KAJIAN OPERATOR *DISSIPATIVE* PADA DOMAIN *DENSE*

Ahmad Fauzan[1], Susilo Hariyanto [2]
[1,2]Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro
Jl. Prof. Soedarto, SH, Tembalang Semarang
ahmadfauzannn27@gmail.com[1], sus2_hariyanto@yahoo.co.id[2].

ABSTRAK. Dalam artikel ini dikaji suatu jenis operator linier yang memiliki sifat khusus yakni bagian riil dari hasil kali dalam harus bernilai negatif atau nol. Operator yang memenuhi sifat ini selanjutnya disebut operator *dissipative*. Diawal pembahasan artikel ini didefinisikan terlebih dahulu pengertian operator, yakni suatu pemetaan dari ruang vektor ke ruang vektor. Jika operator ini memenuhi sifat linier, maka disebut operator linier. Selanjutnya untuk membentuk operator dissipative, maka operator linier yang dibahas dalam artikel ini dikonstruksikan pada ruang Hilbert. Disamping itu akan dibahas pula suatu kondisi dimana operator *dissipative* didefinisinikan pada domain yang bersifat *dense* di dalam X. Akhirnya, beberapa contoh dan pembahasan diberikan di artikel ini untuk memperjelas definisi operator *dissipative*.

Kata Kunci: *Operator Dissipative;Dense*

1. PENDAHULUAN

Analisis fungsional merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika yang membahas tentang ruang-ruang vektor dan masalah pemetaan pada ruang-ruang vektor. Pada pembahasan ruang vektor dalam analisis fungsional akan lebih sering dibahas mengenai konsep kekontinuan dan kekonvergenan pada barisan dalam ruang vektor sehingga akan ada topologi yang mempengaruhi. Dalam hal ini kata fungsional sendiri berarti pemetaan dari sebuah ruang vektor ke lapangannya.

Di dalam analisis fungsional terdapat materi tentang operator, salah satunya operator *dissipative* pada ruang *Hilbert*. Operator sendiri merupakan pemetaan dari ruang vektor ke ruang vektor. Selanjutnya operator *dissipative* merupakan suatu operator linier bernilai 0 atau negatif. Pada kajian makalah ini akan dikaji terlebih dahulu mengenai definisi operator linier dan contoh-contohnya sebagai toeri penunjang pembahasan. Pada pembahasan akan dikaji mengenai operator *dissipative* pada domain *dense*.

Selanjutnya dijelaskan mengenai kajian teori meliputi ruang metrik, ruang vektor, ruang bernorma, ruang *innerproduct*, ruang *Hilbert* dan operator linier yang meliputi definisi dan contoh dengan penjelasan sebagai berikut.

Definisi 1.1 [2] Ruang metrik adalah pasangan (X, d) dengan X himpunan tak kosong dan d fungsi jarak pada X yang merupakan fungsi yang terdefinisi pada $X \times X$ sedemikian hingga untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi :

i. $d(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$,
ii. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$ untuk setiap $x, y \in X$,
iii. $d(x, y) = d(y, x)$ untuk setiap $x, y \in X$ dan
iv. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ untuk setiap $x, y, z \in X$.

Contoh 1.2: (X, d) dimana X merupakan himpunan bilangan riil $(\mathbb{R})$ dengan $d(x, y) = |x - y|, x, y \in \mathbb{R}$.

Selanjutnya dijelaskan mengenai ruang metrik yang lengkap dimana ruang metrik lengkap disebut lengkap jika setiap barisan *Cauchy* di ruang metrik konvergen. Kelengkapan ini berlaku pada ruang *Hilbert* juga.

Definisi 1.3 [3] Ruang metrik dikatakan lengkap jika setiap barisan *Cauchy* di dalam ruang tersebut konvergen.

Contoh 1.4: himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ merupakan ruang metrik terhadap metrik d dengan definisi metriknya sebagai berikut:

$$d(x, y) = |x - y|, \text{ dengan } x, y \in \mathbb{R}$$

maka $(\mathbb{R}, d)$ lengkap.

