# MODEL RUNTUN WAKTU *VECTOR AUTOREGRESSIVE MOVING AVERAGE WITH EXOGENOUS VARIABLE* (VARMAX)

**Rizcka Indah Hani Pratama[1], Dewi Retno Sari Saputro[2]**
[1,2]Program Studi Matematika FMIPA Universitas Sebelas Maret
rizckaindahanip@gmail.com[1], dewiretnoss@staff.uns.ac.id[2]

***Abstrak***

*Runtun waktu merupakan serangkaian pengamatan terhadap suatu variabel yang diamati dari waktu ke waktu secara berurutan dalam waktu yang tetap.Model dasar runtun waktu yang hanya melibatkan satu variabel amatan adalah model autoregressive (AR).Perluasan model AR adalah model vector autoregressive (VAR) yang melibatkan lebih dari satu variabel. Model VAR dapat dikembangkan menjadi model vector autoregressive moving average (VARMA) dengan menggabungkan model VAR dan vector moving average (VMA). Model vector autoregressive moving average with exogenous variable (VARMAX) merupakan kasus khusus dari model VARMA dengan penambahan variabel eksogen ke dalam model yang memuat variabel endogen. Variabel eksogen dalam model VARMAX ditentukan di luar model dan sifatnya memengaruhi variabel endogen dalam model namun tidak berlaku sebaliknya.Penelitian ini bertujuan untuk melakukan kajian ulang model VARMAX dan estimasi parameternya dengan metode yang digunakan adalah kajian literatur dari berbagai sumber.least square (LS).Hasil kajian ini diperoleh model VARMAX dan asumsinya serta estimasi parameternya dengan LS.*

**Kata Kunci:** *least square (LS); model VARMA; model VARMAX; runtun waktu.*

## 1. PENDAHULUAN

Runtun waktu merupakan serangkaian pengamatan terhadap suatu variabel yang diamati dari waktu ke waktu dan dicatat secara berurutan menurut urutan kejadiannya dan interval waktu yang tetap (Walpole, 1986).Menurut John (2005) runtun waktu merupakan sekumpulan data hasil observasi secara teratur dari waktu ke waktu.Berdasarkan sejarah nilai observasinya, runtun waktu dibagi menjadi dua yaitu runtun waktu deterministik dan stokastik.Runtun waktu deterministik adalah runtun waktu yang keadaan dimasa datang dapat diramalkan secara pasti dan tidak memerlukan penyelidikan lebih lanjut. Sedangkan runtun waktu stokastik adalah runtun waktu dimana observasi yang lalu hanya dapat menunjukkan struktur probabilistik keadaan yang akan datang suatu runtun waktu (Soejoeti, 1987).

Metode runtun waktu adalah metode peramalan dengan menganalisa pola hubungan antara variabel yang akan diperkirakan dengan variabel waktu. Pada analisis runtun waktu, data yang akan datang dipengaruhi oleh data masa lalu. Tujuan analisis runtun waktu antara lain memahami dan menjelaskan mekanisme tertentu, meramalkan suatu nilai di masa depan, dan mengoptimalkan sistem kendali (Makridakis & Wheelwright, 1999). Pemodelan runtun waktu dikaitkan dengan proses peramalan suatu karakteristik tertentu pada periode yang akan datang. Peramalan merupakan suatu pendugaan keadaan di masa yang akan datang berdasarkan keadaan di masa lalu. Peramalan data runtun waktu dapat dilakukan untuk model runtun waktu univariat dan multivariat. Model runtun waktu univariatadalah model yang hanya melibatkan satu variabel amatan, sedangkan model runtun waktu multivariat adalah model yang melibatkan lebih dari satu variabel amatan secara bersama-sama.

Model dasar runtun waktu univariat yang biasa dikenal model *autoregressive* (AR).Model AR merupakan model regresi terhadap dirinya sendiri (Cryer, 1986). Model AR adalah salah satu model linear khusus proses stasioner dari metode Box-Jenkins. Selain model AR, model *moving average* (MA) juga merupakan model linear khusus proses stasioner dari metode Box-Jenkins.Metode Box-Jenkins digunakan untuk data univariat yang didalamnya diperlukan konsep kestasioneran data.Box-Jenkins (1970) memperkenalkan model runtun waktu yang biasa digunakan untuk memodelkan yang disebut model *autoregressive moving average* (ARMA).Model ARMA merupakan gabungan dari model AR dan model MA.

