ESTIMASI PARAMETER MODEL *GENERALIZEDSPACE TIME AUTOREGRESSIVE* (GSTAR) MENGGUNAKAN METODE *GENERALIZED LEAST SQUARE* (GLS)

Suryani [1], DewiRetno Sari Saputro [2]
[1,2]Program Studi Matematika FMIPA Universitas Sebelas Maret
ssuryani658@gmail.com, dewiretnoss@staff.uns.ac.id

Abstrak

Data time series atau data runtun waktu merupakan suatu data terurut berdasarkan waktu. Dalam beberapa kasus, terdapat data yang tidak hanya dipengaruhi waktu namun juga dipengaruhi kondisi lokasi disekitarnya (pengaruh spasial). Model ruang waktu merupakan suatu model yang digunakan untuk menggambarkan dan meramalkan data runtun waktu yang memiliki pengaruh spasial. Salah satu model ruang waktu adalah model space time autoregressive (STAR). Model STAR memiliki asumsi yang harus dipenuhi yaitu lokasi amatan harus memiliki karakteristik homogen. Pengembangan model STAR adalah model GSTAR yang dapat diterapkan pada karakteristik lokasi amatan yang heterogen dengan parameter autoregressive dan parameter space tidak harus sama pada setiap lokasi. Estimasi parameter model GSTAR dengan respon multivariate dan sesatan yang saling berkorelasi menggunakan metode ordinary least square (OLS) menghasilkan estimator yang tidak efisien. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan lakukan estimasi parameter model GSTAR dengan metode GLS. Metode GLS merupakan generalisasi dari metode OLS, dimana metode GLS mempertimbangkan matriks variansi-kovariansi dalam estimasi parameter. Penelitian ini merupakan kajian teori, dengan menurunkan dan mengkaji ulang model GSTAR, mengkonstruksi dalam bentuk matriks dan melakukan estimasi parameter dengan GLS. Hasil kajian diperoleh estimator dengan metode GLS yang lebih efisien dari pada OLS dan ditunjukkan ketidakbiasan estimatornya.

Kata Kunci: *estimasi parameter; GLS; GSTAR; space-time.*

1. PENDAHULUAN

Dalam statistika terdapat beberapa jenis data, salah satunya yaitu data runtun waktu. Menurut Box *et al*. (1970), data runtun waktu merupakan suatu data terurut berdasarkan waktu. Data runtun waktu bias berupa data harian, mingguan, bulanan, maupun tahunan. Pada data runtun waktu pengamatan saat ini berkaitan dengan pengamatan sebelumnya. Terkadang data yang diperoleh dari suatu pengamatan tidak hanya dipengaruhi oleh waktu sebelumnya saja, namun dapat dimungkinkan juga data dipengaruhi oleh lokasi. Kondisi data runtun waktu yang dipengaruhi oleh lokasi disebut sebagai data ruang waktu (*space time*). Menurut Laamena (2017), *space time* adalah salah satu model yang menggabungkan unsure keterkaitan waktu dan lokasi pada suatu data runtun waktu dan lokasi.

Model yang menggabungkan interdependensi antar waktu dan lokasi disebut sebagai model *space time autoregressive* (STAR). Pfeifer & Deutsch (1980) mengembangkan model *space time* menjadi model STAR dengan asumsi semua lokasi yang diteliti memiliki karakteristik sama (homogen). Parameter *autoregressive* dan parameter *space* berlaku sama pada semua lokasi. Model STAR kurang sesuai apabila diterapkan pada lokasi yang memiliki karakteristik heterogen sehingga Borovkova *et al*. (2002) mengembangkan model STAR menjadi model *generalized space time autoregressive*

(GSTAR).Model GSTAR merupakan model yang dapat diterapkan pada karakteristik sampel lokasi heterogen, dengan parameter *autoregressive* dan parameter *space* tidak harus sama untuk setiap lokasi. Menurut Adam dkk. (2017) model *generalized space time autoregressive* (GSTAR) merupakan model data runtun waktu yang mempunyai keterkaitan antar lokasi dengan parameter yang tidak harus sama untuk waktu dan lokasi.