Definisi 1.5 [4] Ruang vektor V adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua buah operasi, yaitu penjumlahan vektor di dalam V dan perkalian anggota vektor pada V dengan bilangan skalar pada suatu lapangan F. Terhadap kedua operasi ini, V memenuhi semua sifat berikut :

i. $(V, +)$ merupakan grup komutatif
ii. $(V, \cdot)$ dengan suatu lapangan F maka memenuhi :
   a. $(\alpha + \beta)\, u = \alpha u + \beta u$.
   b. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.
   c. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
   d. $1 \cdot u = u$.

Untuk setiap $u, v \in V$ dan $\alpha, \beta \in F$ merupakan bilangan skalar dari suatu lapangan.

Contoh 1.6: $\mathbb{R}^3$ merupakan ruang vektor atas $\mathbb{R}$ dengan memenuhi sifat-sifat ruang vektor.

Definisi 1.7 [2] Ruang bernorma X merupakan ruang vektor dengan suatu norm yang terdefinisi didalamnya. Norm pada ruang vektor X adalah pemetaan bernilai real pada X dengan nilai di suatu $x \in X$ dinotasikan

$\|x\|$; dibaca "norm dari x".

Dan memenuhi sifat – sifat

i. $\|x\| \geq 0$,
ii. $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$,
iii. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, serta
iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (pertidaksamaan segitiga) dengan $x, y \in X$ dan α adalah bilangan skalar.

Norm pada X dapat mendefinisikan metrik d pada X dengan definisi

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Contoh 1.8 : Ruang ℓ_∞ yang merupakan himpunan semua barisan bilangan kompleks yang terbatas dengan definisi norm yang diberikan

$$\|x\| = \sup_k |x_k| \text{ dimana } x = (x_k) \in \ell_\infty$$

merupakan ruang bernorma.

Definisi 1.9 [2] Ruang *innerproduct* merupakan ruang vektor X dengan *innerproduct* terdefinisi pada X. *Innerproduct* pada X merupakan pemetaan dari $X \times X$ ke lapangan F dari X, dengan setiap pasangan x dan y yang dihubungkan dengan skalar ditulis

$$\langle x, y\rangle$$

dan disebut *innerproduct* dari x dan y, sedemikian sehingga untuk setiap x, y, z dan skalar α, diperoleh

i. $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
ii. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$
iii. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
iv. $\langle x, x\rangle \geq 0$
   $\langle x, x\rangle = 0$ jika dan hanya jika $x = \theta$.

Innerproduct pada X mendefinisikan norma pada X dengan definisi

$$\| x \| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

dan mendefinisikan metrik pada X dengan definisi

$$d(x,y) = \| x - y \| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}.$$

Contoh 1.10 : Ruang ℓ_2 yang merupakan himpunan semua barisan bilangan riil (x_n) sedemikian hingga $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 < \infty$. Dengan definisi *innerproduct* yang diberikan $\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\bar{y}_k$ untuk setiap $x = (x_k)$, $y = (y_k) \in \ell_2$ merupakan ruang *innerproduct*.

Definisi 1.11 [5] Ruang *innerproduct* yang lengkap disebut ruang Hilbert.

Contoh 1.12 : Ruang ℓ_2 yang merupakan himpunan semua barisan bilangan riil (x_n) sedemikian hingga $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 < \infty$. Dengan definisi *innerproduct* yang diberikan $\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\bar{y}_k$ untuk setiap $x = (x_k)$, $y = (y_k) \in \ell_2$ merupakan ruang *innerproduct* yang lengkap.

Definisi 1.13 [2]
Suatu pemetaan pada ruang vektor ke ruang vektor disebut operator.

Definisi 1.14 [2]
Operator Linier T adalah operator yang memenuhi

1. Domain $D(T)$ dari T adalah ruang vektor dan range $R(T)$ berada di ruang vektor atas lapangan yang sama.
2. Untuk setiap $x, y \in D(T)$ dan skalar α

   $T(x+y) = T(x) + T(y)$

   dan

   $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

operator $T\colon X \to Y$ disebut operator dari ruang X ke Y. Sedangkan $T\colon X \to X$ merupakan operator yang memetakan ke dirinya sendiri atau juga sering disebut Operator X dengan domain dan kodomain yang sama.

Contoh 1.15

Diberikan suatu pemetaan ruang vektor $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dengan $T(x,y,z) = (x-y+z, 0)$. Maka operator T merupakan operator linier.

2. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam kajian ini adalah teori pustaka. Dalam teori pustaka ini meliputi mencari dan mempelajari referensi tentang operator linier khususnya operator linier dalam ruang Hilbert. Selanjutnya mencari dan mempelajari referensi tentang teori operator *dissipative* dan operator *dissipative* pada domain *dense*.

3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Pembahasan akan dijabarkan tentang definisi operator *dissipative*. Selanjutnya akan diteliti tentang operator *dissipative* pada domain *dense* dengan penjelasan sebagai berikut.

Definisi 3.1 [1] Untuk setiap $x, y \in X$, derivatif berarah dari norm didefinisikan

$$\tau_+(x,y) = \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}(\|x+hy\| - \|x\|)$$

dan

$$\tau_-(x,y) = \lim_{h\uparrow 0}\frac{1}{h}(\|x+hy\| - \|x\|).$$

Definisi 3.2 [1]
Diberikan A suatu operator pada X. Maka A disebut *dissipative* jika dan hanya jika $\tau_{-}(x, Ax) \leq 0$ untuk setiap $x \in \mathcal{D}(A)$. Jika X merupakan ruang Hilbert maka diperoleh bentuk sederhana $\mathrm{Re}\langle x, Ax\rangle \leq 0$ untuk setiap $x \in \mathcal{D}(A)$.

Contoh 3.3
Diberikan A suatu operator pada $\mathbb{R}^n$ dengan innerproduk yang didefinisikan dengan

$$A(x) = -I(x) = -x \text{ untuk setiap } x \in \mathbb{R}^n$$

Ditunjukkan operator A tersebut *dissipative*.
Bukti :
Diketahui bahwa $A(x) = -I(x) = -x$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}^n$. Untuk sebarang skalar α, β dan $x, y \in \mathbb{R}^n$, terlebih dahulu ditunjukkan operator A merupakan suatu operator linier.

$$\begin{aligned} A(x\alpha + y\beta) &= -I(x\alpha + y\beta) \\ &= -(x\alpha + y\beta) \\ &= -x\alpha - y\beta \\ &= -\alpha x - \beta y \\ &= -\alpha I(x) - \beta I(y) \\ &= \alpha A(x) + \beta A(x) \end{aligned}$$

Selanjutnya ditunjukkan bahwa operator A *dissipative*.

$$\langle x, Ax\rangle = x \cdot Ax = x \cdot (-x) = -\|x\|^2$$

sehingga nilai $\mathrm{Re}\langle Ax, x\rangle = -\|x\|^2 \leq 0$. Oleh karena $\mathrm{Re}\langle Ax, x\rangle \leq 0$ dapat disimpulkan bahwa A merupakan operator *dissipative*.

Contoh 3.4
Diberikan operator linier metrik $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ dengan $A: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Didefinisikan *innerproduct*

$$\langle u, v\rangle = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2}$$

untuk setiap $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2$ dan $x = a + bi$. Ditunjukkan bahwa operator A tersebut *dissipative*.

Bukti :
Diketahui operator linier metrik $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ dengan $A: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Diambil sebarang $x \in \mathbb{C}^2$ dengan $\vec{x} = (x_1, x_2)$, maka

$$\begin{aligned} \langle Ax, x\rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} -x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

dengan menggunakan definisi *innerproduct* diperoleh

$$\begin{aligned} &= (-x_1 - x_2)\overline{x_1} + (x_1 - x_2)\overline{x_2} \\ &= -x_1\overline{x_1} - x_2\overline{x_1} + x_1\overline{x_2} - x_2\overline{x_2} \\ &= -|x_1|^2 - x_2\overline{x_1} + x_1\overline{x_2} - |x_2|^2 \end{aligned}$$

