$adalah graf harmonis ganjil.

Alyani, Firmansah, Giyarti dan Sugeng (2013) membuktikan bahwa graf ular kC_4 dengan $k\ge 1$, graf ular kC_8 dengan $k\ge 1$dan graf gelang $C_4{}^{+(1,k)}$ dengan $k\ge 1$ adalah graf harmonis ganjil. Pada makalah ini penulis melanjutkan penelitian tersebut untuk gabungan graf ular $kC_4\cup kC_4$ dengan $k\ge 1$ dan graf ular berlipat $kC_4(r)$ dengan $k\ge 1$ dan $r\ge 1$ dan akan ditunjukan bahwa gabungan graf ular $kC_4 \cup kC_4$ dengan $k \geq 1$dan graf ular berlipat $kC_4(r)$dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ memenuhi fungsi pelabelan harmonis ganjil sedemikian sehingga gabungan graf ular $kC_4 \cup kC_4$ dengan $k \geq 1$dan graf ular berlipat $kC_4(r)$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$adalah graf harmonis ganjil.

2. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur dengan mempelajari makalah ilmiah dan buku-buku yang berkaitan dengan topik penelitian. Selanjutnya hasil studi literatur tersebut digunakan sebagai landasan teori untuk mendapatkan pelabelan harmonis ganjil pada gabungan graf ular $kC_4 \cup kC_4$ dengan $k \geq 1$dan graf ular berlipat $kC_4(r)$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ Berikut diberikan langkah-langkah yang dilakukan.

1. Melakukan kajian dan analisauntuk memahami definisi pelabelan harmonis ganjil beserta sifat-sifatnya.
2. Membuat definisi, notasi simpul dan kontruksi dari gabungan graf ular $kC_4 \cup kC_4$ dengan $k \geq 1$dan graf ular berlipat $kC_4(r)$ dengan $k \geq 1$dan $r \geq 1$.
3. Mendefinisikanfungsi pelabelan simpul dan pelabelan busur pada gabungan graf ular $kC_4 \cup kC_4$ dengan $k \geq 1$dan graf ular berlipat $kC_4(r)$ dengan $k \geq 1$dan $r \geq 1$.
4. Membuat teoremapelabelan harmonis ganjilpada gabungan graf ular $kC_4 \cup kC_4$ dengan $k \geq 1$dan graf ular berlipat $kC_4(r)$ dengan $k \geq 1$dan $r \geq 1$.
5. Melakukan pembuktian teorema yang diperoleh secara matematis.

3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

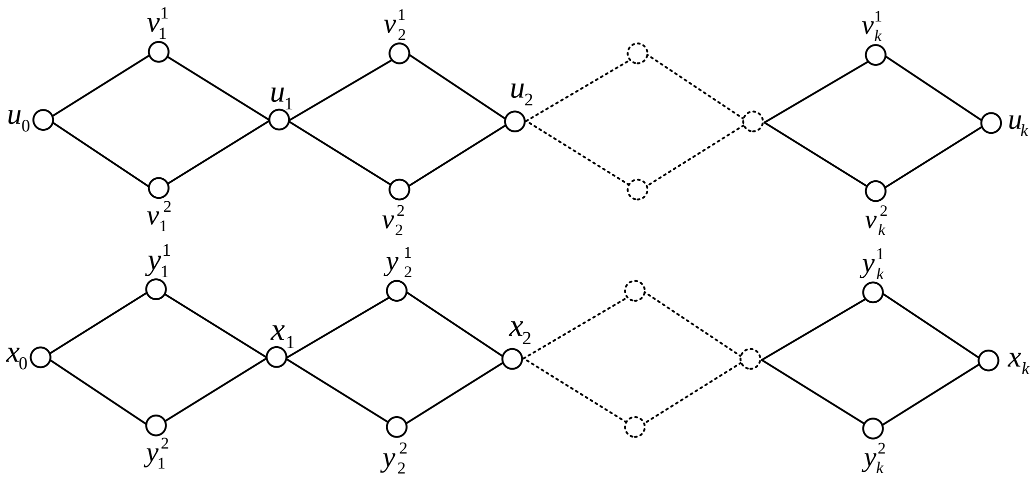
a. Definisi dan kontruksi dari gabungan graf ular

Berikut diberikan definisi dari graf ular kC_4 dengan $k \geq 1$ dan gabungan graf ular $kC_4 \cup kC_4$dengan $k \geq 1$. Selanjutnya didefinisikan himpunan simpul dan himpunan busur dari graf ular kC_4 dengan $k \geq 1$ dan gabungan graf ular $kC_4 \cup kC_4$dengan $k \geq 1$.

