MODEL *GENERALIZEDSPACE TIME AUTOREGRESSIVE INTEGRATED* DENGAN EROR *AUTOREGRESSIVE CONDITIONAL HETEROSCEDASTIC* (GSTARI-ARCH)

Restuning Gustiasih[1)], Dewi Retno Sari Saputro[2)]
[1,2)]Program Studi Matematika Universitas Sebelas Maret Surakarta
restuninggustiasih@gmail.com, dewiretnoss@staff.uns.ac.id

Abstrak

Data runtun waktu spasial merupakan data yang tidak hanya mempunyai keterkaitan dengan kejadian pada waktu-waktu sebelumnya, namun juga mempunyai keterkaitan dengan lokasi. Salah satu pemodelan yang dapat digunakan untuk menganalisis data runtun waktu spasial adalah model generalized space time autoregressive (GSTAR) dengan asumsi eror bervariansi konstan. Namun, seringkali dalam suatu kejadian ditemukan kondisi dengan variansi selalu berubah setiap saat (tidak konstan) atau disebut terjadi heteroskedastisitas. Untuk mengatasi hal tersebut diperlukan model yang dapat digunakan pada variansi yang tidak konstan yaitu model GSTAR dengan eror autoregressive conditional heteroscedastic (ARCH) atau dikenal dengan model GSTAR-ARCH. Untuk data runtun waktu spasial yang tidak memenuhi asumsi kestasioneran digunakan model generalized space time autoregressive integrated (GSTARI) sehingga model menjadi GSTARI-ARCH. Metode least square digunakan untuk estimasi parameter persamaan mean GSTAR sedangkan maximum likelihood digunakan untuk estimasi parameter eror pengganggu ARCH. Tujuan penelitian ini untuk mengkaji ulang model GSTARI-ARCH. Metode dalam penulisan ini adalah studi literatur yang diperoleh dari beberapa artikel, jurnal, dan buku yang mendukung dalam mencapai penelitian. Hasil kajian diperoleh model GSTARI-ARCH yang mempunyai persamaan mean sebagai model GSTARI dan eror sebagai model multivariat ARCH.

Kata Kunci: *GSTARI-ARCH; Heteroskedastisitas; Tidak stasioner*

1. PENDAHULUAN

Time series atau runtun waktu adalah suatu deret data yang dikumpulkan berdasarkan urutan waktu dengan interval yang sama. Data runtun waktu seringkali memiliki kompleksitas tersendiri khususnya analisis runtun waktu multivariat. Dalam banyak aplikasi, beberapa runtun waktu dicatat secara bersamaan di sejumlah lokasi yang menghasilkan runtun waktu spasial (*space time*). Data runtun waktu spasial merupakan data yang tidak hanya mempunyai keterkaitan dengan kejadian pada waktu-waktu sebelumnya, namun juga mempunyai keterkaitan dengan lokasi (Ardianto, 2014).

Salah satu pemodelan yang dapat digunakan untuk menganalisis data runtun waktu spasial adalah model *space time autoregressive* (STAR). Model STAR pertama kali diperkenalkan oleh Pfeifer dan Deutsch (1980), namun masih memiliki kelemahan pada fleksibilitas parameter yang menjelaskan keterkaitan lokasi dan waktu yang berbeda pada data runtun waktu spasial. Kemudian kelemahan tersebut diperbaiki oleh Borovkova, *et al*. (2002) menjadi model *generalized space time autoregressive* (GSTAR).Pada model GSTAR diasumsikan lokasi-lokasi yang diteliti memiliki karakteristikheterogen, sedangkan pada model STAR diasumsikan homogen.

