MODEL *PERIODIC AUTOREGRESSIVE WITH EXOGENOUS VARIABLE* DAN ESTIMASI PARAMETERNYA DENGAN METODE KUADRAT TERKECIL DUA TAHAP

Hanifah Listya Ningrum[1)], Dewi Retno Sari Saputro[2)]
[1,2)]Program Studi Matematika FMIPA Universitas Sebelas Maret
hanifahlistya96@gmail.com, dewiretnoss@staff.uns.ac.id

Abstrak

Model periodic autoregressive with exogenous variable (PARX) adalah model runtun waktu yang digunakan untuk mengetahui hubungan dinamis antara variabel endogen dengan variabel eksogen.Model PARX merupakan pengembangan dari model periodic autoregressive (PAR) dengan menambahkan variabel eksogen ke dalam modelnya.Variabel eksogen adalah variabel yang berpengaruh terhadap variabel lainnya, namun sebaliknya tidak dipengaruhi oleh variabel lainnya dalam satu model.Pada umumnya, metode estimasi parameter untuk model PARX adalah metode kuadrat terkecil (least square/LS) namun tidak dipertimbangkan parameter yang tidak signifikan, akibatnya estimator yang dihasilkan tidak akurat. Dengan demikian diperlukan pembatas linear untuk parameter tertentu, sehingga metode kuadrat terkecil dua tahap (two stage least square/2SLS) tepat untuk mengatasi masalah tersebut. Tujuanpenelitian untuk melakukan kajian ulang model PARX dan estimasi parameternya dengan metode kuadrat terkecil dua tahap. Perhitungan metode kuadrat terkecil dua tahap pada dasarnya sama dengan metode kuadrat terkecil (least square/LS) namun proses estimasinya melalui dua tahap LS. Hasil kajian menunjukkan diperoleh model PARX dan asumsinya serta estimasi parameter dengan metode kuadrat terkecil dua tahap.

Kata Kunci: *2SLS; PAR; PARX; runtun waktu*

1. PENDAHULUAN

Runtun waktu adalah himpunan observasi terurut dalam waktu (Wei, 1994).Ide dasar dari runtun waktu yaitu pengamatan sekarang dipengaruhi oleh satu atau beberapa pengamatan sebelumnya.Analisis runtun waktu merupakan salah satu prosedur statistika yang diterapkan untuk meramalkan struktur probabilistik keadaan yang akandatang dalam rangka pengambilan keputusan (Aswi dan Sukarna, 2006). Tujuan dari analisis runtun waktu yaitu meramalkan kondisi di masa mendatang berdasarkan pengamatan masa sekarang, mengetahui hubungan antara variabel yang terlibat, dan mengetahui adanya kontroling proses (Makridakis*et al.*, 1999).

Analisis runtun waktu dapat diterapkan dalam berbagai bidang ilmu, misalnya ekonomi, bisnis, industri, dan lain-lain. Metode runtun waktu adalah metode peramalan menggunakan analisa plot hubungan antara variabel yang akan diperkirakan dengan variabel waktu. Langkah penting dalam memilih suatu metode runtun waktu yang tepat dengan mempertimbangkan jenis pola data sehingga metode yang paling tepat dengan pola tersebut dapat diuji.Menurut Hanke dan Wichern (2005), ada empat macam tipe pola data, yaitu horizontal, tren, musiman, dan siklis.

Data musiman menunjukkan suatu pola yang berulang secara teratur dari satu periode ke periode berikutnya dalam jangka pendek yaitu kurang dari satu tahun. Menurut Cryer (1986), runtun waktu musiman mempunyai karakteristik yang ditunjukkan oleh adanya korelasi beruntun yang kuat pada jarak musiman. Permasalahan musiman sering dijumpai dalam fenomena kehidupan sehari-hari, misalnya data penjualan pakaian, curah hujan, harga minyak mentah, dan lain sebagainya.

Ada berbagai pendekatan untuk pemodelan dan peramalan data runtun waktu musiman, salah satunya mengasumsikan variasi musim yang digambarkan dengan memungkinkan parameter dalam autoregresi bervariasi musim disebut *periodic autoregressive* (PAR). Model PAR adalah sebuah model periodik yang digunakan pada data musiman yang stasioner, di mana rata-rata dan variansinya periodik terhadap waktu (Rusmawati, 2016).Model ini biasanya diterapkan pada data runtun waktu bulanan dan kuartalan (Ghosh, 2011).