Definisi 1. *Graf ular kC_4 dengan $k \geq 1$ adalah graf terhubung dengan k blok yang memiliki titik potong blok (block-cut point) berupa lintasan dan setiap k blok isomorfik dengan graf lingkaran C_4* (Gallian, 2015).

Definisi 2. *Graf $kC_4 \cup kC_4$ dengan $k \geq 1$adalah gabungan dua graf ular kC_4 dengan $k \geq 1$.*

Notasi simpul dan kontruksi dari gabungan graf ular $kC_4 \cup kC_4$ dengan $k \geq 1$ diberikan pada Gambar 1 sebagai berikut.



Gambar 1. Notasi simpul dan kontruksi dari gabungan graf ular $kC_4 \cup kC_4$ dengan $k \geq 1$.

Berdasarkan notasi simpul dan kontruksi pada Gambar 1 didefinisikan himpunan simpul dan himpunan busur dari gabungan graf ular $kC_4 \cup kC_4$ dengan $k \geq 1$ adalah

$$V(kC_4 \cup kC_4) = \{u_i | 0 \leq i \leq k\} \cup \{v_i^j | 1 \leq i \leq k,\ j = 1,2\}$$
$$\cup \{x_i | 0 \leq i \leq k\} \cup \{y_i^j | 1 \leq i \leq k,\ j = 1,2\} \text{dan}$$
$$E(kC_4 \cup kC_4) = \{u_i v_{(i+1)}^j | 0 \leq i \leq k-1,\ j = 1,2\} \cup \{v_i^j u_i | 1 \leq i \leq k,\ j = 1,2\}$$
$$\cup \{x_i y_{(i+1)}^j | 0 \leq i \leq k-1,\ j = 1,2\} \cup \{y_i^j x_i | 1 \leq i \leq k,\ j = 1,2\}.$$

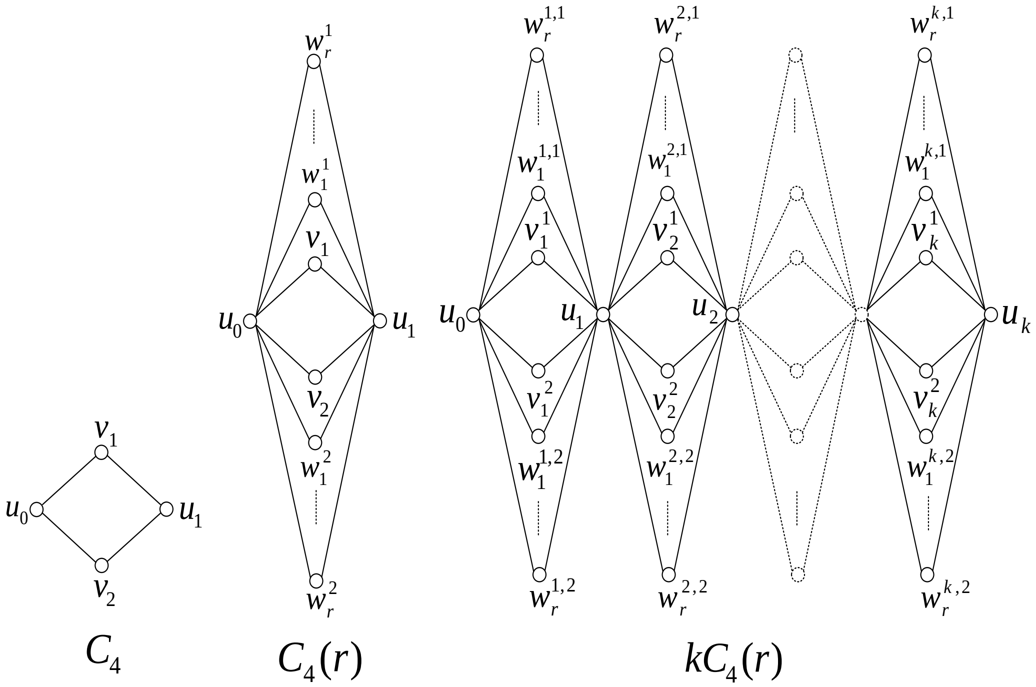
b. Definisi dan kontruksi dari graf ular berlipat