Mendiskusikan model GSTAR tidak terlepas dari mendiskusikan pula estimasi parameter model yang diperlukan untuk mengetahui karakteristik populasinya. Secara umum, estimasi parameter model GSTAR masih terbatas menggunakan metode *ordinary least square* (OLS). Beberapa penelitian terkait dilakukan oleh Karlinadkk. (2014) yakni menerapkan model GSTAR pada data TKI di Jawa Barat. Estimasi parameter model yang digunakandalampenelitiantersebutadalah OLS. Hal yang sama juga dilakukan oleh Laamena (2017) yaitu menerapkan model GSTAR untuk data gempa di wilayahLaut Banda dengan OLS sebagai metode estimasi parameter modelnya. Sementara penelitian lainnya yang berkaitan dengan estimasi parameter dilakukan oleh Iswati dkk. (2014) yakni komparasi metode OLS dan GLS untuk estimasi parameter model regresi linier, metode GLS dipergunakan untuk mengatasi asumsi klasik dalam model regresi yang tidak dapat dipenuhi. Asumsi yang tidak dapat dipenuhi adalah adanya autokorelasi pada galat. Penelitian juga dilakukan oleh Kurnia *et al.*(2015) yang menerapkan metode GLS untukestimasi parameter pada model GSTARX. Hasil penelitiannya menunjukkan bahwa estimasi parameter model menggunakan metode GLS lebih efisien dan memiliki nilai eror yang lebih kecil. Metode OLS untuk estimasi parameter model kurang sesuai apabila digunakan pada model dengan respon multivariat dan sesatan yang saling berkorelasi. Oleh karena itu dipergunakan metode *generalized least square* (GLS) (Zellner, 1962).

Penelitian yang telah disampaikan sebelumnya terkait estimasi parameter model GSTAR terbatas pada metode OLS sehingga pada penelitian ini dilakukan kajian ulang tentang estimasi parameter model GSTAR menggunakan metode GLS.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian yang berbasis teori dengan melakukan beberapa kajian teori melalui jurnal nasional maupun internasional dan buku teks terkait materi GSTAR dan metode estimasi parameternya. Adapun langkah penelitian yang dilakukan diuraikan sebagai berikut.

a. Melakukan kajian model STAR dan GSTAR, menurunkan ulang model GSTAR dan mengkonstruksinya dalambentuk matriks dan diringkas dalam model regresi linear.
b. Menuliskan dan melakukan interpretasi hasil langkah (a).
c. Melakukan kajian asumsi-asumsi yang harus dipenuhi dalam model STAR dan GSTAR dan menuliskan dan melakukan interpretasi hasil kajian.
d. Melakukan kajian metode estimasi parameter model regresi linier dengan OLS, melakukan kajian pengembangannya dengan metode GLS.
e. Menurunkan dan menentukanestimasi parameter model GSTAR dengan GLS melalui sifat matematisnya dan diperoleh estimator parameter model GSTAR.

f. Melakukan cek hasil (e) atas sifat estimator, dalam hal ini dilakukan cek ketidakbiasan estimator.
g. Melakukan analisis hasil rangkaian kajian sebelumnya, interpretasi, dan penarikkan simpulan.

3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Pada penelitian ini dibahas model GSTAR beserta estimasi parameter, khususnya pada model GSTAR yang memiliki sesatan saling berkorelasi antar persamaannya. Berikut pembahasan tentang model GSTAR dan estimasi parameter menggunakan metode GLS.

a. *Generalized Space Time Autoregressive* (GSTAR)

Model GSTAR merupakan pendekatan utama untuk menyelesaikan data ruang waktu dengan menghubungkan faktor waktu dan lokasi pada data multivariat. Secara matematis, notasi model GSTAR sama dengan model STAR. Menurut Anggraeni (2013) perbedaan yang mendasar antar model GSTAR dan model STAR terletak pada nilai parameter $\boldsymbol{\Phi}_{kl}$. Parameter $\boldsymbol{\Phi}_{kl}$ pada model STAR diasumsikan sama untuk semua lokasi, sedangkan model GSTAR memiliki parameter $\boldsymbol{\Phi}_{kl}$ yang berbeda pada setiap lokasi.