Salah satu pengembangan dari model PAR yaitu dengan menambahkan variabel eksogen ke dalam modelnya yang disebut dengan model *periodic autoregressivewith exogenous variable* (PARX) (Ursu dan Pereau, 2017). Model PARX adalah model runtun waktu yang digunakan untuk mengetahui hubungan dinamis antara variabel endogen dengan variabel eksogen.Variabel endogen adalah variabel yang dipengaruhi oleh variabel lain di dalam model, sedangkan variabel eksogen adalah variabel yang mempengaruhi variabel lain di dalam model (Sugiyono, 2009).

Beberapa penelitian tentang model runtun waktu yang hanya melibatkan variabel endogen telah dilakukan, diantaranya estimasi menggunakan metode momen berdasarkan persamaan Yule-Walker yang digunakan Pagano (1978), Troutman (1979), dan McLeod (1994).Franses dan Paap (2004) melalukan penelitian tentang estimasi menggunakan kuadrat terkecil pada kasus univariat, sedangkan pada kasus multivariat dilakukan Lütkepohl (2005). Ursu dan Turkman (2012) mengidentifikasi model PAR menggunakan algoritme genetic,Ursu dan Pereau (2016) menerapkan model PAR pada arus sungai Garonne, serta Maçaira*et al.* (2017) menerapkan model PAR pada arus masuk waduk,.

Dalam analisis runtun waktu, variabel endogen mungkin dipengaruhi oleh variabel eksogen.Beberapa penelitian tentang model runtun waktu yang melibatkan variabel endogen dan eksogen telah dilakukan, diantaranya*periodic autoregressive with exogenous variables and periodic variances* dilakukan Andel (1989), Paroli dan Spezia (2008) melakukan penelitian model PAR dengan *state-dependent exogenous variables*, Angelini dan Angelis (2016) menerapkan model PARX untuk memprediksi pertandingan sepakbola, serta Ursu dan Pereau (2017) untuk mengetahui hubungan antara hasil tangkapan ikan dengan suhu permukaan laut.

Pada umumnya, metode estimasi parameter untuk model PARX adalah metode *least square* dengan cara meminimumkan jumlah kuadrat residunya. Namun hal tersebut tidak mempertimbangkan parameter yang tidak signifikan, akibatnya estimator yang dihasilkan tidak akurat.Oleh karena itu, untuk mengatasi masalah ini diperlukan pembatas linear untuk parameter tertentu (Rusmawati, 2016). Penerapan estimasi ini dikenal dengan istilah metode *least square* dua tahap (*two stage least square*). Berdasarkan uraian sebelumnya, pada penelitian ini dilakukan kajian ulang model *periodic autoregressive with* *exogenous variable* dan estimasi parameternya dengan metode kuadrat terkecil dua tahap.

2. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur, dengan mengumpulkan referensi berupa jurnal, artikel, dan buku yang dapat mendukung pembahasan tentang estimasi parameter model PARX menggunakan metode kuadrat terkecil dua tahap. Berikut langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini.

a. Mengeksplorasi penelitian-penelitian terkait model PARX dan asumsi-asumsi yang dipergunakan.
b. Melakukan kajian estimasi parameter model PARX menggunakan metode kuadrat terkecil dua tahap.Tahap pertama, menentukan estimator dari modelPARX yaitu $\widehat{\boldsymbol{\beta}}(v)$ dengan menurunkan $S(\boldsymbol{\beta})$ terhadap $\boldsymbol{\beta}(v)$. Tahap kedua menentukan estimator yaitu $\hat{\boldsymbol{\xi}}(v)$dengan menurunkan $S(\boldsymbol{\xi})$ terhadap $\boldsymbol{\xi}^T(v)$ dimana parameter $\boldsymbol{\beta}(v)$ diasumsikan sebagai batasan linear.
c. Melakukan analisis hasil dari langkah (a) dan (b),interpretasi,dan selanjutnya melakukan penarikkan simpulan.

