OPTIMISASI BERKENDALA MENGGUNAKAN METODE GRADIEN TERPROYEKSI

Nida Sri Utami
Universitas Muhammadiyah Surakarta
nidaruwiyati@gmail.com

ABSTRAK . Dalam tulisan ini dibahas tentang metode gradien terproyeksi untuk menyelesaikan masalah optimisasi berkendala dengan kendala yang berbentuk persamaan linear. Pembahasan dimulai dengan memperkenalkan metode gradien untuk menyelesaikan masalah optimisasi tanpa kendala, kemudian metode gradien tersebut digeneralisasikan untuk menyelesaikan masalah optimisasi yang meminimumkan $f(x)$ dengan kendala $Ax = b$, dan $f : R^n \to R, A \in R^{mxn}, m < n$, *rank A=m,* $b \in R^{mx1}$, $x \in R^{nx1}$, dengan menambahkan suatu proyektor orthogonal $P = I_n - A^t(AA^t)^{-1}A$.Pada algoritma $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k \nabla f(x^{(k)})$, diperoleh algoritma gradien terproyeksi $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k P\nabla f(x^{(k)})$ dengan $\alpha_k \geq 0$ yang merupakan ukuran langkah. Ukuran langkah yang digunakan adalah $\alpha_k = \arg_{\alpha \geq 0} \min f(x^{(k)} - \alpha P\nabla f(x^{(k)}))$, yaitu $\alpha \geq 0$ yang meminimumkan $f(x^{(k)} - \alpha P\nabla f(x^{(k)}))$, dapat dicari menggunakan metode Secant. Algoritma gradien ini dapat dihentikan jika memenuhi kondisi $P\nabla f(x^{(k)}) = 0$, dengan kata lain jika $P\nabla f(x^{(k)}) = 0$, maka titik $x^{(k)}$ merupakan titik peminimal dan merupakan titik peminimal global untuk fungsi *f* yang konveks.

Kata Kunci: *fungsi konveks , metode gradient ; metode secant; proyektor orthogonal.*

1. PENDAHULUAN

Salah satu metode yang digunakan untuk mencari nilai optimal dari suatu masalah optimisasi tanpa kendala adalah metode gradien. Disajikan bentuk umum optimisasi dari permasalahan meminimumkan $f(x)$ dengan $f : R^n \to R$ dan $x \in R^{nx1}$. Pada metode gradien besarnya perubahan nilai x sangat ditentukan oleh besarnya nilai gradien dari fungsi *f*, yaitu

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k \nabla f(x^{(k)})$$

dengan α_k yang merupakan suatu ukuran langkah . Pemilihan ukuran langkah α_k berdasarkan pada algoritma gradien tertentu. Pada algoritma steepest descent, ukuran langkah yang digunakan

$$\alpha_k = \arg_{\alpha \geq 0} \min f(x^{(k)} - \alpha \nabla f(x^{(k)})),$$

yaitu $\alpha \geq 0$ yang meminimumkan $f(x^{(k)} - \alpha \nabla f(x^{(k)}))$, dicari menggunakan metode Secant.

Pada penelitian ini metode gradien akan dimodifikasi menjadi metode gradien terproyeksi untuk menyelesaikan masalah optimisasi yang mempunyai bentuk umum permasalahan meminimumkan $f(x)$ dengan kendala $Ax = b$, dan $f : R^n \to R, A \in R^{mxn}, m < n$, *rank A=m,* $b \in R^{mx1}$,

$x \in R^{nx1}$.Digunakan suatu proyektor orthogonal P yang berbentuk $P = I_n - A^t(AA^t)^{-1}A$ karena kendalanya berbentuk persamaan $Ax = b$. Algoritma metode gradien dimodifikasi menjadi metode gradien terproyeksi yang mempunyai algoritma $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k P\nabla f(x^{(k)})$, dengan $\alpha_k = \arg_{\alpha \geq 0} \min f(x^{(k)} - \alpha P\nabla f(x^{(k)}))$, yaitu $\alpha \geq 0$ yang meminimumkan $f(x^{(k)} - \alpha P\nabla f(x^{(k)}))$, dicari menggunakan metode Secant.

Penelitian ini dimaksudkan untuk memperkenalkan suatu metode gradien yang telah dimodifikasi menjadi metode gradien terproyeksi untuk menyelesaikan masalah optimisasi berkendala yang berupa persamaan linear.