Jika diketahui $Z(t)$ dengan $t = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm T$ merupakan sebuah deret waktu multivariat dari *N* lokasi, maka model GSTAR $(p; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ dengan orde *autoregressive p* dan ordes pasial $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ditulis sebagai

$$\mathbf{Z}_i(t) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{N} \left[\boldsymbol{\Phi}_{k0}^{(i)} + \sum_{l=1}^{\lambda_p} \boldsymbol{\Phi}_{kl}^{(i)} \mathbf{W}^l \right] \mathbf{Z}_i(t-k) + \boldsymbol{e}_i(t) \quad (1)$$

dengan

$\mathbf{Z}_i(t)$: vektor pengamatan pada t waktu *(N x 1),*

$\boldsymbol{\Phi}_{k0}^{(i)}$: matriks diagonal parameter pada orde *autoregressive k* dan orde spasial 0 di setiap lokasi ke-i dengan elemen diagonal $(\phi_{k0}^{1}, \dots, \phi_{k0}^{N})$,

$\boldsymbol{\Phi}_{kl}^{(i)}$: matriks diagonal parameter pada orde *autoregressive k* dan ordes pasial 1 di setiap lokasi ke-i dengan elemen diagonal $(\phi_{kl}^{1}, \dots, \phi_{kl}^{N})$,

$\mathbf{W}^l$: matriks pembobot N x N untuk setiap orde spasial l, dipilih sedemikian sehingga $\mathrm{W}_{\mathrm{ii}}^{(\mathrm{l})} = 0$ dan $\sum_{\mathrm{i} \neq \mathrm{j}} \mathrm{W}_{\mathrm{ij}}^{(\mathrm{l})} = 1$,

$\mathrm{e}_{\mathrm{i}}(\mathrm{t})$: sesatan pada waktu ke-t dan lokasi ke-i.

Persamaan (1) merupakan persamaan umum GSTAR dengan orde *autoregressive p* dan orde spasial $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ yang dapat dinyatakan ke dalam bentuk matriks berikut.

$$\begin{pmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \\ \vdots \\ Z_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{k0}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi_{k0}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \phi_{k0}^{(N)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1(t-k) \\ Z_2(t-k) \\ \vdots \\ Z_N(t-k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{kl}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi_{kl}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \phi_{kl}^{(N)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & w_{12} & \cdots w_{1N} \\ w_{21} & 0 & \cdots w_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{N1} & w_{N2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1(t-k) \\ Z_2(t-k) \\ \vdots \\ Z_N(t-k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_N(t) \end{pmatrix} \tag{2}$$

dengan $\mathbf{V}_i(t) = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{w}_{ij}\, \mathbf{Z}_j(t)$ diperoleh

$$\begin{pmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \\ \vdots \\ Z_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset_{k0}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \emptyset_{k0}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \emptyset_{k0}^{(N)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1(t-k) \\ Z_2(t-k) \\ \vdots \\ Z_N(t-k) \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \emptyset_{kl}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \emptyset_{kl}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \emptyset_{kl}^{(N)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(t-k) \\ V_2(t-k) \\ \vdots \\ V_N(t-k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_N(t) \end{pmatrix} \tag{3}$$

Bentuk yang lebih sederhana dari vektor-matriks (3) adalah

$$\begin{pmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \\ \vdots \\ Z_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1(t-k) V_1(t-k) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots Z_N(t-k) V_N(t-k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \emptyset_{k0}^{(1)} \\ \emptyset_{kl}^{(1)} \\ \vdots \\ \emptyset_{k0}^{(N)} \\ \emptyset_{kl}^{(N)} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_N(t) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

b. Metode *Generalized Least Square* (GLS)

Seperti telah disebutkan sebelumnya, metode GLS merupakan pengembangan metode OLS. Metode GLS merupakan metode yang digunakan untuk estimasi parameter regresi dengan mempertimbangkan sesatan yang berkorelasi antar persamaan dengan nilai sesatan yang diperoleh dari estimator dengan OLS. Informasi adanya sesatan yang berkorelasi antar persamaan digunakan untuk perbaikan estimasi parameter model dengan GLS. Estimasi parameter model dengan metode GLS mempertimbangkan matriks variansi kovariansi sesatan. Menurut Greene (1997), teknis estimasi parameter dengan metode GLS dengan meminimumkan jumlah kuadrat sesatan(JKS) tergeneralisasi. Misalkan diberikan persamaan regresi berikut.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{5}$$

Masih menurut Grenee (1997), sifat estimator dengan metode GLS diuraikan sebagai berikut.