3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Pada bagian hasil penelitian dan pembahasan, dibahas mengenai model *periodic autoregressive with exogenous variable* (PARX) dan asumsinya serta estimasi parameternya dengan metode kuadrat terkecil dua tahap.

a. Model *Periodic Autoregressive with Exogenous Variable* (PARX)

Model PARX merupakan pengembangan dari model PAR dengan menambahkan variabel eksogen ke dalam modelnya.Model PARX adalah salah satu model runtun waktu yang digunakan untuk mengetahui hubungan dinamis antara variabel endogen dengan variabel eksogen. Variabel endogen dinotasikan oleh Y_t, variabel eksogen dinotasikan oleh X_t, dan proses residu dinotasikan oleh ϵ_t. Menurut Ursu dan Pereau (2017), variabel Y_t dan X_t diasumsikan sebagai proses stasioner periodik.Seri periodik disebut juga dengan korelasi berkala (Gladyshev, 1961) atau *cyclostationary* (Lund dan Basawa, 2000).

Menurut Andel (1989), bentuk umum model PARX dengan orde $p(v)$ dan eksogen $m(v)$ yang dilambangkan dengan PARX$(p(v), m(v))$ untuk bulanan $(s = 12)$adalah

$$Y_{ns+v} = \sum_{k=1}^{p(v)} \phi_k(v) Y_{ns+v-k} + \sum_{j=1}^{m(v)} \theta_j(v) X_{ns+v-j} + \epsilon_{ns+v} \tag{1}$$

untuk$n = 0,1, \dots, N-1$ dan $v = 1,2, \dots, s$. Variabel acak Y_{ns+v} adalah besarnya pengamatan selama periode ke$-v$ untuk setiap musimnya pada tahun n, $n \in \mathbb{Z}$. Orde $p(v)$ adalah orde model AR pada periode v.Parameter $\phi_k(v), k = 1,2, \dots, p(v)$ adalah parameter model AR pada periode v. Berkaitan dengan variabel eksogen X_t, orde $m(v)$ adalah orde model AR pada periode v sedangkan $\theta_j, j = 1,2, \dots, m(v)$ adalah parameter model AR pada periode v. Diasumsikan bahwa $\mathrm{X_t}$ dan ϵ_t merupakan proses independen (Ursu dan Pereau, 2017).Jika $s = 1$ maka model tersebut menjadi model AR klasik dengan variabel eksogen (Andel, 1989).

b. Asumsi Model *Periodic Autoregressive with Exogenous Variable* (PARX)

1) Stasioneritas

Ide dasar dari stasioneritas adalah hukum probabilitas mengharuskan proses tidak berubah sepanjang waktu, dengan kata lain proses dalam keadaan setimbang secara statistik (Cryer, 1986). Sekumpulan data dinyatakan stasioner jika rata-rata dan varian dari data tersebut tidak mengalami perubahan secara sistematik sepanjang waktu (Usman, 2006). Secara umum, ketidakstasioneran suatu data *time series*meliputi varians dan rata–rata. Proses stasioneritas data dalam varians dilakukan dengan transformasi Box-Cox, sedangkan proses stasioneritas data dalam rata–rata dilakukan dengan pembedaan (*differencing*).

2) Residual White Noise

Proses residu $\epsilon = \{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$dinamakan*white noise* periodik, jika barisan variabel acak yang berurutan tidak saling berkorelasi dan mengikuti distribusi tertentu, dengan rata-rata$E(\epsilon_t) = 0$,variansi konstan $\mathrm{var}(\epsilon_{ns+v}) = \sigma^2(v) > 0, v = 1,2, \ldots, s$, dan nilai kovariansi $\gamma_k = cov(\epsilon_t, \epsilon_{t+k}) = 0$ untuk $k \neq 0$ (Rusmawati, 2016).

3) Normalitas residual

Normalitas residual dilakukan untuk mengetahui apakah residual berdistribusi normal atau tidak. Pengujian dapat dilakukan dengan analisis grafik *normal probability plot* atau uji Kolmogorov-Smirnov.Jika residu berada disekitar garis diagonal maka residual berdistribusi normal. Sebaliknya, jika residual tidak berdistribusi normal, maka residu akan menyebar.

c. Estimasi Parameter Model PARX dengan Metode Kuadrat Terkecil Dua Tahap

Estimasi model PARX pada persamaan (1) menggunakan metode *least square* dua tahap.Perhitungan metode *least square* dua tahap pada dasarnya sama dengan metode *least square*, namun proses estimasinya melalui dua tahap LS. Tahap pertama adalah estimasi model menggunakan kuadrat terkecil tanpa pembatas.Tahap kedua adalah estimasi model menggunakan kuadrat terkecil dengan pembatas linear.Estimator yang tidak signifikan pada tahap pertama dijadikan sebagai pembatas linear pada tahap kedua (Rusmawati, 2016).