Dalam notasi matriks model GSTAR dituliskan sebagai berikut.

$$\boldsymbol{Z}^*(t) = \sum_{k=1}^{p} \left[\boldsymbol{\phi}_{k0} + \boldsymbol{W}^{(0)} + \sum_{l=1}^{\lambda_s} \boldsymbol{\phi}_{kl} \boldsymbol{W}^{(l)} \right] \boldsymbol{Z}^*(t-k) + \boldsymbol{\varepsilon}(t) \qquad (1)$$

dengan $\boldsymbol{Z}^*(t)$ adalah vektor dari lokasi N pada waktu ke-t, λ_s adalah orde spasial ke-s dari bentuk autoregresif,p adalah orde *autoregressive*,$\boldsymbol{W}^{(l)}$ adalah matriks pembobot berukuran $(N \times N)$ pada lag spasial l, $\boldsymbol{\phi}_{kl}$: diag $(\boldsymbol{\phi}_{k0}^1, \dots, \boldsymbol{\phi}_{k0}^N)$ yaitu matriks diagonal parameter *autoregressive* pada lag waktu ke-k dan lag spasial ke-l, dan $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ adalah vektor residual berukuran $(N \times 1)$ bersifat *white noise* dan berdistribusi normal multivariat.

Model GSTAR diasumsikan memiliki eror variansi konstan. Namun, seringkali ditemukan situasi dimana variansi selalu berubah setiap saat atau dalam kondisi heteroskedastisitas. Untuk mengatasi hal tersebut diperlukan model yang dapat digunakan pada variansi yang tidak konstan, salah satunya model *autoregressive conditional heteroscedastic* (ARCH).

Model ARCH pertama kali dikembangkan oleh Engle (1982) yang menganalisis masalah variansi galat yang berubah-ubah untuk setiap pengamatan dalam runtun waktu. Pada kondisi tersebut variansi galat tidak hanya fungsi dari variabel independen namun juga bergantung pada seberapa besar galat di masa lalu. Dari pernyataan tersebut untuk model GSTAR dengan eror tidak konstan dapat digunakan model GSTAR-ARCH.

Menurut Retnaningsih (2014), untuk data runtun waktu spasial yang tidak memenuhi asumsi kestasionerandigunakan model*generalized space time autoregressive integrated* (GSTARI). Terdapat dua hal yang harus dipenuhi dalam asumsi kestasioneran, yaitu stasioner daalm*mean* dan stasioner dalam variansi. Apabiladata tidak stasioner dalam*mean*, maka digunakan*differencing* danapabila data tidak stasioner dalam variansi, maka digunakan transformasi *Box Cox*. Proses *differencing* dan transformasi dilakukan hingga data stasioner.

Model GSTARI pernah diteliti oleh Hanin (2014) yang melakukan pemodelan menggunakan model GSTARI untuk memodelkan data deret waktu tidak stasioner dimana unsur *integrated* ikut dimasukkan ke dalam proses. Model GSTARI yang terdapat asumsi heteroskedastisitas didalamnya digunakan model menjadi GSTARI-ARCH.

Terdapat dua metode dalam mengestimasi parameter model GSTARI-ARCH, yaitu metode *least square* dan *maximum likelihood*. Metode *least square* digunakan untuk mengestimasi parameter persamaan *mean* GSTAR sedangkan *maximum likelihood* digunakan untuk mengestimasi parameter eror pengganggu ARCH. Penelitian ini mengkaji ulang model GSTARI-ARCH.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian berbasis teori yaitu melakukan beberapa kajian teori yang diperoleh dari beberapa artikel, jurnal, dan buku yang mendukung dalam mencapai tujuan penelitian.

