SEMIGRUP OPERATOR LINIER TERBATAS UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH CAUCHY ABSTRAK

Windi Winartomo[1], Susilo Hariyanto[2]
1,2 Departemen Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

windi.winartomo@gmail.com[1]
sus2_hariyanto@yahoo.co.id[2]

ABSTRACT. The abstract Cauchy problem in the form of a linear system, $\dot{x}(t) = Tx(t),\ x(0) = x_0,\ t \geq 0$ with T is a bounded linear operator. The problem is a common form of linear system, $\dot{x}(t) = Ax(t), x(0) = x_0, t \geq 0$ with A is a square matrix having an inverse. Since the matrix has an inverse it can be formed into a bounded linear operator that satisfies semigroups properties. Each MCA formed into semigroups of bounded linear operator always has a unique solution, $x(t) = e^{At}x_0$ for each $t \in \mathbb{R}$.
Keywords : abstract cauchy problem; linear system; matrix operator; bounded linear operator; semigroups

1. PENDAHULUAN

Analisis Fungsional merupakan salah satu cabang dari ilmu Matematika yang membahas tentang ruang vektor serta pemetaan di antara ruang - ruang tersebut. Di dalam Analisis Fungsional terdapat materi tentang teorema - teorema Semigrup Operator Linier Terbatas pada ruang Hilbert. Terdapat Masalah Cauchy Abstrak (MCA) yang didefinisikan sebagai berikut.

$$(MCA)\begin{cases} \dot{x}(t) = Tx(t) & (t \geq 0) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

dengan T merupakan operator linier terbatas pada ruang Hilbert X atas bilangan Riil. [1]

MCA yang berbentuk sistem linier, $\dot{x}(t) = Tx(t), x(0) = x_0,\ t \geq 0$ dengan T merupakan operator linier terbatas merupakan bentuk umum dari sistem linier, $\dot{x}(t) = Ax(t), x(0) = x_0, t \geq 0$ dengan A merupakan matrik persegi yang mempunyai invers. Oleh karena matriks tersebut mempunyai invers maka dapat dibentuk menjadi operator linier terbatas yang memenuhi sifat-sifat semigrup. Setiap MCA yang dibentuk menjadi semigrup operator linier terbatas selalu mempunyai penyelesaian tunggal, $x(t) = e^{At}x_0$ untuk setiap $t \in \mathbb{R}$.

2. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan penulis dalam penyusunan tulisan ini adalah metode tinjauan pustaka (study literature), yaitu dengan memahami beberapa buku tentang Ruang Hilbert, Operator Linier Terbatas, Semigrup.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Koleksi operator linier terbatas pada ruang Hilbert dapat membentuk suatu semigrup atas operator linier terbatas. Akan ditunjukkan bahwa semigrup operator linier terbatas dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah Cauchy abstrak (MCA)

$$(MCA)\begin{cases} \dot{x}(t) = Tx(t) & (t \geq 0) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

dengan T merupakan operator linier terbatas pada ruang Hilbert X atas bilangan Real. [1]

Selanjutnya akan diberikan definisi konsep konvergensi pada ruang linier $L(\mathbb{R}^n)$ operator linier pada $\mathbb{R}^n$. Sehingga akan diperoleh eksponensial operator linier $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Diberikan definisi norma operator T, sebagai berikut:

$$\|T\| = \max_{|x|\leq 1} |T(x)|$$

dengan $|x|$ merupakan norma Euclidean $x \in \mathbb{R}^n$; yaitu,

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Norma operator memiliki semua sifat-sifat yang biasa dari norma, yaitu, untuk $S, T \in L(\mathbb{R}^n)$

(a) $\|T\| \geq 0$ dan $\|T\| = 0$ jika $T = 0$
(b) $\|T\| = |k|\|T\|$ untuk $k \in \mathbb{R}$
(c) $\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|$.

Konvergensi barisan operator $T_k \in L(\mathbb{R}^n)$ kemudian didefinisikan dalam norma operator sebagai berikut.