Penggunaan model runtun waktu univariat memotivasi para peneliti untuk memperluas pada model runtun waktu multivariat. Hal ini diharapkan dapat meningkatkan keakuratan dalam proses peramalan dengan melibatkan beberapa variabel yang berhubungan dalam model.Salah satu model runtun waktu multivariat yang sering digunakan adalah model *vector autoregressive* (VAR).Model VAR merupakan perluasan dari model AR yang melibatkan lebih dari satu variabel amatan.Model VAR pertama kali diperkenalkan oleh Sims (1980)sebagai pengembangan dari Granger.Granger menyatakan jika dua variabel misalkan $x$ dan $y$ memiliki hubungan kausal dimana $x$ memengaruhi $y$ maka informasi masa lalu $x$ dapat membantu memprediksi$y$. VAR merupakan suatu sistem persamaan dinamis, dengan pendugaan suatu peubah pada periode-periode tertentu tergantung pada pergerakan peubah tersebut dan peubah-peubah lain yang terlibat dalam sistem pada periode-periode sebelumnya (Enders 1995; Bank of England2004). Menurut Widarjono (2007) dan Gujarati (2012) salah satu kelebihan model VAR adalah tidak perlu menentukan variabel endogen dan eksogen karena semua variabel dalam model adalah variabel endogen. Gabungan antara model VAR dan model *vector moving average* (VMA) yang melibatkan lebih dari satu variabel amatan disebut model *vector autoregressive moving average* (VARMA).Model VARMA merupakan model ARMA univariat yang digeneralisasi untuk menangani kasus runtun waktu multivariat.Model VARMA mempunyai keunggulan yaitu tidak hanya dapat meramalkan lebih dari satu data sekaligus tetapi juga bisa melihat keterkaitan antar data.Variabel pada model VARMA hanya variabel endogen. Namun, dalam prakteknya, dalam analisis runtun waktu seringkali variabel endogen dipengaruhi oleh variabel input lainnya yang ditentukan diluar model yang disebut variabel eksogen.

Model VARMAX merupakan kasus khusus dari model VARMA dengan penambahan variabel eksogen ke dalam model yang melibatkan variabel endogen.Variabel eksogen dalam model VARMAX ditentukan di luar model dan sifatnya memengaruhi variabel endogen dalam suatu model.Sedangkan variabel endogen dalam model VARMAX ditentukan di dalam model dan dapat dipengaruhi oleh variabel eksogen atau variabel endogen lainnya.Model VARMAX juga dapat digunakan untuk menjelaskan hubungan antara variabel endogen dengan variabel eksogen.Dalam suatu model, nilai parameter tidak diketahui sehingga perlu dilakukan estimasi parameternya.Estimasi parameter merupakan suatu metode untuk menduga nilai karakteristik populasi berdasarkan nilai karakteristik sampel.Pada umumnya estimasi parameter yang digunakan dalam model VARMAX yaitu metode *least square* (LS).

Beberapa penelitian pemodelan runtun waktu multivariatyang hanya melibatkan variabel endogen telah dilakukan. Diantaranya, Diah(2008) menggunakan analisis VAR untuk meramalkan harga saham PT. Indofood Sukses Makmur Indoinesia Tbk, Yonathan (2003) penelitian analisis VAR terhadap korelasi antara pendapatan nasional dan investasi Pemerintah di Indonesia, Athanasopoulos (2006) tentang *VARMA versus VAR for macroeconomic application*, Kascha (2007) tentang *a comparison of estimation methods for vector autoregressive moving average models*, Dufour(2002) tentang *linear estimation of weak VARMA models with a macroeconomic application,* Okky dan Setiawan (2012) pemodelan indeks harga saham gabungan (IHSG), *kurs*, dan harga minyak dunia dengan pendekatan *vector autoregressive*, *forecasting with VARMA models* (Lutkepohl, 2004), *a generalized least square estimation method VARMA models* (De Frutos & Serrano, 2002).