Pada penelitian ini penulis membatasi pada penyelesaian masalah optimisasi. Masalah optimisasi yang akan dibahas adalah masalah optimisasi pada fungsi konveks yang berkendala. Selain itu kendala yang akan digunakan adalah kendala yang berbentuk persamaan linear. Selain itu penelitian ini hanya bekerja pada bilangan real. Masalah optimisasi fungsi konveks dengan kendala berupa persamaan linear akan diselesaikan menggunakan metode gradien terproyeksi.

Berikut beberapa definisi yang akan digunakan pada pembahasan

Definisi 2.27 *Diketahui V ruang inner produk atas R dan* $u, v \in V$ *. Norma dari v, ditulis* $\|v\|$*, didefinisikan* $\|v\| = \sqrt{< v, v >}$ *dan jarak antara* u *dan* v *, ditulis d(u,v), didefinisikan sebagai* $d(u,v) = \|u - v\| = \sqrt{< u - v, u - v >}$.

Teorema 2.28 (*Ketidaksamaan Cauchy-Schwarz*) *Jika* $u, v \in V$ *ruang inner produk atas R, maka*

$$|< u, v >| \leq \|u\|\,\|v\|. \qquad (2.3)$$

Definisi 2.44 *Diketahui suatu fungsi f yang terdefinisi pada suatu interval I.*

a. *Fungsi f dikatakan mencapai maksimum lokal (maksimum relatif) di* $x^* \in I$ *jik4a ada interval terbuka* $(a,b) \subset I$ *sehingga* $x^* \in (a,b)$ *dan* $f(x^*) \geq f(x)$ *untuk setiap* $x \in (a,b)$. *Selanjutnya titik* $(x^*, f(x^*))$ *disebut titik maksimum lokal (relatif).*
b. *Fungsi f dikatakan mencapai minimum lokal (minimum relatif) di* $x^* \in I$ *jika ada interval terbuka* $(a,b) \subset I$ *sehingga* $x^* \in (a,b)$ *dan* $f(x^*) \leq f(x)$ *untuk setiap* $x \in (a,b)$. *Selanjutnya titik* $(x^*, f(x^*))$ *disebut titik minimum lokal (relatif).*

Teorema 2.46 *Diketahui fungsi* $f : [a,b] \to R$. *Jika fungsi f mencapai maksimum(minimum) lokal di* x_0 *maka* $f'(x_0) = 0$ *atau* $f'(x_0)$ *tidak ada.*

Teorema 2.47 (Teorema Rolle) *Diketahui fungsi* $f:[a,b]\rightarrow R$. *Jika f kontinu pada* $[a,b]$, $f'(x)$ *ada di setiap* $x\in(a,b)$ *dan* $f(a)=f(b)=0$ *maka terdapat* $x_0\in(a,b)$ *sehingga* $f'(x_0)=0$.

Definisi 2.50 ***Arah Fisibel.*** *Sebuah vektor* $d\in R^n$, $d\neq 0$, *disebut arah fisibel pada* $x\in\Omega$ *jika terdapat* $\alpha_0>0$ *sehingga* $x+\alpha d\in\Omega$ *untuk setiap* $\alpha\in[0,\alpha_0]$.

Definisi 2.51 *Diketahui* $f:R^n\rightarrow R$ *dan* $\Omega\subseteq R^n$ *merupakan himpunan arah fisibel. Titik* $x^*\in\Omega$ *disebut peminimal lokal dari fungsi f atas* Ω *jika terdapat* $\varepsilon>0$ *sehingga berlaku* $f(x)\geq f(x^*)$, *untuk setiap* $x\in\Omega-\{x^*\}$ *dengan* $\|x-x^*\|<\varepsilon$.

Definisi 2.52 *Diketahui* $f:R^n\rightarrow R$ *dan* $\Omega\subseteq R^n$ *merupakan himpunan arah fisibel.. Titik* $x^*\in\Omega$ *disebut peminimal global dari fungsi f atas* Ω *jika* $f(x^*)\leq f(x)$, *untuk setiap* $x\in\Omega-\{x^*\}$.