Misalkan data runtun waktu Y_{ns+v}dengan $n = 0,1, \ldots, N-1$, N adalah jumlah populasi, $v = 1,2, \ldots, s$, s adalah banyaknya periode, dan ukuransampel $n = Ns$.Model PARX pada persamaan (1) dapat dibentuk menjadi bentuk matriks, yaitu

$$\boldsymbol{z}(v) = \boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{\beta}(v) + \boldsymbol{e}(v), v = 1,2, \ldots, s \qquad (2)$$

dengan strukturnya diuraikan sebagai berikut.

$\boldsymbol{z}(v) = [Y_v \quad Y_{s+v} \quad \cdots \quad Y_{(N-1)s+v}]^T$,

$\boldsymbol{Z}(v) = [\boldsymbol{Y}(v)\boldsymbol{X}(v)]$, dengan

$$\boldsymbol{Y}(v) = \begin{bmatrix} Y_{v-1} & Y_{v-2} & \cdots & Y_{v-p(v)} \\ Y_{s+v-1} & Y_{s+v-2} & \cdots & Y_{s+v-p(v)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{(N-1)s+v-1} & Y_{(N-1)s+v-2} & \cdots & Y_{(N-1)s+v-p(v)} \end{bmatrix} \text{dan}$$

$$\boldsymbol{X}(v) = \begin{bmatrix} X_{v} & X_{v-1} & \cdots & X_{v-m(v)} \\ X_{s+v} & X_{s+v-1} & \cdots & X_{s+v-m(v)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{(N-1)s+v} & X_{(N-1)s+v-1} & \cdots & X_{(N-1)s+v-m(v)} \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{\beta}(v) = (\boldsymbol{\phi}(v), \boldsymbol{\theta}(v))^T$, dengan
$\boldsymbol{\phi}(v) = [\phi_1(v)\phi_2(v) \ \ldots \ \phi_{p(v)}(v)]^Tdan\boldsymbol{\theta}(v) = [\theta_0(v)\theta_1(v) \ \ldots \ \theta_{m(v)}(v)]^T$
$\boldsymbol{e}(v) = [\epsilon_v \quad \epsilon_{s+v} \quad \cdots \quad \epsilon_{(N-1)s+v}]^T$,
dengan$\boldsymbol{z}(v)$ adalah vektor berukuran $(N \times 1)$,$\boldsymbol{Z}(v)$adalahmatriks random berukuran $(N \times (p(v) + 1 + m(v)))$,$\boldsymbol{\beta}(v)$ adalah vektor berukuran$((p(v) + 1 + m(v)) \times 1)$, dan $\boldsymbol{e}(v)$ adalah vektor berukuran $(N \times 1)$.

d. Estimasi Parameter Kuadrat Terkecil Tanpa Pembatas

Estimasi parameter kuadrat terkecil tanpa pembatas ekuivalen dengan metode *least square* (LS).Persamaan (2) dapat ditulis sebagai

$$\boldsymbol{e}(v) = \boldsymbol{z}(v) - \boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{\beta}(v). \tag{3}$$

Parameter model PARX adalah vektor $\boldsymbol{\beta}(v)$, yaitu

$$\boldsymbol{\beta}(v) = (\boldsymbol{\phi}(v), \boldsymbol{\theta}(v))^T$$

dengan

$$\boldsymbol{\phi}(v) = [\phi_1(v)\phi_2(v) \ \ldots \ \phi_{p(v)}(v)]^T \boldsymbol{\theta}(v) = [\theta_0(v)\theta_1(v) \ \ldots \ \theta_{m(v)}(v)]^T.$$

Berdasarkan prinsip metode *least square*, dibentuk fungsi $S(\boldsymbol{\beta})$ yang merupakan jumlah kuadrat residu dari persamaan (3) yaitu

$$S(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{v=1}^{s} \boldsymbol{e}^T(v)\boldsymbol{e}(v)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{v=1}^{s}\left(Y_{ns+v} - \sum_{k=1}^{p(v)} \phi_k(v) Y_{ns+v-k} - \sum_{j=1}^{m(v)} \theta_j(v) X_{ns+v-j}\right)^2 \tag{4}$$

Konsep untuk meminimumkan persamaan (4) yaitu dengan menurunkan secara parsial fungsi $S(\boldsymbol{\beta})$ terhadap $\phi_k(v)$dan $\theta_j(v)$, dengan hasil turunan bernilai nol (Ursu dan Duchesne, 2009). Berikut turunan parsial fungsi $S(\boldsymbol{\beta})$terhadap $\phi_k(v)$.