1) Jika $E(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$, maka $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ merupakan estimator tak bias untuk $\boldsymbol{\beta}$ yaitu

$$E(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta} \tag{6}$$

2) Jika $\text{cov}(\mathbf{Y}) = \mathbf{\Omega}$, maka matriks variansi-kovariansi $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ adalah

$$\text{cov}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \quad (7)$$

3) Jika $\boldsymbol{\varepsilon}$ mengikuti distribusi normal dengan *mean* nol dan variansi $\boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{I}_T$ atau dalam notasi matriks $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{I}_T)$, maka estimator $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ adalah *asymptotic* berdistribusi normal dengan *mean* $\boldsymbol{\beta}$ dan matriks variansi kovariansi $\text{cov}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$ yang dinotasikan dalam bentuk matriks yaitu $\widehat{\boldsymbol{\beta}} \sim N\left(\boldsymbol{\beta}, \text{cov}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})\right)$.

c. Estimasi Parameter Model *Generalized Space Time Autoregressive* dengan Metode GLS

Parameter model GSTAR, seperti yang ditunjukkan pada model (1), yang akan diestimasi adalah$\mathbf{\Phi}$. Estimasi parameter dilakukan dengan GLS karena pada model GSTAR dimungkinkan memiliki sesatan yang saling berkorelasi.

Misalkan persamaan GSTAR pada vektor-matriks (4) ditulis dalam model linear yaitu

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^*\mathbf{\Phi} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (8)$$

dengan $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_i(t)$,$\mathbf{Z}^* = [\mathbf{Z}_i(t-k)\mathbf{V}_i(t-k)]$, $\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} \emptyset_{k0}^{(i)} \\ \emptyset_{kl}^{(i)} \end{pmatrix}$, dan $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e}_i(t)$.

Pada model GSTAR dengan residual saling berkorelasi antar persamaan matriks variansi-kovariansinya adalah

$$E(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}^{\boldsymbol{T}}) = \boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{I}_T$$

atau

$$E(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}^{\boldsymbol{T}}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}\mathbf{I}_\text{T} & \sigma_{12}\mathbf{I}_\text{T} & \cdots\sigma_{1N}\mathbf{I}_\text{T} \\ \sigma_{21}\mathbf{I}_\text{T} & \sigma_{22}\mathbf{I}_\text{T} & \cdots\sigma_{2N}\mathbf{I}_\text{T} \\ \vdots & \vdots & \ddots \quad \vdots \\ \sigma_{N1}\mathbf{I}_\text{T} & \sigma_{N1}\mathbf{I}_\text{T} & \cdots\sigma_{NN}\mathbf{I}_\text{T} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Apabila pada matriks (9) dikaitkan dengan notasi kronecker, matriks (9) dapat dituliskan sebagai

$$E(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}^{\boldsymbol{T}}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots\sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots\sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots \quad \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N1} & \cdots\sigma_{NN} \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_\text{T} = \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_\text{T} = \mathbf{\Omega} \quad (10)$$

dengan $\mathbf{\Sigma}$ adalah matriks kovariansi sesatan yang berkorelasi, $\mathbf{I}_\text{T}$ adalah matriks identitas berukuran $T \times T$, dan $\otimes$ adalah perkalian kronecker**.**

Berikut adalah uraian tentang perkalian kronecker. Misalkan diberikan matriks **A** dan **B**, perkalian kronecker matriks **A** dan **B** atau $\mathbf{A}\otimes\boldsymbol{B}$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap unsur **A** dengan unsur **B** kemudian menggabungkan keduanya. Menurut Greene (2003) jika terdapat matriks **A** berukuran $m \times m$ dan matriks **B** berukuran $n \times n$, maka berlaku $(\mathbf{A}\otimes\boldsymbol{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}$ sehingga perkalian kronecker pada matriks (10) berlaku $\mathbf{\Omega}^{-1} = \mathbf{\Sigma}^{-1} \otimes \mathbf{I}$.