Adapun langkah penelitiannya dilakukan sebagai berikut.

a. Mengestimasi parameter model GSTAR(1) untuk tiap-tiap lokasi amatan dengan metode *least square* terlepas dari asumsi heteroskedastisitas.

b. Mengkonstruksi model GSTARI dengan mengubah model umum $Z^*(t)$pada model (1) menjadi $Z(t) - Z(t-1)$ dan $Z^*(t-k)$ menjadi $Z(t-k) - Z(t-k-1)$.
c. Menghitung eror *least square* pada setiap lokasi amatan, yaitu ε_i dengan $i = 1, 2, \dots, T$.
d. Mengestimasi parameter persamaan variansi dari eror yang diperoleh pada langkah (c) dengan metode *maximum likelihood*.
e. Menghitung variansi dan kovariansi tiap-tiap lokasiamatan.
f. Mengestimasi parameter model dengan metode *generalized least square*(GLS).
g. Mengkonstruksi model GSTARI-ARCH.
h. Menuliskan hasil kajian (a)-(g), menganalisis, melakukan interpretasi hasil, serta penarikan simpulan.

3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini diberikan beberapa teori yang mendukung dalam menjapai tujuan penelitian. Teori-teori yang diberikan meliputi stasioneritas, model GSTARI, bobot normalisasi korelasi silang, estimasi parameter GSTARI, model ARCH, estimasi parameter GSTARI-ARCH, dan model GSTARI-ARCH.

a. Stasioneritas

Suatu runtun pengamatan dikatakan stasioner apabila proses tidak berubah seiring dengan adanya perubahan runtun waktu. Apabila suatu runtun waktu Z_t stasioner maka *mean*, variansi, dan kovariansi runtun tersebut tidak dipengaruhi oleh berubahnya waktu pengamatan sehingga proses berada dalam keseimbangan statistik (Soejoeti, 1987). Cara mengidentifikasi data stasioner salah satunya dengan melihat *mean,* variansi, dan kovariansi data tersebut konstan. Bila data runtun waktu belum stasioner dalam *mean* maka diperlukan proses *differencing*. Bila data runtun waktu belum stasioner dalam variansi maka diperlukan transformasi *Box Cox*. Proses *differencing* dan transformasi dilakukan sampai data runtun waktu menjadi stasioner.

b. Model GSTARI

Model GSTARI merupakan model dengan parameter yang bervariasi menurut lokasi dan digunakan pada data runtun waktu yang tidak stasioner(Hanin, 2014). Model ini merupakan perbaikan dari model STAR dan GSTAR karena model ini dapat digunakan untuk mengatasi data yang tidak stasioner. Model GSTARI diperkenalkan oleh Min *et al*. (2010) dengan model dituliskan sebagai berikut.

$$\boldsymbol{Z}^*(t) = \sum_{k=1}^{p} \left[\boldsymbol{\phi}_{k0} + \boldsymbol{W}^{(0)} + \sum_{l=1}^{\lambda_s} \boldsymbol{\phi}_{kl}\boldsymbol{W}^{(l)}\right] \boldsymbol{Z}^*(t-k) + \boldsymbol{\varepsilon}(t) \qquad (2)$$

dengan $Z^*(t) = Z(t) - Z(t-1)$ dan $Z^*(t-k = Z(t-k) - Z(t-k-1)$,$\boldsymbol{Z}^*(t)$ adalah vektor dari lokasi N pada waktu ke-t, λ_s adalah orde spasial ke-s dari bentuk autoregresif, $\boldsymbol{W}^{(l)}$ adalah matriks pembobot berukuran $(N \times N)$ pada lag spasial l, $\boldsymbol{\phi}_{kl}$: diag $(\boldsymbol{\phi}_{k0}^1, \dots, \boldsymbol{\phi}_{k0}^N)$ yaitu matriks diagonal parameter *autoregressive* pada lag waktu ke-k dan lag spasial ke-l, dan $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ adalah vektor residual berukuran $(N \times 1)$ bersifat *white noise* dan berdistribusi normal multivariat.

c. Bobot Normalisasi Korelasi Silang

Salah satu karakteristik model runtun waktu adalah adanya korelasi dalam waktu maupun lokasi. Korelasi antar lokasi direpresentasikan melalui matriks bobot $\boldsymbol{W}$. Matriks $\boldsymbol{W}$ merupakan matriks bujur sangkar berukuran $(N \times N)$ yang memiliki entri berupa bobot antara dua lokasi yang bersesuaian (Suryamah dkk., 2013). Penentuan bobot lokasi dilakukan dengan normalisasi dari besaran-besaran korelasi silang antara lokasi pada waktu yang bersesuaian. Proses ini secara umum menghasilkan bobot lokasi sebagai berikut.