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{\beta})}{\partial \phi_k(v)} = 0$$

$$2\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{v=1}^{s}\left(Y_{ns+v} - \sum_{k=1}^{p(v)} \phi_k(v) Y_{ns+v-k} - \sum_{j=1}^{m(v)} \theta_j(v) X_{ns+v-j}\right)(-Y_{ns+v-k}) = 0$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{v=1}^{s}\left(Y_{ns+v} - \sum_{k=1}^{p(v)} \phi_k(v) Y_{ns+v-k} - \sum_{j=1}^{m(v)} \theta_j(v) X_{ns+v-j}\right)(Y_{ns+v-k}) = 0$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} Y_{ns+v-k} \,.\, \epsilon_{ns+v} = 0.$$

Diperoleh turunan parsial fungsi $S(\boldsymbol{\beta})$ terhadap $\phi_k(v)$ yaitu

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{\beta})}{\partial \phi_k(v)} = \sum_{n=0}^{\langle -1} Y_{ns+v-k} \,.\, \epsilon_{ns+v} = 0.$$

Berikut turunan parsial fungsi $S(\boldsymbol{\beta})$terhadap $\theta_j(v)$.

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{\beta})}{\partial \theta_j(v)} = 0$$

$$2\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{v=1}^{s}\left(Y_{ns+v} - \sum_{k=1}^{p(v)} \phi_k(v) Y_{ns+v-k} - \sum_{j=1}^{m(v)} \theta_j(v) X_{ns+v-j}\right)\left(-X_{ns+v-j}\right) = 0$$

$$-2\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{v=1}^{s}\left(Y_{ns+v} - \sum_{k=1}^{p(v)} \phi_k(v) Y_{ns+v-k} - \sum_{j=1}^{m(v)} \theta_j(v) X_{ns+v-j}\right)\left(X_{ns+v-j}\right) = 0$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{v=1}^{s}\left(Y_{ns+v} - \sum_{k=1}^{p(v)} \phi_k(v) Y_{ns+v-k} - \sum_{j=1}^{m(v)} \theta_j(v) X_{ns+v-j}\right)\left(X_{ns+v-j}\right) = 0$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} X_{ns+v-j} \,.\, \epsilon_{ns+v} = 0.$$

Diperoleh turunan parsial fungsi $S(\boldsymbol{\beta})$ terhadap $\theta_j(v)$ yaitu

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{\beta})}{\partial \theta_j(v)} = \sum_{n=0}^{N-1} X_{ns+v-j} \,.\, \epsilon_{ns+v} = 0.$$

Dari turunan parsial fungsi $S(\boldsymbol{\beta})$ terhadap $\phi_k(v)$dan $\theta_j(v)$, diperoleh persamaandalam bentuk matriks untuk musim tertentu $v$sebagai berikut.

$$\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{e}(v) = 0, \tag{5}$$

dengan $\boldsymbol{e}(v) = \boldsymbol{z}(v) - \boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{\beta}(v)$, sehingga persamaan (5) menjadi

$$\boldsymbol{Z}^T(v)[\boldsymbol{z}(v) - \boldsymbol{Z}(v)\hat{a}(v)] = 0$$

$$\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{z}(v) - \_^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{\beta}(v)$$

$$\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{z}(v) = \boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{\beta}(v). \tag{6}$$

Estimator $\widehat{\boldsymbol{\beta}}(v) = \left(\widehat{\boldsymbol{\phi}}(v), \widehat{\boldsymbol{\theta}}(v)\right)^T$ untuk setiap v tetap dapat ditentukan dengan mengalikan ruas kiri dan kanan pada persamaan (6) dengan invers dari matriks $\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)$, sehingga menjadi

$$\left[\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\right]^{-1}\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{z}(v) = \left[\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\right]^{-1}\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{\beta}(v).$$

Oleh karena $\left[\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\right]^{-1}\left[\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\right]$ menghasilkan matriks identitas, maka diperoleh

$$\left[\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\right]^{-1}\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{z}(v) = \boldsymbol{I}\boldsymbol{\beta}(v).$$