Berikut diberikan definisi dari graf lingkaran berlipat $C_4(r)$ dengan $r \geq 1$ dan graf ular berlipat $kC_4(r)$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$. Selanjutnya didefinisikan himpunan simpul dan himpunan busur dari graf lingkaran berlipat $C_4(r)$ dengan $r \geq 1$ dan graf ular berlipat $kC_4(r)$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$.

Definisi 3. Graf *lingkaran berlipat* $C_4(r)$ *dengan* $r \geq 1$ *adalah graf yang dibentuk dari graf lingkaran* C_4 *dengan himpunan simpul* $\{u_0, v_1, v_2, u_1\}$ *dengan menambahkan simpul baru* $w_1^1, w_2^1, ..., w_r^1, w_1^2, w_2^2, ..., w_r^2$ *yang terhubung dengan simpul* u_0 *dan* u_1.

Definisi 4. *Graf ular berlipat* $kC_4(r)$ *dengan* $k \geq 1$ *dan* $r \geq 1$ *adalah graf terhubung dengan* k *blok yang memiliki titik potong blok berupa lintasan dan setiap* k *blok isomorfik dengan graf lingkaran berlipat* $C_4(r)$ *dengan* $r \geq 1$.

Notasi simpul dan kontruksi dari graf lingkaran C_4, graf lingkaran berlipat $C_4(r)$ dengan $r \geq 1$ dan graf ular berlipat $kC_4(r)$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ diberikan pada Gambar 2 sebagai berikut.



Gambar 2. Notasi simpul dan kontruksi dari graf lingkaran C_4, graf lingkaran berlipat $C_4(r)$dengan $r \geq 1$ dan graf ular berlipat $kC_4(r)$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$.

Berdasarkan notasi simpul dan kontruksi pada Gambar 2 didefinisikan himpunan simpul dan himpunan busur dari graf ular berlipat $kC_4(r)$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ adalah

$$V(kC_4(r)) = \{u_i | 0 \leq i \leq k\} \cup \{v_i^j | 1 \leq i \leq k, j = 1,2\}$$
$$\cup \{w_s^{i,j} | 1 \leq i \leq k, 1 \leq s \leq r, j = 1,2\} \text{dan}$$
$$E(kC_4(r)) = \{u_i v_{(i+1)}^j | 0 \leq i \leq k-1, j = 1,2\} \cup \{v_i^j u_i | 1 \leq i \leq k, j = 1,2\}$$
$$\cup \{u_i w_s^{(i+1),j} | 0 \leq i \leq k-1, 1 \leq s \leq r, j = 1,2\}$$
$$\cup \{w_s^{i,j} u_i | 1 \leq i \leq k, 1 \leq s \leq r, j = 1,2\}.$$

c. Pelabelan harmonis ganjil pada gabungan graf ular

Berikut diberikan sifat yang menyatakan bahwa gabungan graf ular $kC_4 \cup kC_4$ dengan $k \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil, selanjutnya diberikan beberapa contoh untuk memperjelas sifat tersebut.

Teorema 1. *Graf ular* kC_4 *dengan* $k \geq 1$*adalah graf harmonis ganjil* (Alyani, Firmansah, Giyarti dan Sugeng, 2013).

Teorema2.*Gabungan graf ular* $kC_4 \cup kC_4$ *dengan* $k \geq 1$*adalah graf harmonis ganjil*.