$$W_{ij} = \frac{r_{ij}(1)}{\sum_{k\neq 1}|r_{ik}(1)|}$$

dengan $i \neq j$ dan memenuhi $\sum_{i\neq j} W_{ij} = 1$. Bobot lokasi dengan menggunakan normalisasi dari besaran-besaran korelasi silang antara lokasi pada waktu yang bersesuaian ini memungkinkan semua bentuk kemungkinan hubungan antarlokasi. Dengan demikian tidak ada lagi batasan yang kaku tentang besarnya bobot yang terutama tergantung dari jarak antarlokasi. Bobot ini juga memberikan fleksibilitas pada besar dan tanda hubungan antarlokasi yang berlainan, yaitu positif dan negatif (Wutsqa*et al*., 2012).

d. Estimasi Parameter GSTARI

Langkah estimasi parameter model GSTARI adalah sama seperti langkah estimasi parameter model GSTAR karena pada dasarnya model GSTARI sama dengan model GSTAR. Perbedaannya terletak pada nilai Z yang digunakan dalam tahap penentuan orde *autoregressive,* yaitu $Z^*(t) = Z(t) - Z(t-1)$dengan $Z^*(t)$merupakan nilai Z yang telah dilakukan *diferencing*. Metode yang digunakan untuk mengestimasi parameter model GSTARI pada bobot lokasi normalisasi korelasi silangadalah metode*least square*.Model GSTARI pada (1) dapat dinyatakan dalam bentuk linier berikut.

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\begin{pmatrix} Z_1^*(1) \\ Z_1^*(2) \\ \vdots \\ Z_1^*(t) \\ \vdots \\ Z_N^*(1) \\ Z_N^*(2) \\ \vdots \\ Z_N^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1^*(\mathrm{t-k}) & V_1(t-k) & \cdots & 0 \\ Z_1^*(\mathrm{t-k}) & V_1(t-k) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_1^*(\mathrm{t-k}) & V_1(t-k) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & V_N(t-k) \\ 0 & 0 & \cdots & V_N(t-k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & V_N(t-k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{k0}^1 \\ \phi_{k0}^2 \\ \vdots \\ \phi_{k0}^N \\ \phi_{kl}^1 \\ \phi_{kl}^2 \\ \vdots \\ \phi_{kl}^N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1(1) \\ \varepsilon_1(2) \\ \vdots \\ \varepsilon_1(t) \\ \vdots \\ \varepsilon_N(1) \\ \varepsilon_N(2) \\ \vdots \\ \varepsilon_N(t) \end{pmatrix}$$

dengan $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} Z_1^*(1) \\ Z_1^*(2) \\ \vdots \\ Z_1^*(t) \\ \vdots \\ Z_N^*(1) \\ Z_N^*(2) \\ \vdots \\ Z_N^*(t) \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} \mathrm{Z}_1^*(\mathrm{t}-\mathrm{k}) & V_1(t-k) & \cdots & 0 \\ \mathrm{Z}_1^*(\mathrm{t}-\mathrm{k}) & V_1(t-k) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Z}_1^*(\mathrm{t}-\mathrm{k}) & V_1(t-k) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & V_N(t-k) \\ 0 & 0 & \cdots & V_N(t-k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & V_N(t-k) \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} \phi_{k0}^1 \\ \phi_{k0}^2 \\ \vdots \\ \phi_{k0}^N \\ \phi_{kl}^1 \\ \phi_{kl}^2 \\ \vdots \\ \phi_{kl}^N \end{pmatrix}$, dan $\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{pmatrix} \varepsilon_1(1) \\ \varepsilon_1(2) \\ \vdots \\ \varepsilon_1(t) \\ \vdots \\ \varepsilon_N(1) \\ \varepsilon_N(2) \\ \vdots \\ \varepsilon_N(t) \end{pmatrix}$.