Definisi 2.53 *Diketahui* $f:R^n\rightarrow R$ *dan d merupakan arah fisibel pada* $x\in\Omega$. *Derivatif berarah dari fungsi f pada arah d, dinotasikan dengan* $\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}$, *merupakan nilai fungsi real yang didefinisikan*

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{f(x+\alpha d)-f(x)}{\alpha}\ . \qquad (2.12)$$

Karena *x* dan *d* diberikan maka $f(x+\alpha d)$ dapat dipandang sebagai fungsi dari variabel α, akibatnya

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{f(x+\alpha d)-f(x)}{\alpha}\Leftrightarrow\frac{\partial f(x)}{\partial\alpha}=\frac{df(x+\alpha d)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}$$

$$=Df(x).d \quad =\nabla f(x)^t d$$

$$=d^t.\nabla f(x) \quad =<\nabla f(x),d>. \qquad (2.13)$$

Jika *d* adalah vektor satuan dengan $\|d\|=1$, maka $<\nabla f(x),d>$ merupakan nilai kenaikan fungsi *f* pada arah *d* di titik *x*.

Teorema 2.54 Syarat Perlu Order Pertama (SPOP). *Diketahui* $\Omega\subset R^n$. *Dengan* $f:\Omega\rightarrow R$ *fungsi bernilai real pada* Ω. *Jika* $x^*\in R^n$ *peminimal lokal fungsi f pada* Ω, *maka untuk setiap arah fisibel d pada x*, diperoleh bentuk* $d^t\nabla f(x^*)\geq 0$.

Akibat Teorema 2.54 *Diketahui* $\Omega \subset R^n$, $f: \Omega \to R$. *Jika x* adalah sebuah peminimal lokal fungsi f pada* Ω *dengan x* titik dalam* Ω, *maka* $\nabla f(x^*) = 0$.

Dalam mencari nilai peminimal dari fungsi f yang merupakan fungsi satu variabel bernilai real α, dapat dimulai dengan memberikan nilai awal α_k yang kemudian digunakan untuk mencari nilai $f(\alpha_k),\ f'(\alpha_k),\ f''(\alpha_k)$. algoritma

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{f'(\alpha_k) - f'(\alpha_{k-1})} f'(\alpha_k) \qquad (2.20)$$

disebut Metode Secant.

Algoritma (2.20) dihentikan jika $|\alpha_{k+1} - \alpha_k| < \varepsilon$. Dengan kata lain α_{k+1} merupakan peminimal dari fungsi *f.*

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan cara mempelajari tentang masalah optimisasi berkendala, kondisi Lagrange dan proyektor orthogonal, kemudian memodifikasi metode gradien menjadi metode gradien terproyeksi untuk menyelesaikan masalah optimisasi berkendala dengan menambahkan suatu proyektor orthogonal.Membuat program komputer untuk menyelesaikan masalah optimisasi dengan kendala menggunakan metode gradien terproyeksi, kemudian m emberi contoh masalah optimisasi fungsi konveks dengan kendala persamaan linear, kemudian menyelesaikannya dengan menggunakan program komputer.

3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini disajikan masalah optimisasi fungsi konveks berkendala persamaan linear yang mempunyai bentuk umum optimisasi dari permasalahan meminimumkan $f(x)$ dengan kendala $Ax = b$, dan $f: R^n \to R, A \in R^{mxn}, m < n$, *rank A=m, b*$\in R^{mx1}$, $x \in R^{nx1}$. Pertama disajikan metode gradien yang mempunyai bentuk umum meminimumkan $f(x)$ dengan $f: R^n \to R$ dan $x \in R^{nx1}$. Dengan menggunakan metode gradien diperoleh

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k \nabla f(x^{(k)})$$

dengan $\alpha_k = \arg_{\alpha\geq 0} \min f(x^{(k)} - \alpha \nabla f(x^{(k)}))$, yaitu nilai $\alpha \geq 0$ yang meminimumkan $f(x^{(k)} - \alpha \nabla f(x^{(k)}))$, yang dicari menggunakan metode Secant .

Metode gradien tersebut dimodifikasi menjadi metode gradien terproyeksi untuk menyelesaikan masalah optimisasi berkendala berupa persamaan linear dengan menambahkan suatu proyektor orthogonal P yang didefinisikan

$$P = I_n - A^t (AA^t)^{-1} A,$$

sehingga dapat diperoleh algoritma $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k P \nabla f(x^{(k)})$
dengan $\alpha_k = \arg_{\alpha\geq 0} \min f(x^{(k)} - \alpha P \nabla f(x^{(k)}))$, yaitu $\alpha \geq 0$ yang meminimumkan $f(x^{(k)} - \alpha P \nabla f(x^{(k)}))$ yang dicari menggunakan metode Secant.