Bukti. Misalkan $kC_4 \cup kC_4$ adalah gabungan graf ular dengan $k \geq 1$. Himpunan simpul dan himpunan busur dari $kC_4 \cup kC_4$ dengan $k \geq 1$ adalah

$$V(kC_4 \cup kC_4) = \{u_i | 0 \leq i \leq k\} \cup \{v_i^j | 1 \leq i \leq k, j = 1,2\}$$
$$\cup \{x_i | 0 \leq i \leq k\} \cup \{y_i^j | 1 \leq i \leq k, j = 1,2\} \text{dan}$$
$$E(kC_4 \cup kC_4) = \{u_i v_{(i+1)}^j | 0 \leq i \leq k-1, j = 1,2\} \cup \{v_i^j u_i | 1 \leq i \leq k, j = 1,2\}$$
$$\cup \{x_i y_{(i+1)}^j | 0 \leq i \leq k-1, j = 1,2\} \cup \{y_i^j x_i | 1 \leq i \leq k, j = 1,2\}.$$

maka $p = |V(kC_4 \cup kC_4)| = 6k + 2$ dan $q = |E(kC_4 \cup kC_4)| = 8k$.

Definisikan fungsi pelabelan simpul $f : V(kC_4 \cup kC_4) \rightarrow \{0,1,2,3,\ldots,16k-1\}$ sebagai berikut :

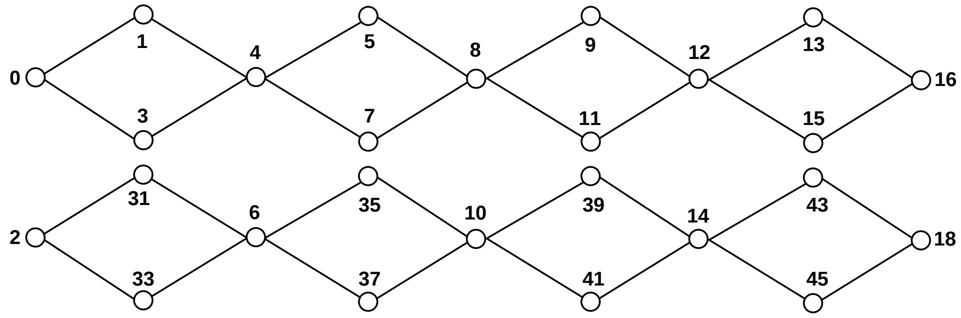
$$f(u_i) = 4i, 0 \leq i \leq k$$
$$f(v_i^j) = 4i + 2j - 5, 1 \leq i \leq k, j = 1,2$$
$$f(x_i) = 4i + 2, 0 \leq i \leq k$$
$$f(y_i^j) = 8k + 4i + 2j - 7, 1 \leq i \leq k, j = 1,2$$

Fungsi pelabelan simpul f akan menginduksi pelabelan busur $f^* : E(kC_4 \cup kC_4) \rightarrow \{1,3,5,7,\ldots,16k-1\}$ yang didefinisikanoleh $f^*(uv) = f(u) + f(v)$, sehingga didapatkan fungsi pelabelan busur sebagai berikut :

$$f^*(u_i v_{(i+1)}^j) = 8i + 2j - 1, 0 \leq i \leq k-1, j = 1,2$$
$$f^*(v_i^j u_i) = 8i + 2j - 5, 1 \leq i \leq k, j = 1,2$$
$$f^*(x_i y_{(i+1)}^j) = 8k + 8i + 2j - 1, 0 \leq i \leq k-1, j = 1,2$$
$$f^*(y_i^j x_i) = 8k + 8i + 2j - 5, 1 \leq i \leq k, j = 1,2$$