Definisi 2.1 [3]
Barisan operator linier $T_k \in L(\mathbb{R}^n)$ dikatakan konvergen ke operator linier $T \in L(\mathbb{R}^n)$ ketika $k \to \infty$, yaitu, $\lim_{k\to\infty} T_k = T$,
jika untuk semua $\varepsilon > 0$ terdapat $\mathbb{N}$ sehingga untuk $k \geq \mathbb{N}$, $\|T - T_k\| < \varepsilon$.

Lemma 2.2 [3]
Diberikan $S, T \in L(\mathbb{R}^n)$ dan $x \in \mathbb{R}^n$, maka
(a) $|T(x)| \leq \|T\||x|$
(b) $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$
(c) $\|T^k\| \leq \|T\|^k$ *untuk* $k = 0,1,2, \ldots$.

Definisi 2.3 [3]
Diberikan A adalah matriks persegi berukuran $n \times n$. Maka untuk $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}.$$

untuk suatu matriks persegi A, e^{At} adalah matriks yang dapat dihitung dari nilai eigen dan vektor eigen dari A.

Teorema 2.4 [3]
Diberikan $T \in L(\mathbb{R}^n)$ dan $t_0 > 0$,

deret

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{k!}$$

adalah mutlak dan konvergen seragam untuk semua $|t| \leq t_0$.

Bukti

Diberikan $\|T\| = a$. Kemudian berdasarkan *Lemma 2.2* di atas bahwa untuk $|t| \leq t_0$,

$$\left\|\frac{T^k t^k}{k!}\right\| \leq \frac{\|T\|^k |t|^k}{k!} \leq \frac{a^k t_0^k}{k!}.$$

Selanjutnya, akan diberikan definisi yang menghubungkan *Teorema 2.4* tentang deret konvergen seragam mutlak dengan ekponensial At, sehingga diperoleh

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t_0^k}{k!} = e^{a t_0}.$$

Kemudian

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{k!}$$

adalah mutlak dan konvergen seragam untuk semua $|t| \leq t_0$. ■

Seperti dalam pembuktian *Teorema 2.4* di atas $\|e^{At}\| \leq e^{\|A\||t|}$ dengan $\|A\| = \|T\|$ dan T adalah transformasi linier $T(x) = Ax$.

Eksponensial dari operator linier T kemudian didefinisikan oleh deret konvergen mutlak

$$e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}.$$

Berdasarkan sifat limit bahwa e^T adalah operator linier pada $\mathbb{R}^n$ dan ini sesuai pembuktian *Teorema 2.4* di atas bahwa $\|e^T\| \leq e^{\|T\|}$.

Lemma 2.5 [3]

Jika P dan T adalah transformasi linier pada $\mathbb{R}^n$ dan $S = PTP^{-1}$, maka
$e^S = Pe^T P^{-1}$.

Akibat 2.6 [3]

Jika $P^{-1}AP = diag[\lambda_j]$ maka $e^{At} = P\ diag[e^{\lambda_j t}]P^{-1}$,untuk $j = 0,1,2, \ldots$.

Lemma 2.7 [3]

Jika S dan T adalah transformasi linier pada $\mathbb{R}^n$ yang bersifat komutatif, yaitu, yang memenuhi $ST = TS$, maka $e^{S+T} = e^S e^T$.

Akibat 2.8 [3]

Jika T adalah transformasi linier pada $\mathbb{R}^n$, invers dari transformasi linier e^T diberikan oleh $(e^T)^{-1} = e^{-T}$.

Akibat 2.9 [3]

Jika matriks persegi, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ maka $e^A = e^a \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Sekarang dapat dihitung matriks e^{At} untuk matriks persegi A. Diberikan definisi matriks yang mempunyai invers (yang kolomnya terdiri dari vektor eigen umum dari A) sehingga matriks

$$B = P^{-1}AP$$

memiliki salah satu dari bentuk berikut

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \;\; atau \;\; B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Kemudian berdasarkan akibat di atas dan *Definisi 2.3* sehingga diperoleh
Untuk $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ Sehingga diperoleh $e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix}$.
Begitupula untuk $B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \;\; atau \;\; B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ akan diperoleh

$$e^{Bt} = e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;\; atau \;\; e^{Bt} = e^{at}\begin{bmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{bmatrix}.$$