Diberikan $f : R^n \to R$ dan $d \in R^n, d \neq 0$ yang merupakan arah fisibel pada $x \in \Omega$. Menurut Definisi 2.52 diperoleh $< \nabla f(x), d >$ merupakan nilai kenaikan fungsi f pada arah d di titik x. Jika diambil $\|d\| = 1$, dan menurut Teorema 2.28 diperoleh

$$< \nabla f(x), d > \ \leq \|\nabla f(x)\| \, \|d\| = \|\nabla f(x)\|.1 = \|\nabla f(x)\|. \qquad (3.1)$$

Jika $d = \dfrac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ maka diperoleh

$$\left\langle \nabla f(x), \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|} \right\rangle = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2} = \|\nabla f(x)\|.$$

(3.2)

Dengan kata lain arah pada titik $\nabla f(x)$ merupakan arah yang menyebabkan nilai kenaikan maksimum fungsi *f* pada *x*, sehingga arah pada titik $-\nabla f(x)$ merupakan arah yang menyebabkan nilai penurunan maksimum fungsi *f* pada *x*. Jadi arah dari gradien yang negatif merupakan arah yang paling tepat untuk mencari peminimal dari fungsi *f*.

Diberikan $x^{(0)}$ yang merupakan titik awal, dan diberikan titik $x^{(0)} - \alpha \nabla f(x^{(0)})$. Dari Teorema 2.49 deret Taylor untuk fungsi f di sekitar $x^{(0)}$ diperoleh

$$f(x^{(0)} - \alpha \nabla f(x^{(0)})) \quad = f(x^{(0)}) - \alpha \left\| \nabla f(x^{(0)}) \right\|^2 + \vartheta(\alpha).$$

(3.3)

Akibatnya, jika $\nabla f(x^{(0)}) \neq 0$, maka untuk suatu $\alpha > 0$ yang sangat kecil diperoleh bentuk

$$f(x^{(0)} - \alpha \nabla f(x^{(0)})) < f(x^{(0)}). \qquad (3.4)$$

Dengan kata lain titik $x^{(0)} - \alpha \nabla f(x^{(0)})$ merupakan perbaikan dari titik $x^{(0)}$ untuk menjadi peminimal dari fungsi *f*.

Untuk membentuk algoritma yang merupakan penerapan dari ide di atas, misalkan diberikan titik $x^{(k)}$ sebagai titik awal. Titik berikutnya, yaitu titik $x^{(k+1)}$ dapat diperoleh dengan menggeser titik $x^{(k)}$ sebesar $-\alpha_k \nabla f(x^{(k)})$ dengan α_k merupakan skalar positif yang disebut dengan ukuran langkah. Akibatnya diperoleh algoritma iterasi

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k \nabla f(x^{(k)}). \quad (3.5)$$

Bentuk algoritma (3.5) disebut algoritma penurunan gradien atau algoritma gradien. ■

Pemilihan α_k pada algoritma gradien sangat mempengaruhi kelakuan algoritma. Untuk ukuran langkah yang kecil algoritma maju dengan pelan, dan untuk ukuran langkah yang besar akan menghasilkan grafik zigzag. Jenis algoritma gradien yang paling terkenal adalah algoritma *Steepest Descent*, yaitu mendefinisikan α_k sebagai peminimal dari $f(x^{(k)} - \alpha \nabla f(x^{(k)}))$ yang dapat dicari menggunakan metode Secant. Dengan kata lain

$$\alpha_k = \arg_{\alpha \geq 0} \min f(x^{(k)} - \alpha \nabla f(x^{(k)})) \quad (3.6)$$

atau

$$\alpha_k = \arg_{\alpha \geq 0} \min \Phi_k(\alpha) \quad (3.7)$$

dengan

$$\Phi_k(\alpha) \equiv f(x^{(k)} - \alpha \nabla f(x^{(k)})). \quad (3.8)$$

Akan disajikan algoritma untuk menyelesaikan masalah optimisasi dengan kendala. Akan dibicarakan metode gradien terproyeksi dengan kendala persamaan linier . Diberikan masalah optimisasi dalam bentuk meminimumkan $f(x)$ dengan kendala $Ax = b$, dan $f: R^n \to R, A \in R^{mxn}, m < n$, *rank A=m, b*$\in R^{mx1}$, $x \in R^{nx1}$.