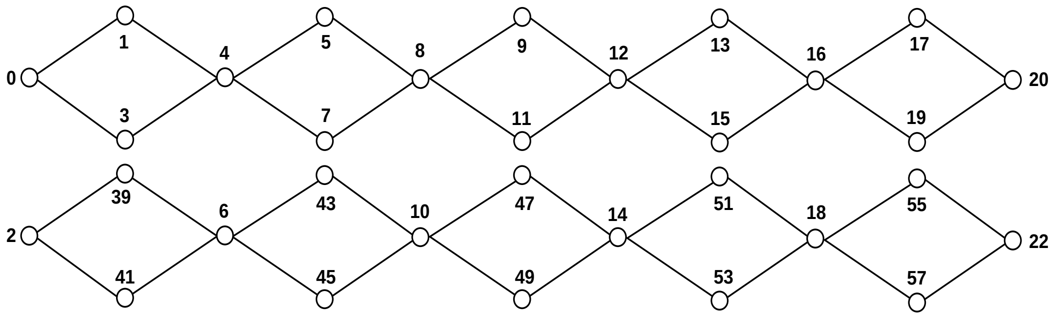
Dapat ditunjukkan bahwa fungsi f memenuhi pemetaan injektif sedemikian sehingga menginduksi fungsi f^* yang bijektif. Akibatnya gabungan graf ular $kC_4 \cup kC_4$ dengan $k \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil ■

Contoh 1. Pada Gambar 3 dan Gambar 4 diberikan contoh pelabelan harmonis ganjil pada gabungan graf ular $4C_4 \cup 4C_4$ dan gabungan graf ular $5C_4 \cup 5C_4$.



$4C_4 \cup 4C_4$

Gambar 3. Pelabelan harmonis ganjil pada gabungan graf ular $4C_4 \cup 4C_4$.



$5C_4 \cup 5C_4$

Gambar 4. Pelabelan harmonis ganjil pada gabungan graf ular $5C_4 \cup 5C_4$.

d. Pelabelan harmonis ganjil pada graf ular berlipat

Berikut diberikan sifat yang menyatakan bahwa graf ular berlipat $kC_4(r)$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil, selanjutnya diberikan beberapa contoh untuk memperjelas sifat tersebut.

Teorema3.*Graf ular berlipat $kC_4(r)$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil.*

Bukti. Misalkan $kC_4(r)$ adalah graf ular berlipat dengan $k \geq 1$dan $r \geq 1$.
Himpunan simpul dan himpunan busur dari $kC_4(r)$ dengan $k \geq 1$dan $r \geq 1$ adalah

$$V(kC_4(r)) = \{u_i | 0 \leq i \leq k\} \cup \{v_i^j | 1 \leq i \leq k, j = 1,2\}$$
$$\cup \{w_s^{i,j} | 1 \leq i \leq k, 1 \leq s \leq r, j = 1,2\} \text{dan}$$
$$E(kC_4(r)) = \{u_i v_{(i+1)}^j | 0 \leq i \leq k-1, j = 1,2\} \cup \{v_i^j u_i | 1 \leq i \leq k, j = 1,2\}$$
$$\cup \{u_i w_s^{(i+1),j} | 0 \leq i \leq k-1, 1 \leq s \leq r, j = 1,2\}$$
$$\cup \{w_s^{i,j} u_i | 1 \leq i \leq k, 1 \leq s \leq r, j = 1,2\}.$$

maka $p = |V(kC_4(r))| = 2rk + 4k - 1$ dan $q = |E(kC_4(r))| = 4rk + 4k$.

Definisikan fungsi pelabelan simpul $f : V(kC_4(r)) \to \{0,1,2,3,\ldots,8rk + 8k - 1\}$ sebagai berikut:

$$f(u_i) = 4i, 0 \le i \le k$$

$$f(v_i^j) = 4i + 2j - 5, 1 \le i \le k,\ j = 1,2$$

$$f(w_s^{i,j}) = 8sk + 4i + 2j - 5, 1 \le i \le k, 1 \le s \le r,\ j = 1,2$$

Fungsi pelabelan simpul f akan menginduksi pelabelan busur $f^* : E(kC_4(r)) \to \{1,3,5,7,\ldots,8rk + 8k - 1\}$ yang didefinisikanoleh $f^*(uv) = f(u) + f(v)$, sehingga didapatkan fungsi pelabelan busur sebagai berikut :