Diketahui
$B = P^{-1}AP \Leftrightarrow PB = PP^{-1}AP \Leftrightarrow PB = AP \Leftrightarrow PBP^{-1} = APP^{-1} \Leftrightarrow PBP^{-1} = A$
Berdasarkan *Lemma 2.5*, jika $A = PBP^{-1}$ maka $e^{A} = Pe^{B}P^{-1}$ sehingga untuk setiap matriks e^{At} menjadi

$$e^{At} = Pe^{Bt}P^{-1}.$$

Lemma 2.10 [3]
Diberikan matriks persegi A, maka

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}.$$

Definis 2.11 [2]
Untuk setiap $t \in \mathbb{R}$ diberikan definisi sebagai berikut.

$$S(t) := e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}A^n. \qquad (3.7)$$

dengan A merupakan operator linier terbatas.

Definisi 3.12 [4]
Diberikan ruang bernorma $(X, \|\cdot\|)$ dan $x_n \in X$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, sehingga

(a) *Deret $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ dikatakan* ***konvergen*** *jika ada vektor $a \in X$ sehingga barisan $\{\sum_{k=1}^{n} x_k\}$ konvergen ke $a \in X$, yaitu*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = a \;\; atau \;\; \lim_{n\to\infty} \left\| a - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| = 0.$$

Keadaan ini dapat dituliskan pula dengan persamaan berikut:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = a$$

(b) *Deret bilangan $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ disebut deret mutlak (absolute series) deret $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$.*

Definisi 2.13 [2]
Misalkan H ruang Hilbert dan operator $T(t): H \to H$, untuk semua $t \in \mathbb{R}_+$. Semigrup $T(t)$ adalah himpunan operator-operator $T(t): H \to H$.
Untuk semua
$t \in \mathbb{R}_+$ yang memenuhi sifat

(a) $T(h + t) = T(h)T(t)$, *untuk semua $h, t \in \mathbb{R}_+$.*
(b) $T(0) = I$.

Teorema 2.14 [3]
Diberikan matriks persegi A. Kemudian untuk $x_0 \in \mathbb{R}^n$, diberikan masalah nilai awal

$$\dot{x} = Ax \qquad (3.1)$$

$$x(0) = x_0$$

memiliki penyelesaian tunggal untuk semua $t \in \mathbb{R}$ yang diberikan oleh

$$x(t) = e^{At}x_0 \tag{3.6}$$

Bukti

Berdasarkan *Lemma 2.10*, jika $x(t) = e^{At}x_0$, maka

$$x'(t) = \frac{d}{dt}e^{At}x_0 = Ae^{At}x_0 = Ax(t) \text{ ,untuk semua } t \in \mathbb{R}.$$

Begitupula, $x(0) = Ix_0 = x_0$. Jadi $x(t) = e^{At}x_0$ merupakan penyelesaiannya. Untuk melihat bahwa ini adalah satu-satunya penyelesaiannya, misalkan $x(t)$ adalah penyelesaian dari masalah nilai awal (3.1) dan diberikan definisi himpunan $y(t)$

$$y(t) = e^{-At}x(t).$$

Berdasarkan *Lemma 2.10* dan *Teorema 2.14* sehingga berlaku

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-At}x(t) \\ y'(t) &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}x'^{(t)} \\ &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}Ax(t) \\ &= -Ae^{-At}x(t) + Ae^{-At}x(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

untuk semua $t \in \mathbb{R}$ oleh karena e^{-At} dan A komutatif. Jadi, $y(t)$ adalah konstanta. Oleh karena itu setiap penyelesaian dari masalah nilai awal (3.1) diberikan oleh

$$y(t) = e^{-At}x(t) \Leftrightarrow e^{At}y(t) = e^{At}e^{-At}x(t) \Leftrightarrow e^{At}y(t) = x(t)$$

Ketika $t = 0$ menunjukkan bahwa $y(t) = x_0$, sehingga diperoleh persamaan

$$x(t) = e^{At}x_0.$$

Selanjutnya, berdasarkan *Lemma 2.10*, *Definisi 2.11* dan sifat komutatif pada *Lemma 2.7* sehingga diperoleh persamaan-persamaan berikut ini.

$$\frac{d}{dt}S(t) = AS(t) = S(t)A,\ t \in \mathbb{R} \tag{3.10}$$

Ini menunjukkan bahwa fungsi $x(t) = S(t)x$ untuk setiap $x \in X$ merupakan penyelesaian tunggal dari masalah Cauchy.