Jadi, estimator model PARX pada tahap pertama adalah

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}(v) = \left[\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\right]^{-1}\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{z}(v).$$

i. Estimasi Parameter Kuadrat Terkecil dengan Pembatas Linear

Diasumsikan vektor $\boldsymbol{\beta}(v)$ berukuran $(p(v) + 1 + m(v)) \times 1$sebagaipembatas linear dengan persamaan

$$\boldsymbol{\beta}(v) = \boldsymbol{R}(v)\boldsymbol{\xi}(v) + \boldsymbol{b}(v) \tag{7}$$

dengan$\boldsymbol{R}(v)$ adalah matriks berukuran $(p(v) + 1 + m(v)) \times K(v)$dari orde $K(v)$,$\boldsymbol{\xi}(v)$ adalah vektor berukuran$K(v) \times 1$ dari parameter yang tidak diketahui, dan$\boldsymbol{b}(v)$ adalahvektor konstan berukuran$(p(v) + 1 + m(v)) \times 1$.

Diasumsikan bahwa matriks $\boldsymbol{R}(v) = \boldsymbol{I}_{p(v)+1+m(v)}$, dengan$\boldsymbol{I}_{p(v)+1+m(v)}$ matriks identitas berukuran $(p(v) + 1 + m(v)) \times (p(v) + 1 + m(v))$ dan $\boldsymbol{b}(v) = \boldsymbol{0}, v = 1,2, \ldots, s$. Secara umum, matriks $\boldsymbol{R}(v)$ dan vektor $\boldsymbol{b}(v)$dapat memberikan batasan linear pada parameter di musim yang sama. Dengan mensubstitusikan persamaan (7) ke persamaan (3), diperoleh

$$\boldsymbol{e}(v) = \boldsymbol{z}(v) - \boldsymbol{Z}(v)[\boldsymbol{R}(v)\boldsymbol{\xi}(v) + \boldsymbol{b}(v)]. \tag{8}$$

Berdasarkan prinsip metode *least square*, dibentuk fungsi $S(\boldsymbol{\xi})$ yang merupakan jumlah kuadrat residu pada persamaan (8), yaitu

$$\begin{aligned}
S(\boldsymbol{\xi}) &= \boldsymbol{e}^T(v)\boldsymbol{e}(v) \\
&= [\boldsymbol{z}(v) - \boldsymbol{Z}(v)[\boldsymbol{R}(v)\boldsymbol{\xi}(v) + \boldsymbol{b}(v)]]^T[\boldsymbol{z}(v) - \boldsymbol{Z}(v)[\boldsymbol{R}(v)\boldsymbol{\xi}(v) \\
&\qquad + \boldsymbol{b}(v)]] \\
&= [\boldsymbol{z}^T(v) - [\boldsymbol{R}(v)\boldsymbol{\xi}(v) + \boldsymbol{b}(v)]^T\boldsymbol{Z}^T(v)][\boldsymbol{z}(v) - \boldsymbol{Z}(v)[\boldsymbol{R}(v)\boldsymbol{\xi}(v) \\
&\qquad + \boldsymbol{b}(v)]] \\
&= [\boldsymbol{z}^T(v) - [\boldsymbol{\xi}^T(v)\boldsymbol{R}^T(v) + \boldsymbol{b}^T(v)]\boldsymbol{Z}^T(v)][\boldsymbol{z}(v) - \boldsymbol{Z}(v)[\boldsymbol{R}(v)\boldsymbol{\xi}(v) \\
&\qquad + \boldsymbol{b}(v)]] \\
&= [\boldsymbol{z}^T(v) - \boldsymbol{\xi}^T(v)\boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v) - \boldsymbol{b}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)][\boldsymbol{z}(v) \\
&\qquad - \boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{R}(v)\boldsymbol{\xi}(v) - \boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{b}(v)] \\
&= [\boldsymbol{z}^T(v)\boldsymbol{z}(v) - \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{R}(v)\boldsymbol{\xi}(v) - \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{b}(v) + \boldsymbol{\xi}^T(v)\boldsymbol{R}^T(v) \\
&\quad \boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{R}(v)\boldsymbol{\xi}(v) + \boldsymbol{\xi}^T(v)\boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{b}(v) - \boldsymbol{b}^T(v) \\
&\quad \boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{z}(v) + \boldsymbol{b}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{R}(v)\boldsymbol{\xi}(v) + \boldsymbol{b}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{b}(v)],
\end{aligned}$$