Pada algoritma untuk menyelesaikan masalah optimisasi berkendala akan digunakan suatu proyektor orthogonal *P*, yang didefinisikan

$$P = I_n - A^t (AA^t)^{-1} A. \quad (3.9)$$

Proyektor orthogonal diperlukan dalam penyelesaian masalah optimisasi berkendala berupa himpunan yang berbentuk $\{x : Ax = b\}$. Syarat-syarat lain yang diperlukan untuk suatu proyektor orthogonal akan disajikan dalam teorema berikut:

Teorema 3.3 *Diketahui* $P = I_n - A^t (AA^t)^{-1} A$ *dan* $v \in R^n$, $A \in R^{mxn}$, $P \in R^{nxn}$, *maka*

i. $Pv = 0$ *jika dan hanya jika* $v \in R(A^t)$. *Dengan kata lain* $N(P) = R(A^t)$.

ii. $Av = 0$ *jika dan hanya jika* $v \in R(P)$. *Dengan kata lain* $N(A) = R(P)$.

Syarat perlu order pertama untuk kondisi Lagrange pada masalah optimisasi dengan kendala berbentuk $\{x : Ax = b\}$ adalah $P\nabla f(x^*) = 0$ yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 3.4 *Diketahui* $x^* \in R^n$ *merupakan titik fisibel.* $P\nabla f(x^*) = 0$ *jika dan hanya jika x* memenuhi kondisi Lagrange.*

Pada masalah optimisasi dengan kendala, vektor $-\nabla f(x^*)$ tidak harus merupakan arah fisibel,dengan kata lain $x^{(k)}$ merupakan titik fisibel dan dengan menggunakan algoritma $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k \nabla f(x^{(k)})$ diperoleh $x^{(k+1)}$ tidak harus fisibel. Masalah ini dapat diperoleh dengan mengganti $\nabla f(x^{(k)})$ dengan sebuah vektor yang merupakan titik pada arah fisibel. Dimisalkan himpunan arah fisibel adalah ruang nol atau *N(A)* dari matriks *A*, dan titik $P\nabla f(x^{(k)}) \in N(A)$.

Teorema 3.5 Diketahui $P = I_n - A^t(AA^t)^{-1}A$, maka $P\nabla f(x^{(k)}) \in N(A)$.

Jadi dari metode gradien yang diproyeksikan dengan suatu proyektor orthogonal *P*, dapat diperoleh algoritma

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k P\nabla f(x^{(k)}) \qquad (3.10)$$

yang merupakan algoritma gradien terproyeksi. Algoritma tersebut mempunyai sifat seperti dalam teorema berikut.

Teorema 3.6 *Dalam algoritma gradien terproyeksi, jika* $x^{(0)}$ *merupakan fisibel, maka setiap* $x^{(k)}$ *merupakan fisibel, yaitu untuk setiap* $k \geq 0, Ax^{(k)} = b.$

Algoritma gradien terproyeksi mengganti $x^{(k)}$ pada arah $-P\nabla f(x^{(k)})$. Vektor ini berada pada arah penurunan fungsi *f* yang maksimum pada $x^{(k)}$ dengan didefinisikan $Ax = b.$ Misalnya *x* merupakan sebarang titik fisibel dan *d* merupakan arah fisibel dengan $\|d\| = 1$. Kenaikan fungsi *f* pada *x* dengan arah *d* adalah $< \nabla f(x), d >$. Jika *d* merupakan arah fisibel yang berada pada $N(A)$, maka dari Teorema 3.3 diperoleh

$$d \in N(A) = R(P) = R(P^t).$$

Diambil sebarang *v* sehingga $d = Pv$, maka

$$< \nabla f(x), d > = < \nabla f(x), P^t v > = < P\nabla f(x), v >.$$

Dengan pertidaksamaan Cauchy-Schwarz, diperoleh

$$< P\nabla f(x), v > \leq \|P\nabla f(x)\| \|v\|.$$

Tanda persamaan berlaku jika arah dari *v* sejajar dengan arah pada $P\nabla f(x)$. Oleh karena itu, titik pada vektor $-P\nabla f(x)$ berada pada arah penurunan fungsi *f* yang maksimum pada *x* di antara semua arah fisibel.