karena $x_1 = a_1 + b_1 i, x_2 = a_2 + b_2 i, \overline{x_1} = a_1 - b_1 i, \overline{x_2} = a_2 - b_2 i$ dan $|x|^2 = a^2 + b^2$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} &= -\left({a_1}^2 + {b_1}^2\right) - (a_2 + b_2 i)(a_1 - b_1 i) + (a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i) \\ &\quad -\left({a_2}^2 + {b_2}^2\right) \\ &= -{a_1}^2 - {b_1}^2 - {a_2}^2 - {b_2}^2 - (a_1 a_2 + a_1 b_2 i - a_2 b_1 i + b_1 b_2) \\ &\quad +(a_1 a_2 - a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2) \\ &= -{a_1}^2 - {a_2}^2 - {b_1}^2 - {b_2}^2 - a_1 a_2 - a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - b_1 b_2 + a_1 a_2 \end{aligned}$$

$$-a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2$$
$$= -({a_1}^2 + {a_2}^2) - ({b_1}^2 + {b_2}^2) - a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - a_1 b_2 i + a_2 b_1 i$$
$$= -({a_1}^2 + {a_2}^2) - ({b_1}^2 + {b_2}^2) - 2a_1 b_2 i + 2a_2 b_1 i$$
$$= -({a_1}^2 + {a_2}^2) - ({b_1}^2 + {b_2}^2) - 2(a_1 b_2 - a_2 b_1) i$$

sehingga nilai $\mathrm{Re}\langle Ax, x\rangle = -({a_1}^2 + {a_2}^2) - ({b_1}^2 + {b_2}^2) \leq 0$. Oleh karena $\mathrm{Re}\langle Ax, x\rangle \leq 0$ dapat disimpulkan bahwa A merupakan operator *dissipative*.

Proposisi 3.5 [6]

Misalkan $A := \mathcal{D}(A) \to X$ merupakan *dissipative*, dengan $\mathcal{D}(A)$ *dense* dalam X. Maka A memiliki suatu perluasan tertutup yang mana juga merupakan *dissipative*.

Bukti :

Salah satu perluasan tersebut adalah operator $\bar{A}$ yang grafiknya merupakan *closure* dari grafik A. Terdapat suatu barisan (z_n) dalam $\mathcal{D}(A)$ sedemikian sehingga $z_n \to z_0$ dan $Az_n \to y$ untuk suatu $y \in X$. Misalkan terdapat barisan lain $({z_n}')$ dalam $\mathcal{D}(A)$ dengan ${z_n}' \to z_0$ dan $A{z_n}' \to v$ untuk suatu $v \in X$. Karena $\mathcal{D}(A)$ *dense* diperoleh $y = v$. Jadi, $\bar{A}$ tertutup. Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\bar{A}$ merupakan *dissipative*. Jika $z_0 \in \mathcal{D}(\bar{A})$, maka terdapat suatu barisan (z_n) dalam $\mathcal{D}(A)$ dengan $z_n \to z_0$ dan $Az_n \to \bar{A}z_0$. Kemudian diperoleh $\mathrm{Re}\langle \bar{A}z_0, z_0\rangle = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\langle Az_n, z_n\rangle \leq 0$ maka $\bar{A}$ merupakan *dissipative*.

4. SIMPULAN

Berdasarkan hasil dari kajian diperoleh bahwa suatu operator dikatakan operator *dissipative* jika bagian riil dari $\langle Ax, x\rangle$ bernilai 0 atau negatif yang dinotasikan $\mathrm{Re}\langle Ax, x\rangle \leq 0$. Kemudian suatu operator *dissipative* pada domain *dense* juga merupakan suatu operator *dissipative* berdasarkan proposisi yang menyatakan bahwa jika A merupakan *dissipative* dengan domain *dense*, maka A memiliki suatu perluasan tertutup yang mana juga merupakan operator *dissipative.*

DAFTAR PUSTAKA

[1] Kappel, F. dan W. Schappacher. 2000. *Strongly Continuous Semigroup, an Introduction.*

[2] Kreyzig, E. 1978. *Introductory Functional Analysis with Application.* New York: John Wiley & Sons.

[3] Darmawijaya, S. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak.* Yogyakarta: Universitas Gajah Mada.

[4] Anton, H. 1978. *Elementary Linear Algebra Teenth Edition*. New York. Jhon Wiley & Sons, Inc.

[5] Berbelian, S. K. 1961. *Introduction to Hilbert Space.* New York: Oxford University Press.

[6] Tucsnak, Marius dan George Weiss. 2009. *Observation and Control for Operators Semigroups.* Basel: Birkhäuser.