Estimasi parameter dengan metode *least square* yaitu meminimumkan jumlah kuadrat sesatannya. Jumlah kuadrat sesatan model GSTAR dapat dinyatakan sebagai

$$\varepsilon = Y - X\beta$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{\varepsilon_i \varepsilon_i'} &= \left(\boldsymbol{Y_i} - \boldsymbol{X_i\beta}^{(i)}\right)'\left(\boldsymbol{Y_i} - \boldsymbol{X_i\beta}^{(i)}\right) \\ &= \boldsymbol{Y_i}'\boldsymbol{Y_i} - 2\boldsymbol{\beta}^{(i)'}\boldsymbol{X_i}'\boldsymbol{Y_i} + \boldsymbol{\beta}^{(i)'}\boldsymbol{X_i}'\boldsymbol{X_i\beta}^{(i)}. \end{aligned}$$

Jumlah kuadrat sesatan model GSTAR minimum dipenuhi apabila $\frac{\partial S\left(\boldsymbol{\beta}^{(i)}\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}^{(i)}} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S\left(\boldsymbol{\beta}^{(i)}\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}^{(i)}} &= -2\boldsymbol{\beta}^{(i)'}\boldsymbol{X_i}'\boldsymbol{Y_i} + \boldsymbol{\beta}^{(i)'}\boldsymbol{X_i}'\boldsymbol{X_i\beta}^{(i)} \\ 0 &= -2\boldsymbol{\beta}^{(i)'}\boldsymbol{X_i}'\boldsymbol{Y_i} + \boldsymbol{\beta}^{(i)'}\boldsymbol{X_i}'\boldsymbol{X_i\beta}^{(i)} \\ \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)} &= (\boldsymbol{X_i}'\boldsymbol{X_i})^{-1}\boldsymbol{X_i}'\boldsymbol{Y_i}. \end{aligned}$$

e. Model ARCH

Misalkan eror pada model (1) mempunyai variansi selalu berubah setiap saat atau dalam kondisi heteroskedastisitas.Hal tersebut mengindikasikan bahwa model mempunyaieror ARCH sehingga model memiliki persamaan *mean* sebagai model GSTAR dan eror pengganggu sebagai model multivariat ARCH (Nainggolan, 2010).Eror pengganggu tersebut dapat dimodelkan sebagai

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{D_t\eta_t},\ \boldsymbol{\varepsilon}_t|F_{t-1} \sim N(0, \Sigma(\mathrm{t}))$$

dengan $\boldsymbol{\eta_t} = \left(\eta_1(t), \dots, \eta_N(t)\right)' = \left(\frac{\varepsilon_1(t)}{\sqrt{h_1(t)}}, \dots, \frac{\varepsilon_N(t)}{\sqrt{h_N(t)}}\right)$ merupakan vektor eror terstandar, $\boldsymbol{D_t} = diag(\sqrt{h_1(t)}, \dots, \sqrt{h_N(t)})$ merupakan matriks diagonal akar kuadrat eror variansi bersyarat dalam model ARCH, dan $\boldsymbol{\Sigma}(\mathrm{t}) =$