Mengingat bahwa selain variabel endogen, ada variabel lain yang memengaruhi variabel tersebut, yaitu variabel eksogen. Model yang melibatkan 2 variabel tersebut diantaranya model VARX, VARMAX, fungsi transfer multivariat. Penelitian tersebutanta lain, pemodelan fungsi transfer *multiple* pada kasus data curah hujan (Faturrahman, 2009), *a fast estimation method for the vector autoregressive moving average model with exogenous variables* (Spliid, 1983), dan pemodelan *vector autoregressive* X (VARX) untuk meramalkan jumlah uang beredar di Indonesia (Rosyidah, 2017) .Pada artikel ini dikaji ulang model VARMAX yang meliputi asumsi model dan estimasi parameternya.Kajian ini merupakan pengembangan dari kajian yang dituliskan Spliid (1983).

## 2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian berbasis teori dengan melakukan kajian teori dari beberapa jurnal, artikel, dan buku yang dapat mendukung pembahasan tentang estimasi parameter model VARMAX dengan beberapa variabel endogendan penambahan variabel eksogen ke dalam model.Berikut langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini.

a. Mengkaji ulang model VARMAX dengan mempelajari beberapa penelitian seperti model VAR, VARMA, dan VARMAX.
b. Mengkonstruksi ulang model VARMAX, menuliskan ulang asumsi yang harus dipenuhi.
c. Menurunkan ulang dan membuktikan estimasi parameter model VARMAX dengan LS.
d. Melakukan analisis hasil dari langkah (a)-(c), interpretasi, dan melakukan penarikkan simpulan.

## 3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Pada hasil penelitian dan pembahasan, dibahas mengenai model *vector autoregressive moving average with exogenous variables* (VARMAX) dan menurunkan ulang estimasi parameternya dengan metode *least square* (LS).

**a. Model *Vector Autoregressive Moving Average with Exogenous Variable* (VARMAX)**

Model VARMAX $(p,q,r)$merupakan kasus khusus dari model VARMA $(p,q)$. Menurut Spliid (1983) model VARMAX $(p,q,r)$ dituliskan sebagai

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{B})\boldsymbol{y_t} = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{B})\boldsymbol{x_t} + \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{B})\boldsymbol{a_t} \qquad (1)$$

dimana $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{\phi_1 B} - \cdots - \boldsymbol{\phi_p B^p}$, $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{\theta_1 B} + \cdots + \boldsymbol{\theta_q B^q}$, $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\beta_0} + \boldsymbol{\beta_1 B} + \cdots + \boldsymbol{\beta_{r-1} B^{r-1}}$, dengan $\boldsymbol{\phi}_p(\boldsymbol{B})$dan $\boldsymbol{\theta_q}(\boldsymbol{B})$adalah matriks *autoregressive* (AR) dan *moving average* (MA) polinomial berorde $p$ dan $q$ dengan matriks *nonsingular* berukuran $k \times k$, $\boldsymbol{\beta_r}(\boldsymbol{B})$adalah matriks polinomial berukuran $k \times m$. $\boldsymbol{y_t}$merupakan vektor runtun waktu multivariatyang terkoreksi nilai rata-ratanya dan matriks varians kovarians $\boldsymbol{\Sigma}$ dari $\boldsymbol{a_t}$adalah definit positif.Secara umum model (1) juga dapat dituliskan sebagai

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\delta U} + \boldsymbol{a} \qquad (2)$$

dengan

$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_{1,1} & \cdots & y_{1,T} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{k,1} & \cdots & y_{k,T} \end{bmatrix} = \{y_{ij}\}$,matriks berukuran $k \times T$, dengan

$i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, T$;

$\boldsymbol{a} = \{a_{ij}\}, i = 1, \dots k, j = 1, \dots, T$;

$\boldsymbol{x} = \{x_{ij}\}, i = 1, \dots k, j = 1, \dots, m$;

$\boldsymbol{\delta} = (\boldsymbol{\theta_1}, \boldsymbol{\theta_2}, \dots, \boldsymbol{\Theta_q}, \boldsymbol{\phi_1}, \boldsymbol{\phi_2}, \dots, \boldsymbol{\Phi_p}, \boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2}, \dots, \boldsymbol{_{r-1}})$, matriks berukuran $k \times (kq + kp + mr)$;

$\boldsymbol{U} = (-\boldsymbol{A}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$, matriks berukuran $(kq + kp + mr) \times T$;