dengan$\boldsymbol{z}^T(\boldsymbol{v})\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{R}(v)\boldsymbol{\xi}(v)$, $\boldsymbol{z}^T(\boldsymbol{v})\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{b}(v)$, dan $\boldsymbol{b}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{R}(v)\boldsymbol{\xi}(v)$merupakan skalar, sehingga transposnya adalah

$$[\boldsymbol{z}^T(\boldsymbol{v})\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{R}(v)\boldsymbol{\xi}(v)]^T = \boldsymbol{\xi}^T(v)\boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{z}(v)$$

$$[\boldsymbol{z}^T(\boldsymbol{v})\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{b}(v)]^T = \boldsymbol{b}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{z}(v)$$

$$\left[\boldsymbol{b}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{R}(v)\hat{}(v)\right]^T = \boldsymbol{\xi}^T(v)\boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{b}(v).$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}
S(\boldsymbol{\xi}) = [&\boldsymbol{z}^T(v)\boldsymbol{z}(v) - 2\boldsymbol{\xi}^T(v)\boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{z}(v) + \boldsymbol{\xi}^T(v)\boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v) \\
&\boldsymbol{R}(v)\boldsymbol{\xi}(v) + 2\boldsymbol{\xi}^T(v)\boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{b}(v) - 2\boldsymbol{b}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{z}(v) + \\
&\boldsymbol{b}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{b}(v)].
\end{aligned} \tag{9}$$

Konsep untuk meminimumkan persamaan (9) yaitu dengan menurunkan fungsi $S(\boldsymbol{\xi})$ terhadap $\boldsymbol{\xi}^T(v)$ dengan hasil turunan bernilai nol (Ursu dan Turkman, 2012). Berikut turunan fungsi $S(\boldsymbol{\xi})$ terhadap $\boldsymbol{\xi}^T(v)$.

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}^T(v)} = 0$$

$$-2\boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{z}(v) + 2\boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{R}(v)\boldsymbol{\xi}(v) + 2\boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{b}(v) = 0$$

$$2\boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{R}(v)\boldsymbol{\xi}(v) = 2\boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{z}(v) - 2\boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{b}(v)$$

$$\boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{R}(v)\boldsymbol{\xi}(v) = \boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{z}(v) - \boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{b}(v)$$

$$\boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{R}(v)\boldsymbol{\xi}(v) = \boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)[\boldsymbol{z}(v) - \boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{b}(v)]. \tag{10}$$

Estimator $\hat{\boldsymbol{\xi}}(v)$ditentukan dengan mengalikan ruas kiri dan kanan pada persamaan (10) dengan invers dari matriks $\boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{R}(v)$ sehingga diperoleh

$$\left[\boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{R}(v)\right]^{-1}\boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{R}(v)\boldsymbol{\xi}(v)$$
$$= \left[\boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{R}(v)\right]^{-1}\boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)[\boldsymbol{z}(v) - \boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{b}(v)]$$

Oleh karena $\left[\boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{R}(v)\right]^{-1}[\boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{R}(v)]$ menghasilkan matriks identitas, maka diperoleh

$$\boldsymbol{I}\boldsymbol{\xi}(v) = [\boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{R}(v)]^{-1}\boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)[\boldsymbol{z}(v) - \boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{b}(v)].$$

Jadi, estimator model PARX pada tahap kedua adalah

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}(v) = \left[\boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{R}(v)\right]^{-1}\boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)[\boldsymbol{z}(v) - \boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{b}(v)]$$

4. SIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan diperoleh dua kesimpulan berikut.

a. Model PARX merupakan pengembangan dari model PAR dengan menambahkan variabel eksogen ke dalam modelnya. Model PARX$(p(v), m(v))$dituliskan sebagai,

$$Y_{ns+v} = \sum_{k=1}^{p(v)} \phi_k(v) Y_{ns+v-k} + \sum_{j=1}^{m(v)} \theta_j(v) X_{ns+v-j} + \epsilon_{ns+v}$$

denganasumsi stasioneritas, residual *white noise*, dan normalitas residual.

b. Estimasi parameter model PARX dilakukan menggunakan metode kuadrat terkecil dua tahap. Estimator model PARX untuk tahap pertama yaitu

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(v) = \left[\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\right]^{-1}\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{z}(v).$$

Estimator model PARX untuk tahap kedua yaitu

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}(v) = \left[\boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)\boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{R}(v)\right]^{-1}\boldsymbol{R}^T(v)\boldsymbol{Z}^T(v)[\boldsymbol{z}(v) - \boldsymbol{Z}(v)\boldsymbol{b}(v)].$$

5. DAFTAR PUSTAKA

Andel, J. (1989).Periodic autoregression with exogenous variables and periodic variances.*Aplikace Matematiky*, **34**, 387–395.