Uraian berikut merupakan langkah estimasi model GSTAR dengan GLS. Dengan mengingat sifat estimator dengan metode GLS pada (b) tentang matriks variansi-kovariansi, $\left(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}$, dalam hal ini $\mathbf{X}$ adalah$\boldsymbol{\varepsilon}$. Invers matriks variansi-kovariansi digunakan untuk meminimumkan *generalized sum of square (GSS)*. Secara matematis, *GSS* dituliskan $\boldsymbol{\varepsilon}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$ dengan $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Z} - \mathbf{Z}^{*}\boldsymbol{\Phi}$ seperti yang ditunjukkan pada model(8). Uraian GSS lebih lanjut adalah

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} &= \left(\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^{*}\boldsymbol{\Phi}\right)^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\left(\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^{*}\boldsymbol{\Phi}\right) \\
&= \left(\mathbf{Z}^{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{T}}\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\right)\boldsymbol{\Omega}^{-1}\left(\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^{*}\boldsymbol{\Phi}\right) \\
&= \left(\mathbf{Z}^{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{T}}\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\right)\left(\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z} - \boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^{*}\boldsymbol{\Phi}\right) \\
&= \left(\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^{*}\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{T}}\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z} + \boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{T}}\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^{*}\boldsymbol{\Phi}\right) \\
&= \left(\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^{*}\boldsymbol{\Phi} - \left(\boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{T}}\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}\right)^{T} + \boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{T}}\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^{*}\boldsymbol{\Phi}\right) \\
&= \left(\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^{*}\boldsymbol{\Phi} - \mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^{*}\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{T}}\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^{*}\boldsymbol{\Phi}\right) \\
&= \left(\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z} - 2\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^{*}\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{T}}\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^{*}\boldsymbol{\Phi}\right).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Seperti pada umumnya estimasi dengan OLS, dengan GLS teknik yang sama dilakukan yaitu meminimumkan GSS dengan menentukan turunan pertama $\boldsymbol{\varepsilon}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$ terhadap $\boldsymbol{\Phi}$, yakni **p**ersamaan (11) diturunkan terhadap parameter $\boldsymbol{\Phi}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\right)}{\partial(\boldsymbol{\Phi})} &= \frac{\partial\left(\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z} - 2\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^{*}\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{T}}\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^{*}\boldsymbol{\Phi}\right)}{\partial(\boldsymbol{\Phi})} \\
&= \mathbf{0} - 2\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z} + \mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^{*}\emptyset + (\emptyset^{\mathbf{T}}\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^{*})^{\mathbf{T}} \\
&= -2\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z} + \mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^{*}\boldsymbol{\Phi} + \mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^{*}\boldsymbol{\Phi} \\
&= -2\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z} + 2\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^{*}\boldsymbol{\Phi}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

selanjutnya *GSS* akan minimum apabila dipenuhi $\frac{\partial\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\right)}{\partial(\boldsymbol{\Phi})} = 0$ sehingga dari persamaan (12) diperoleh

$$
\begin{aligned}
-2\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z} + 2\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^{*}\boldsymbol{\Phi} &= \mathbf{0} \\
\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^{*}\boldsymbol{\Phi} &= \mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}
\end{aligned}
$$

atau

$$
\hat{\boldsymbol{\Phi}} = \left(\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^{*}\right)^{-1}\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z} \tag{13}
$$

Estimator yang diperoleh pada persamaan (13) belum dapat dijamin bahwa estimatornya minimal oleh karena itu perlu dijamin minimalnya dengan turunan kedua yang bernilai positif. Turunan kedua persamaan (12) terhadap $\boldsymbol{\Phi}$ adalah

$$
\frac{\partial\left(\partial\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\right)\right)}{\partial(\boldsymbol{\Phi})} = \frac{d(-2\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z} + 2\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^{*}\boldsymbol{\Phi})}{d(\boldsymbol{\Phi})} = 2\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^{*}. \tag{14}
$$

Persamaan (14) menunjukkan hasil positif sehingga benar bahwa estimator (13) dijamin minimalnya. Karena $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{T}}$, estimator $\boldsymbol{\Phi}$ dapat juga ditulis sebagai

$$
\hat{\boldsymbol{\Phi}} = \left(\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{Z}^{*}\right)^{-1}\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{Z}
$$