$\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{B_y}, \boldsymbol{B^2}_{\boldsymbol{y}}, \dots, \boldsymbol{B^p}_{\boldsymbol{y}})$

$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{B_a}, \boldsymbol{B^2}_{\boldsymbol{a}}, \dots, \boldsymbol{B^q}_{\boldsymbol{a}})$

$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{B_x}, \dots, \boldsymbol{B^{r-1}}_{\boldsymbol{x}})$

**b. Asumsi Model *VectorAutoregressive Moving Average with Exogenous Variable* (VARMAX)**

Asumsi model VARMAX yang harus dipenuhi,yaitu

**3.b.1 Stasioneritas**

Stasioneritas berarti bahwa tidak ada perubahan yang signifikan pada data.Fluktuasi data berada disekitar suatu nilai rata-rata yang konstan, tidak tergantung pada waktu dan varians dari fluktuasi tersebut (Makridakis, 1999). Data yang tidak stasioner dilakukan modifikasi untuk menghasilkan data yang stasioner.Apabila data tidak stasioner dalam rata-ratadilakukan proses pembedaan(*differencing)*, sedangkan apabila data tidak stasioner dalam varians dilakukan transformasi Box-Cox agar diperoleh varians yang konstan.

**3.b.2 Residual *white noise***

Menurut (Pankratz, 1994) proses *white noise* memiliki sifat-sifat antara lain deretnya terdiri dari peubah acak yang berurutan tidak saling berkorelasi, $E(Z_t) = 0$ untuk setiap waktu, $Var(Z_t) = \sigma^2$ untuk setiap waktu dan $\gamma_h = Cov(Z_{t+h}, Z_t) = 0$untuk $h \neq 0$.

**3.b.3 Multinormal Residual**

Multinormal residual digunakan untuk melihat apakah residual berdistribusi normal atau tidak.Pengujian asumsi multinormal dilakukan dengan uji Chi-Square atau dengan melihat plot multinormal residual.Jikaplot cenderung membentuk garis lurus maka residual data sudah berdistribusi normal.

**3.b.4 Homokedastisitas Residual**

Asumsi homokedastisitas residual berarti adanya homogenitas varians dari residual.Apabila asumsi ini tidak terpenuhi berakibat pada pengujian hipotesa sehingga kesimpulan dari pengujian hipotesa menjadi tidak valid. Salah satu cara untuk mengetahui ada tidaknya heterokedastisitas dengan melakukan uji *autoregressive conditional heterocedasticity* (ARCH).

**c. Estimasi Parameter Model *VectorAutoregressive Moving Average with Exogenous Variable* (VARMAX)**

Estimasi parameter merupakan suatu metode untuk menduga nilai karakteristik populasi berdasarkan nilai karakteristik sampel.Malan (2007) menggunakan metode LS untuk mengestimasi parameter model VAR dan VARMA. Begitu juga model VARMAX menggunkan metode LS untuk estimasi parameternya. Masih menurut Malan (2007), dalam estimasi parameternya digunakan operasi Kronecker *product* dan *vector product.*Definisi Kronecker *product* dituliskan bahwa diberikan $\boldsymbol{A}$matriks berukuran $m \times n$ dan $\boldsymbol{B}$matriks berukuran $p \times q$, didefinisikan matriks $mp \times nq$ sebagai

$$\begin{bmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{1n}\boldsymbol{B} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{mn}\boldsymbol{B} \end{bmatrix}$$

disebut Kronecker *product* dari $\boldsymbol{A}$dan $\boldsymbol{B}$dan dituliskan sebagai $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$. Sementara teorema *vector product* adalah

$$vec(\boldsymbol{ABC}) = (\boldsymbol{B}^T \otimes \boldsymbol{A}) vec(\boldsymbol{C}).$$