$$f^*(u_i v_{(i+1)}^j) = 8i + 2j - 1, 0 \le i \le k-1,\ j = 1,2$$

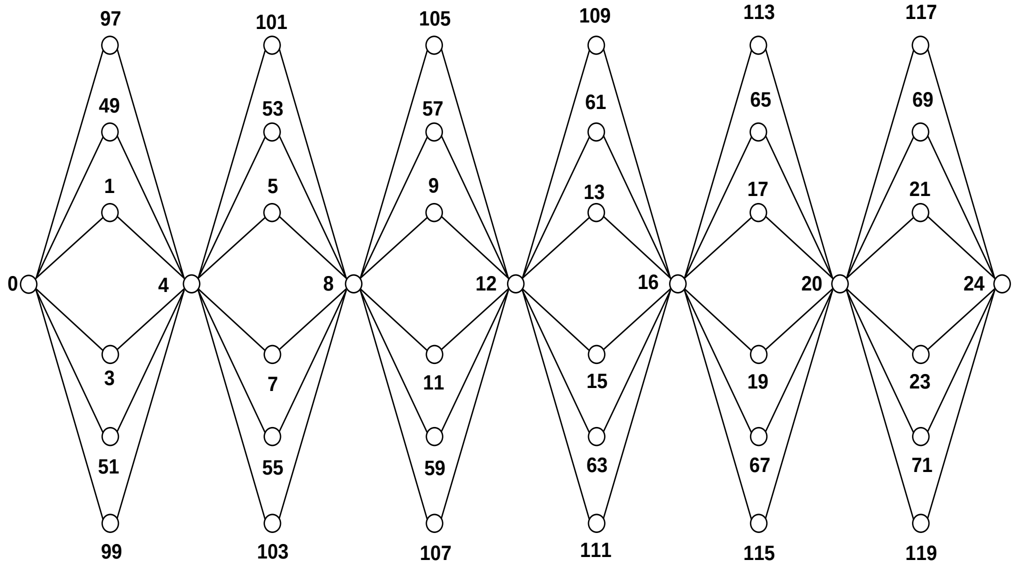
$$f^*(v_i^j u_i) = 8i + 2j - 5, 1 \le i \le k,\ j = 1,2$$

$$f^*(u_i w_s^{(i+1),j}) = 8sk + 8i + 2j - 1, 0 \le i \le k-1, 1 \le s \le r,\ j = 1,2$$

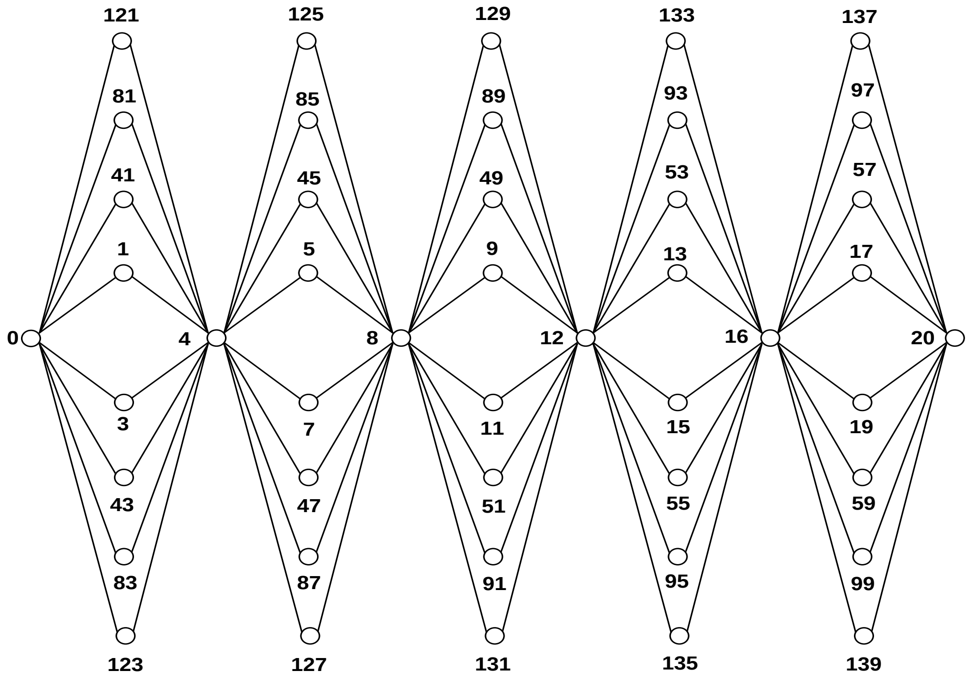
$$f^*(w_s^{i,j} u_i) = 8sk + 8i + 2j - 5, 1 \le i \le k, 1 \le s \le r,\ j = 1,2$$