Angelini, G., & L. D. Angelis.(2016). PARX model for football matches predictions. *Working paper* (pp. 1-26).University of Bologna.

Aswi & Sukarna. (2006). *Analisis Deret Waktu*. Makassar, NJ: Andira.

Cryer, J. D. (1986).*Time Series Analysis*.Boston, NJ:Duxbury Press.

Ghosh, H. (2011).Nonlinear Time Series Modeling and Forecasting for Periodic Autoregressive.*Journal of Statistical Theory and Practice*, 27-44.

Gladyshev, E. G. (1961).Periodically correlated random sequences.*Soviet Mathematics*, **2**, 385–388.

Hanke, J. E., & D. W. Wichern.(2005). *Business Forecasting Eighth Edition*. New Jersey, NJ: Pearson Education International.

Lund, R., &I. V. Basawa.(2000).Recursive prediction and likelihood evaluation for periodic ARMA models.*Journal of Time Series Analysis*, **21**, 75–93.

Lütkepohl, H. (2005).*New Introduction to Multiple Time Series Analysis*.Berlin, NJ: Springer.

Maçaira, P. M., Oliveira, F. L. C., Ferreira, P. G. C., de Almeida, F. V. N., & Souza, R. C. (2017). Introducing a causal PAR(p) model to evaluate the influence ofclimate variables in reservoir inflows : a brazilian case. *Pesquisa Operacional*, **37(1)**, 107–128.

Makridakis, S., S. C. Wheelwright, & V. E. McGee. (1999).*Metode dan AplikasiPeramalan, Edisi kedua*.Diterjemahkan oleh Hari Suminto.Jakarta, NJ: Binarupa Aksara.

Mcleod, A. I. (1994). Diagnostic Checking Periodic Autoregressions Models With Aplication.*Journal of Time Series Analysis*,**15**, 221-33.

Paap, P. H. (2004).*Periodic Time Series Model*. New York, NJ: Oxford University Press.

Pagano, M. (1978).On Periodic and Multiple Autoregressions.*The Annals of Statistics*,**6**, 1310-1317.

Paroli, R., &L.Spezia.(2008). Bayesian inference in non-homogeneous Markov mixtures of periodic autoregressions with state-dependent exogenousvariables.*Computational Statistics & Data Analysis*, **52**, 2311–2330.

Rusmawati. (2016). *Estimasi Parameter Model Periodic Autoregressive Menggunakan Metode Kuadrat Terkecil Dua Tahap*. Diakses dari http://repository.unhas.ac.id/handle/123456789/17837

Sugiyono.(2009). *Metode Penelitian Kuantitatif, Kualitatif, dan R&D*. Bandung, NJ: Alfabeta.

Troutman, B. M. (1979). Some Result In Periodic Autoregression. *Biometrika***66**, 219-28.

Ursu, E., &P. Duchesne.(2009). On Medlling and Diagnostic Checking Of Vector Periodic Autoregressive Time Series Models.*Journal of Time Series Analysis*,**30**, 70-96.

Ursu, E., &J. C. Pereau.(2016).Application of periodic autoregressive process to the modeling of the Garonne river flows.*Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*,**30**, 1785-1795.

Ursu, E., &J. C. Pereau.(2017).Estimation and identification of periodic autoregressive models with one exogenous variable.*Journal of the Korean Statistical Society*,**30**, 1785-1795.

Ursu, E., &K. F.Turkman. (2012). Periodic Autoregressive Model Identification Using Genetic Algorithms.*Journal of Time Series Analysis*,**33**, 398-405.

Usman, D. N. (2006).*Pendekatan Populer dan Praktis Ekonometrika untuk Analisis Ekonomi dan Keuangan*. Jakarta, NB: Lembaga Penerbit Universitas Indonesia.

Wei, W.S. (1994).*Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Method*.New York, NJ: Addison Wesley Publishing Company.