Untuk mengestimasi $vec(\boldsymbol{\delta})$dengan metode estimasi LS multivariat perlu memilih estimatoryangmeminimumkan jumlah kuadrat dari pembeda antara nilai observasi (**y**) dan nilai estimasi ($\boldsymbol{\delta U}$), dituliskan sebagai$vec(\boldsymbol{a}) = vec(\boldsymbol{y}) - vec(\boldsymbol{\delta U})$. Menurut Draper & Smith (1998) jumlah kuadrat dinotasikan dengan $S(\ )$. Parameter dalam model VARMAX adalah$\boldsymbol{\delta}$. Dalam menentukan estimasi parameter menggunakan metode LS, berarti meminimumkan fungsi $S(vec(\boldsymbol{\delta}))$ yang ditulis sebagai

$$
\begin{aligned}
S\big(vec(\boldsymbol{\delta})\big) &= vec(\boldsymbol{a})'(\boldsymbol{I_T}\otimes\boldsymbol{\Sigma_a})^{-1}vec(\boldsymbol{a})\\
&= vec(\boldsymbol{a})'(\boldsymbol{I_T}\otimes\boldsymbol{\Sigma_a^{-1}})vec(\boldsymbol{a})\\
&= vec(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\delta U})'(\boldsymbol{I_T}\otimes\boldsymbol{\Sigma_a^{-1}})vec(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\delta}\,\langle)\\
&= [vec(\boldsymbol{y})-vec(\boldsymbol{\delta U})]'(\boldsymbol{I_T}\otimes\boldsymbol{\Sigma_a^{-1}})\\
&\quad\ [vec(\boldsymbol{y})-vec(\boldsymbol{\delta U})]\\
&= [vec(\boldsymbol{y})-(\boldsymbol{U}'\otimes\boldsymbol{I_k})vec(\boldsymbol{\delta})]'\\
&\quad\ \left(\boldsymbol{I_T}\otimes\boldsymbol{\Sigma_a^{-1}}\right)\left[vec(\boldsymbol{y})-\left(\boldsymbol{U}'\otimes\boldsymbol{I_k}\right)vec(\boldsymbol{\delta})\right] \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Persamaan (3) dapat disederhanakan, mengingat definisi Kronecker *product* dan teorema *vector product*sehingga persamaan (3) dapat dituliskan sebagai

$$
\begin{aligned}
S\big(vec(\boldsymbol{\delta})\big) &= vec(\boldsymbol{y})'(\boldsymbol{I_T}\otimes\boldsymbol{\Sigma_a^{-1}})vec(\boldsymbol{y})\\
&+vec(\boldsymbol{\delta})'(\boldsymbol{U}'\otimes\boldsymbol{I_k})'(\boldsymbol{I_T}\otimes\boldsymbol{\Sigma_u^{-1}})(\boldsymbol{U}'\otimes\boldsymbol{I_k})vec(\boldsymbol{\delta})\\
&-2vec(\boldsymbol{\delta})'(\boldsymbol{U}'\otimes\boldsymbol{I_k})'(\boldsymbol{I_T}\otimes\boldsymbol{\Sigma_a^{-1}})vec(y)\\
&= vec(\boldsymbol{y})'(\boldsymbol{I_T}\otimes\boldsymbol{\Sigma_a^{-1}})vec(\boldsymbol{y})\\
&\quad +vec(\boldsymbol{\delta})'(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{\Sigma_a^{-1}})(\boldsymbol{U}'\otimes\boldsymbol{I_k})\,vec(\boldsymbol{\delta})\\
&\quad -2vec(\boldsymbol{\delta})'(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{\Sigma_a^{-1}})vec(y)\\
&= vec(\boldsymbol{y})'(\boldsymbol{I_T}\otimes\boldsymbol{\Sigma_a^{-1}})vec(\boldsymbol{y})\\
&\quad +vec(\boldsymbol{\delta})'(\boldsymbol{UU}'\otimes\boldsymbol{\Sigma_a^{-1}})\,vec(\boldsymbol{\delta})\\
&-2vec(\boldsymbol{\delta})'(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{\Sigma_a^{-1}})vec(y) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Dengan metode LS, dilakukan estimasi parameter $\boldsymbol{\delta}$dengan langkah meminimumkan persamaan (4). Persamaan (4) akan minimum apabila dipenuhi $\frac{\partial(S(vec(\boldsymbol{\delta})))}{\partial vec(\boldsymbol{\delta})}=0$dan $\frac{\partial^2(S(vec(\boldsymbol{\delta})))}{\partial vec(\boldsymbol{\delta})\partial(vec(\boldsymbol{\delta})^{'})}>0$. Berikut perhitungannya

$$\frac{\partial\big(S(vec(\boldsymbol{\delta}))\big)}{\partial vec(\boldsymbol{\delta})}=0$$