Dapat ditunjukkan bahwa fungsi f memenuhi pemetaan injektif sedemikian sehingga menginduksi fungsi f^* yang bijektif. Akibatnya graf ular berlipat $kC_4(r)$ dengan $k \ge 1$ dan $r \ge 1$ adalah graf harmonis ganjil ■

Contoh 2. Pada Gambar 5 dan Gambar 6 diberikan contoh pelabelan harmonis ganjil dari graf ular berlipat $6C_4(2)$ dan graf ular berlipat $5C_4(3)$.



Gambar 5. Pelabelan harmonis ganjil pada graf ular berlipat $6C_4(2)$.



Gambar 6. Pelabelan harmonis ganjil pada graf ular berlipat $5C_4(3)$.

4. SIMPULAN

Pada makalah ini telah dikonstruksikan pelabelan harmonis ganjil untukgabungan graf ular $kC_4 \cup kC_4$ dengan $k \geq 1$dan graf ular berlipat $kC_4(r)$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$sedemikian sehingga gabungan graf ular $kC_4 \cup kC_4$ dengan $k \geq 1$dan graf ular berlipat $kC_4(r)$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil. Saat ini penulis sedang memperluas kasus tersebut untuk kelas graf yang lain yaitu gabungan graf ular berlipat $kC_4(r) \cup kC_4(r)$dengan $k \geq 1$dan $r \geq 1$. Lebih lanjut karena pelabelan harmonis ganjil masih relatif baru maka tidak menutup kemungkinan penelitian ini dilanjutkan untuk mendapatkan pelabelan harmonis ganjil pada kelas graf yang lain.

5. DAFTAR PUSTAKA

Abdel-Aal, M. E. (2014). New Families of Odd Harmonious Graphs. *International Journal of Soft Computing, Mathematics and Control*,**3**(1), 1-13. Diakses dari http://wireilla.com/ns/maths/Papers/3114ijscmc01.pdf

Alyani, F., Firmansah, F., Giyarti, W., dan Sugeng, K. A. (2013). The Odd Harmonious Labeling of kCn-Snake Graphs for Spesific Values of n, that is, for n = 4 and n = 8. *IndoMS International Conference on Mathemathics and Its Applications*, UGM, 6-7 November 2013(hal. 225-230). Yogyakarta: Indonesian Mathematical Society. Diakses dari http://indoms.org/file/download/prosiding/ProceedingIICMA2013.pdf

Firmansah, F.,dan Sugeng, K. A. (2015). Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Kincir Angin Belanda dan Gabungan Graf Kincir Angin Belanda. *Magistra*, No 94 Th. XXVII, ISSN 0215-9511, 56-92

Gallian, J. A. (2015). A Dynamic Survey of Graph Labeling.*The Electronic Journal of Combinatorics*, **18**. #DS6. Diakses dari http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/viewFile/DS6/pdf

Liang, Z.,danBai, Z. (2009). On The Odd Harmonious Graphs with Applications, *J. Appl. Math. Comput*.,**29**, 105-116. doi:10.1007/s12190-008-0101-0

Saputri, G. A., Sugeng, K. A., dan Froncek, D. (2013). The Odd Harmonious Labeling of Dumbbell and Generalized Prims Graphs, *AKCE Int, J. Graphs Comb*., **10**(2), 221-228.Diakses dari http://www.akcejournal.org/contents/vol10no2/pdf%20images/vol10no2-10.pdf

Vaidya, S. K., dan Shah, N.H. (2011). Some New Odd Harmonious Graphs.*International Journal of Mathematics and Soft Computing*, **1**(1), 9-16.
Diakses dari http://ijmsc.com/index.php/ijmsc/article/download/10/pdf