$\boldsymbol{D_t R D_t}$.Matriks $\boldsymbol{R}$merupakan korelasi antara kesalahan eror $\varepsilon_i(t)$ dan $\varepsilon_j(t)$. Untuk mendapatkan matriks $\boldsymbol{R}$, Nainggolan(2017) menggunakan persamaan korelasi $\sigma_{ij}(t) = \rho_{ij}\sqrt{h_i(t)}\sqrt{h_j(t)}$. Misal diasumsikan korelasinya konstan sehingga matriks kovariansi $\boldsymbol{\Sigma}(\mathrm{t})$ adalah

$$\Sigma(\mathrm{t}) = \begin{pmatrix} h_1(t) & \rho_{12}\sqrt{h_1(t)}\sqrt{h_2(t)} & \cdots \rho_{1N}\sqrt{h_1(t)}\sqrt{h_N(t)} \\ \rho_{21}\sqrt{h_2(t)}\sqrt{h_1(t)} & h_2(t) & \cdots \rho_{2N}\sqrt{h_2(t)}\sqrt{h_N(t)} \\ \vdots & \vdots & \ddots \quad \vdots \\ \rho_{N1}\sqrt{h_N(t)}\sqrt{h_1(t)} & \rho_{N2}\sqrt{h_N(t)}\sqrt{h_2(t)} & \cdots \quad h_N(t) \end{pmatrix}$$

$$\Sigma(\mathrm{t}) = \begin{pmatrix} \sqrt{h_1(t)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{h_2(t)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{h_N(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1N} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1} & \rho_{N2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{h_1(t)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{h_2(t)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{h_N(t)} \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{D_t R D_t}$$

Untuk memperoleh model GSTAR-ARCH,Nainggolan(2017) mendefinisikan variansi $h_i(t)$ sebagai model ARCH(q), yaitu

$$\sigma_i^2(\text{嫌}) = h_i(t) = \alpha_{0,i} + \alpha_{1,i}\varepsilon_i^2(t-1) + \cdots + \alpha_{q,i}\varepsilon_i^2(t-q) \tag{3}$$

dengan $\sigma_i^2(t)$ adalah varian residual dan $\alpha_{q,i}\varepsilon_i^2(t-q)$ adalah komponen ARCH. Varian residual memiliki dua komponen yaitu konstanta dan residual dari periode sebelumnya. Karena varian residual periode sekarang (t) dipengaruhi oleh periode sebelumnya ($(t-1), \dots, (t-q)$) menyebabkan model ini disebut model bersyarat (*conditional*). Oleh karena itu persamaan (1) disebut dengan persamaan rata-rata bersyarat (*conditional mean*) dan persamaan (3) disebut dengan persamaan varian bersyarat (*conditional variance*) (Eliyawati, 2014).

f. Estimasi Parameter GSTARI-ARCH

Bonar (2017) menyatakan bahwa estimasi parameter model GSTAR dengan asumsi heteroskedastisitas pada umumnya memiliki prosedur yang sama dengan estimasi parameter model regresi ARCH. Estimasi parameter persamaan variansi diestimasi menggunakan metode*maximum likelihood*, sedangkan parameter model GSTAR diestimasi menggunakan metode *generalized least square* (GLS). Estimasi GLS dariβ, yaitu

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)} = \left(\boldsymbol{X_i}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{X_i}\right)^{-1}\boldsymbol{X_i}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{Y_i} \tag{4}$$

g. Model GSTARI-ARCH

Untuk data tidak stasioner dengan *error term* yang tidak konstan dan berubah setiap saat, model yang sesuai adalah model GSTARI-ARCH. Model GSTARI-ARCH untuk waktu *lag* ke-p dan waktu spasial ke-l, kemudian eror ARCH order ke-i dapat ditulis sebagai

$$\boldsymbol{Z}^*(t) = \sum_{k=1}^{p}\left[\boldsymbol{\phi}_{k0} + \boldsymbol{W}^{(0)} + \sum_{l=1}^{\lambda_s}\boldsymbol{\phi}_{kl}\boldsymbol{W}^{(l)}\right]\boldsymbol{Z}^*(t-k) + \boldsymbol{\varepsilon}(t)$$

dengan

$$\boldsymbol{Z}^*(t) = Z(t) - Z(t-1) \text{ dan } \boldsymbol{Z}^*(t-k) = Z(t-k) - Z(t-k-1)$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{D_t\eta_t}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_t|F_{t-1} \sim N(0, \Sigma_t) \quad (5)$$

4. SIMPULAN

Hasil kajian diperoleh model GSTARI-ARCH yang mempunyai persamaan *mean* sebagai model GSTARI dan eror sebagai model multivariat ARCH. Model GSTARI-ARCH dituliskan pada persamaan (5) dengan estimasi parameternya pada persamaan (4).