Misalkan titik awal $x^{(0)}$ yang fisibel, yaitu $Ax^{(0)} = b.$ Mengingat $x = x^{(0)} - \alpha P\nabla f(x^{(0)})$, dengan $\alpha \in R$ dan α >0, α disebut ukuran langkah. Dengan menggunakan ekspansi deret Taylor fungsi *f* di sekitar $x^{(0)}$ dan $P^2 = P = P^t P$, diperoleh

$$f(x^{(0)} - \alpha P\nabla f(x^{(0)})) = f(x^{(0)}) - \alpha \|P\nabla f(x^{(0)})\|^2 + \vartheta(\alpha).$$

Jika $P\nabla f(x^{(0)}) \neq 0$ ($x^{(0)}$ tidak memenuhi kondisi Lagrange), maka dapat dipilih α yang sangat kecil sehingga $f(x) < f(x^{(0)})$. Dengan kata lain $x = x^{(0)} - \alpha \mathrm{P}\nabla f(x^{(0)})$ merupakan perbaikan dari $x^{(0)}$ untuk menjadi peminimal. Ini menjadi dasar pada algoritma gradien terproyeksi, yaitu

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k P\nabla f(x^{(k)}) \qquad (3.11)$$

dengan titik awal $x^{(0)}$ yang memenuhi $Ax^{(0)} = b$ dan α_k merupakan ukuran langkah. Seperti metode gradien pada masalah optimisasi tanpa kendala, pemilihan α_k mempengaruhi kelakuan algoritma. Untuk ukuran langkah yang kecil algoritma maju dengan pelan, dan untuk ukuran langkah yang besar akan menghasilkan grafik yang berbentuk zigzag. Menggunakan algoritma *steepest descent* terproyeksi, yaitu

$$\alpha_k = \arg_{\alpha\geq 0} \min f(x^{(k)} - \alpha P\nabla f(x^{(k)})) . \qquad (3.12)$$

Nilai $\alpha \geq 0$ yang meminimalkan $f(x^{(k)} - \alpha P\nabla f(x^{(k)}))$ dapat dicari menggunakan metode Secant.

Teorema 3.8 *Titik* $x^* \in R^n$ *merupakan peminimal global dari fungsi konveks f untuk* $\{x : \mathrm{A}x = b\}$ *jika dan hanya jika* $P\nabla f(x^*) = 0$.

4. SIMPULAN

Dari pembahasan pada bagian sebelumnya, dapat diambil kesimpulan bahwa metode gradien yang digunakan untuk menyelesaikan masalah optimisasi tanpa kendala dapat dimodifikasi menjadi metode gradien terproyeksi untuk menyelesaikan masalah optimisasi yang mempunyai bentuk umum meminimumkan $f(x)$ dengan kendala $Ax = b$, dan $f : R^n \to R, A \in R^{mxn}, m < n$, *rank A=m,* $b \in R^{mx1}$, $x \in R^{nx1}$. Dengan menambahkan suatu proyektor orthogonal $P = I_n - A^t(AA^t)^{-1}A$ pada algoritma $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k \nabla f(x^{(k)})$, diperoleh algoritma gradien terproyeksi $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k P\nabla f(x^{(k)})$ dengan $\alpha_k \geq 0$ yang merupakan ukuran langkah. Ukuran langkah yang digunakan adalah $\alpha_k = \arg_{\alpha\geq 0} \min f(x^{(k)} - \alpha P\nabla f(x^{(k)}))$, yaitu $\alpha \geq 0$ yang meminimumkan $f(x^{(k)} - \alpha P\nabla f(x^{(k)}))$, dapat dicari menggunakan metode Secant.

Algoritma gradien ini dapat dihentikan jika memenuhi kondisi $P\nabla f(x^{(k)}) = 0$. Dengan kata lain jika $P\nabla f(x^{(k)}) = 0$ titik $x^{(k)}$ merupakan titik peminimal dan merupakan titik peminimal global untuk fungsi *f* yang konveks.

5. DAFTAR PUSTAKA

Anton, H.(1992)., *Aljabar Linear Elementer*., Jakarta: Erlangga.

Chong, E.K.P. dan Zak, Stanislaw H.(1996)., *An Introduction to Optimization*., New York: John Wiley and Sons, Inc.

Hadley. G.(1992). *Aljabar Linear*., Jakarta: Erlangga.

Kitchen, J.W.(1968). *Calculus of One Variable.*, Canada: Addison – Wesley

Publishing Company

Mital, K. V.(1976). *Optimization Methods in Operations Research and Systems Analysis*., New Delhi: Wiley Eastern Limited.

Soterroni, A.C ,Galski, R.L & Ramos, F.M.*(2012)The q*-gradient Method for Global Optimization. National Institute for Space Research, Brazil. Diakses dari: http://arxiv.org/pdf/1209.2084v2.pdf