$$\left[\left(\boldsymbol{UU}^{'}\otimes\boldsymbol{\Sigma_a^{-1}}\right)+\left(\boldsymbol{UU}^{'}\otimes\boldsymbol{\Sigma_a^{-1}}\right)^{'}\right]vec(\boldsymbol{\delta})-2(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{\Sigma_a^{-1}})vec(\boldsymbol{y})=0$$

$$\left[\left(\boldsymbol{UU}^{'}\otimes\boldsymbol{\Sigma_a^{-1}}\right)+\left(\boldsymbol{UU}^{'}\otimes\boldsymbol{\Sigma_a^{'}}\right)^{-1}\right]vec(\boldsymbol{\delta})-2(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{\Sigma_a^{-1}})vec(\boldsymbol{y})=0$$

$$\left[\left(\boldsymbol{UU}^{'}\otimes\boldsymbol{\Sigma_a^{-1}}\right)+\left(\boldsymbol{UU}^{'}\otimes\boldsymbol{\Sigma_a^{-1}}\right)\right]vec(\boldsymbol{\delta})-2(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{\Sigma_a^{-1}})vec(\boldsymbol{y})=0$$

$$2(\boldsymbol{UU}'\otimes\boldsymbol{\Sigma_a^{-1}})vec(\boldsymbol{\delta})-2\left(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{\Sigma_a^{-1}}\right)vec(\boldsymbol{y})=0 \qquad (5)$$

$$\left(\boldsymbol{UU}^{'}\otimes\boldsymbol{\Sigma_a^{-1}}\right)vec(\widehat{\boldsymbol{\delta}})=(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{\Sigma_{\_}^{-1}})vec(\boldsymbol{y})$$

$$vec(\widehat{\boldsymbol{\delta}})=\left(\boldsymbol{UU}'\otimes\boldsymbol{\Sigma_a^{-1}}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{\Sigma_a^{-1}}\right)vec(\boldsymbol{y})$$

$$vec(\widehat{\boldsymbol{\delta}})=\left[(\boldsymbol{UU}')^{-1}\otimes\boldsymbol{\Sigma_a})\left(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{\Sigma_a^{-1}}\right)\right]vec(\boldsymbol{y})$$

$$vec(\widehat{\boldsymbol{\delta}})=[(\boldsymbol{UU}')^{-1}\boldsymbol{U}\otimes\mathbf{I}_k)]vec(\boldsymbol{y})$$

$$vec(\widehat{\boldsymbol{\delta}})=vec(\boldsymbol{yU}'(\boldsymbol{UU}')^{-1})$$

$$\widehat{\boldsymbol{\delta}}=\boldsymbol{yU}^{'}(\boldsymbol{UU}^{'})^{-1} \qquad (6)$$

Selanjutnya dibuktikan bahwa $\frac{\partial^2(S(vec(\boldsymbol{\delta})))}{\partial vec(\boldsymbol{\delta})\partial(vec(\boldsymbol{\delta})^{'})}>0$. Perhitungan dilakukan dengan menurunkan persamaan (5) terhadap $vec(\boldsymbol{\delta})$. $vec(\boldsymbol{\delta})'$diperoleh

$$\frac{\partial^2(S(vec(\boldsymbol{\delta})))}{\partial vec(\boldsymbol{\delta})\partial(vec(\boldsymbol{\delta})')} = 2\left(\boldsymbol{UU}'\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{a}}^{-1}\right) > 0$$

Sehingga terbukti bahwa $\frac{\partial^2(S(vec(\boldsymbol{\delta})))}{\partial vec(\boldsymbol{\delta})\partial(vec(\boldsymbol{\delta})')} > 0$.

Jadi diperoleh estimator $\boldsymbol{\delta}$sebagai$\hat{\boldsymbol{\delta}} = \boldsymbol{yU}'(\boldsymbol{UU}')^{-1}$.