5. DAFTAR PUSTAKA

Ardianto, M. P. (2014). Pemodelan Generalized Space Time Autoregressive (GSTAR) pada Tiga Periode Waktu (Studi Kasus Inflasi di Lima Kota Besar di Pulau Jawa). *Jurnal Mahasiswa Statistik*, **2**(4), 265 – 268.

Bonar, H, B. N Ruchjana,& G. Darmawan. (2017). Development of Generalized Space Time Autoregressive Integrated with ARCH Error (GSTARI-ARCH) Model Based on Consumer Price Index Phenomenon at Saveral Cities in North Sumatra Province.*Statistics and its Applications,AIP Conference Proceedings 1827*. doi:10.1063/1.4979425.

Borovkova, S.A., Lopuhaa & B.N.Ruchjana. (2002). Generalized STAR with Experimental Weights. *Proceeding of the 17th International Workshop on Statistical Modeling*, Statistical Modelling in Society, (pp.143 – 151).

Eliyawati, W. Y, R. R. Hidayat, & D. F. Azizah. (2014). Penerapan Model GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) Untuk Menguji Pasar Modal Efisien di Indonesia. Studi pada Harga Penutupan (Closing Price) Indeks Saham LQ Periode 2009-2011. *Jurnal Administrasi Bisnis (JAB)*. **7**(2). 1 – 10.

Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of The Variance of The United Kingdom Inflation. *Journal of Econometrica*, **50**(4), 987-1007.

Hanin, T. (2014). Pemodelan Generalized Space Time Autoregressive (GSTARI) pada Data Curah Hujan.*Jurnal Mahasiswa Statistik*, **2**(3), 217 – 220.

Min, X., J. Hu, & Z. Zhang. (2010). Urban Traffic Network Modeling and Short-term Traffic Flow Forecasting Based on GSTARIMA Model.*Presented at* Annual Conference on Intelligent Transportation Systems, Madeira Island, Portugal, September 19 – 22, *2010*.

Nainggolan, N. & J. Titaley. (2017). Development of Generalized Space Time Autoregressive (GSTAR) Model. *AIP Conference Proceedings*. doi:10.1063/1.4979450.

Nainggolan, N., B. N.Ruchjana , S. Darwis, & R.E. Siregar. (2010). GSTAR Models with ARCH Errors and The Simulation: *Proceeding of the Third*

International Conference on Mathematics and Natural Sciences (ICMNS 2010), (pp. 1075-1084).

Pfeifer, P.E. & S.J. Deutsch. (1980). A Three-Stage Iterative Procedure for Space Time Modeling. *Technometrics*, **22**(1), 35 – 47.

Retnaningsih, H. A. (2014). Pemodelan Generalized Space Time Autoregressive Integrated dengan Differencing Musiman pada Data Nonstasioner (Studi Kasus Dana Pihak Ketiga (DPK) Bank Umum Lima Provinsi di Pulau Jawa). *Jurnal Mahasiswa Statistik*, **2**(3), 201 – 204.

Soejoeti, Z. (1987). *Analisis Runtun Waktu*. Jakarta: Karunika.

Suryamah, E., B. N. Ruchjana, & K. Joebaedi. (2013). Kajian Matriks Bobot Lokasi Model Space Time Autoregresi (STAR). *Jurnal Matematika Integratif*, **9**(2), 119 – 130.

Wutsqa, D. U., Suhartono, & B. Sutijo. (2012). Aplikasi Model Generalized Space Time Autoregressive pada Data Pencemaran Udara di Kota Surabaya.*Pythagoras*, **7**(2), 17 – 30.