Berdasarkan sifat-sifat estimator yang sudah dijelaskan sebelumnya, $E(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^*\boldsymbol{\Phi}$ sehingga $\widehat{\boldsymbol{\Phi}}$ merupakan estimator tak bias untuk $\boldsymbol{\Phi}$ yang diuraikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} E(\widehat{\boldsymbol{\Phi}}) &= \mathbf{E}\left(\left(\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^*\right)^{-1}\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}\right) \\ &= \left(\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^*\right)^{-1}\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\,\mathbf{E}(\mathbf{Z}) \\ &= \left(\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^*\right)^{-1}\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^*\boldsymbol{\Phi} \\ &= \boldsymbol{\Phi} \end{aligned}$$

dan dari persamaan (7), matriks variansi kovariansi ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(\widehat{\boldsymbol{\Phi}}) &= \mathrm{cov}\left(\left(\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^*\right)^{-1}\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}\right) \\ &= \left(\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^*\right)^{-1}\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathrm{cov}(\mathbf{Z})\left(\left(\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^*\right)^{-1}\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\right)^{\boldsymbol{T}} \\ &= \left(\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^*\right)^{-1}\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^*\left(\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^*\right)^{-1} \\ &= \left(\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^*\right)^{-1} \end{aligned}$$

4. SIMPULAN

Dari hasil penelitian dan pembahasan diperoleh dua kesimpulan berikut.

a. Estimator model GSTAR dengan metode GLS, ditunjukkan pada persamaan (13) yaitu$\widehat{\boldsymbol{\Phi}}_{GLS} = \left(\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}^*\right)^{-1}\mathbf{Z}^{*\mathbf{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}$.
b. Estimator yang diperoleh bersifattak bias.

5. DAFTAR PUSTAKA

Adam, I., Kusnandar, D., &Perdana, H. (2017). Penerapan Model GSTAR(1,1) untuk Data CurahHujan. *JurnalBimaster*,**6**(3), 159 – 166.

Anggraeni, D., Prahutama, A., &Andari, S. (2013). Aplikasi*Generalized Space Time Autoregressive* (GSTAR) padaPemodelan Volume KendaraanMasukTol Semarang. *Media Statistika*, **6**(2), 71–80.

Borovkova, S.A., Lopuha, H.P., &Ruchjana, B.N. (2002). Generalized S-TAR with Random Weights. *Proceeding of the 17th International Workshop on Statistical Modeling*. Chania-Greece.

Box, G. E. P., Jenkins, G. M., &Reinsel, G. C. (1970). *Time Series Analysis Forecasting and Control Fourth Edition*.New Jersey: John Willey and Sons.

Greene, W. H. (1997). *Econometric Analysis Third Edition*. New York University, Prentice-Hall International Inc.

Greene, W. H. (2003). *Econometric Analysis Fifth Edition*. New York University, Prentice-Hall International Inc.

Iswati, H., Rahmat, S., &Maiyastri. (2014). PerbandinganPenduga*Ordinary Least Squares* (OLS) dan*Generalized Least Squares* (GLS) pada Model Regresi Linier denganRegresorBersifatStokastikdanGalat Model Berautokorelasi. *JurnalMatematika UNAND*, **3**(4), 168 – 176.

Karlina, H.D., Cahyandari, R., &Awalluddin, A.S. (2014). Aplikasi Model *Generalized Space Time Autoregressive* (GSTAR) pada Data Jumlah TKI Jawa Barat denganPemilihanLokasiBerdasarkanKlaster DBSCAN. *JurnalMatematikaIntegratif*, **10**(1), 37–48.

Kurnia, J.D., Setiawan, &Rahayu, S.P. (2015). The Simulation Studies for Generalized Space Time Autoregressive-X (GSTARX) Model. *Presented* atThe International Conference on Science and Science Education, Salatiga, 1 August, 2015.

Lameena, N.S. (2017). Pendekatan Model Generalized Space Time Autoregressive (GSTAR) untukPemodelan Data Gempa. *ProsidingSeminar NasionalInovasiTeknologi,*Prosiding Seminar NasionalInovasiTeknologi–SNITek 2017, ISSN 2580-5495, 50-60,Jakarta.

Pfeifer, P.E. & Deutsch, S. J. (1980). A Three-Stage Iterative Procedure for Space Time Modelling. *Technometrics*, **22**(1), 35–47.

Zellner, A. (1962). An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regression Equations and Tests for Aggregation Bias. *Journal of the American Statistical Association*, **57**, 348–368.