## 4. SIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan diperoleh 2 simpulan berikut.

a. Model VARMAX merupakan kasus khusus dari model VARMA dengan penambahan variabel eksogen ke dalam model VARMAX yang memuat variabel endogen. Model VARMAX $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$dituliskan

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\delta U} + \boldsymbol{a}$$

dengan asumsi stasioner, residual *white noise*, multinormal residual, dan homokedastisitas residual.

b. Estimasi parameter model VARMAX dengan metode LS. Metode LS dilakukan dengan meminimumkan jumlah kuadrat dari pembeda antara nilai observasi dan nilai estimasi. Estimator parameter $\boldsymbol{\delta}$untuk model VARMAX adalah

$$\hat{\boldsymbol{\delta}} = \boldsymbol{yU}'(\boldsymbol{UU}')^{-1}$$

## 5. DAFTAR PUSTAKA


Agus Widarjono. (2007). *Ekonometrika Teori dan Aplikasi*. Yogyakarta: Ekonisia FE UII.

Athanasopoulos, G. &F. Vahid.(2006). VARMA versus VAR for Macroeconomic Forecasting. Department of Econometrics and Business Statistics, Monash University, Australia.

Bank of England.(2004). Vector Autoregression Models.*Economic Models at the Bank of England*.

Box, G.E.P. & Jenkins, G.M. (1970).*Time Series Analysis Forecasting and Control*. San Fransisco: Holden-Day.

Cryer, Jonathan D. (1986). *Time Series Analysis*. Boston: PWS Publishers.

De Frutos, R.F. & Serrano, G.R. (2002).A Generalized Least Square Estimation Method VARMA Models. *Statistics*, **23**(4), 702-708.

Diah, Safitri Asih. (2008). Vector Autoregressive (VAR) untuk peramalan harga saham PT.Indofood Sukses Makmur Indonesia TBk. *Jurnal Matematika*, **11**.

Draper, N.R. & Smith, H. (1998).*Applied Regression Analysis.*Edisi 3. New York: John Wiley & Sons Inc.

Dufour, J. & Pelletier, D. (2002).Linear Estimation of Weak VARMA Models With a Macroeconomic Application. *North American Summer Meeting of the Econometric Society*.

Enders W. (2004).*Applied Econometric Time Series*.John Willey and Sons, Inc.

Fatturahman.(2009). Pemodelan Fungsi Transfer Multi Input.*Jurnal Informatika Mulawarman*.

Gujarati, N. D & D. C Porter. (2012). *Dasar-Dasar Ekonometrika*.Edisi 5. Jakarta: Salemba Empat.

Hanke, John. E. & Dean W. Wichen.(2005). *Business Forecasting*.Pearson Prentice Hall.

Kascha, C. (2007). A Comparison of Estimation Methods for Vector Autoregressive Moving Average Models.Department of Economics, European University Institute.

Luthkepohl, H. (2004). Forecasting with VARMA Models.Department of Economics, European University Institute, Firenze, Italy.

Makridakis, S & Wheelwright, S.C. (1999). *Metode dan Aplikasi Peramalan*.Edisi 2. Terjemahan Hari Suminto. Jakarta: Binarupa Aksara.

Malan, K. (2007). Stationary Multivariate Time Series Analysis.Faculty of Natural & Agricultural Science, University of Pretoria, Pretoria.

Okky, D. & Setiawan.(2012). Pemodelan Indeks Harga Saham Gabungan (IHSG), Kurs, dan Harga Minyak Dunia dengan Pendekatan Vector Autoregressive.*Jurnal Sains dan Seni ITS*, **1**(1).

Pankratz, A. (1994). *Forecasting with Univariate Box-Jenkins Models*. Canada: john and Wiley Sons, Inc.

Rusyidah, H., R. Rahmawati &A. Prahutama.(2017). Pemodelan Vector Autoregressive X (VARX) untuk Meramalkan Jumlah Uang Beredar di Indonesia.*Jurnal Gaussian*, **6**(3), 333-343.

S, Yonathan Hadi. (2003). Analisis Vector Autoregressive terhadap Korelasi Antara Pendapatan Nasional dan Investasi Pemerintah di Indonesia.*Jurnal Keuangan dan Moneter*,**6**(2).

Sims, C. A. (1972). Money, Income, and Causality.*American Economic Review,* **62**, 540-552.

Soejoeti&Zanzawi, Ph.D. (1987).*Analisis Runtun Waktu*. Jakarta: Karunia Jakarta Universitas Terbuka.

Spliid, H. (1983). A Fast Estimation Method for the Vector Autoregressive Moving Average Model with Exogenous Variables.*Journal of the American Statistical Association*, **78**(384), 843-849.

Walpole, R. E. & R. H Myers. (1986). *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*. Bandung: Penerbit ITB.