Diberikan masalah Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = Ax,\ \ x(0) = x \text{ pada } \mathbb{R}. \tag{3.11}$$

Ketunggalan penyelesaian untuk (3.11) sudah jelas, karena setiap penyelesaian $x(\cdot)$ untuk (3.11) dengan $x(0) = x_0$ memenuhi

$$\|x(t)\| \leq \|A\| \left|\int_0^t \|x(\tau)\| d\tau\right|,\ t \in \mathbb{R}$$

dan karena itu $x(t) \equiv 0$ oleh pertidaksamaan Gronwall's.

Berdasarkan persamaan (3.9) dan (3.10) terlihat bahwa $A = \frac{d}{dt}S(t)|_{t=0}$, yaitu

$$A = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(S(t) - I). \tag{3.12}$$

Dari (3.10) dengan $t \in \mathbb{R}$, dapat dibentuk menjadi

$$\frac{d}{dt}S(t) = AS(t)$$

$$\Leftrightarrow d\,S(t) = AS(t)dt \Leftrightarrow \frac{dS(t)}{S(t)} = A\,dt \Leftrightarrow \ln S(t) = At \Leftrightarrow S(t) = e^{At}.$$

Proposisi 2.15 [2]

Diambil sebarang $S(t), t \geq 0$, menjadi koleksi operator linier terbatas pada X yang memenuhi (3.9). Kemudian $S(\cdot) \in C([0,\infty); \mathcal{L}(X))$, jika dan hanya jika
$S(t) = e^{At},\quad t \geq 0$, untuk sebarang $A \in \mathcal{L}(X)$.

Bukti

Oleh karena A secara tunggal ditentukan oleh (3.12) dan definisi $S(t)$ dapat diperluas untuk $t < 0$ oleh persamaan (3.7) pada *Definisi 2.11*. Jika $S(\cdot)$ didefinisikan oleh persamaan (3.7) kemudian juga dari persamaan (3.9) dan persamaan (3.10) bahwa

$$S(t) = I + \int_0^t AS(\tau)d\tau = I + A\int_0^t S(\tau)d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Jika $\left(\int_0^t S(\tau)d\tau\right)^{-1}$ terdapat di $\mathcal{L}(X)$, kemudian

$$S(t) = I + A\int_0^t S(\tau)d\tau$$

$$S(t) - I = A\int_0^t S(\tau)d\tau$$

$$(S(t) - I)\left(\int_0^t S(\tau)d\tau\right)^{-1} = A\left(\int_0^t S(\tau)d\tau\right)\left(\int_0^t S(\tau)d\tau\right)^{-1}$$

$$(S(t) - I)\left(\int_0^t S(\tau)d\tau\right)^{-1} = A$$

Ekuivalen dengan

$$A = (S(t) - I)\left(\int_0^t S(\tau)d\tau\right)^{-1}.$$

Hal ini memberikan gambaran bagaimana mendapatkan A dari $S(\cdot)$. Oleh karena $\lim_{t\to 0} S(t) = I$, maka terdapat bilangan positif h_0 sehingga

$$\left\|\frac{1}{h}\int_0^h S(t)dt - I\right\| < 1 \text{ untuk } h \in (0, h_0).$$

Akibatnya, $\left(\frac{1}{h}\int_0^h S(t)dt\right)^{-1}$ dan oleh karena itu juga $\left(\int_0^h S(t)dt\right)^{-1}$ terdapat di $\mathcal{L}(X)$ untuk $h \in (0, h_0)$.

Diberikan

$$A := (S(h) - I)\left(\int_0^h S(t)dt\right)^{-1} \in \mathcal{L}(X).$$

Definisi A tidak bergantung pada $h \in (0, h_0)$. Memang untuk $0 < k < h < h_0$ telah diperoleh persamaan berikut.

$$\begin{aligned}
(S(h) - I)\int_0^k S(t)dt &= S(h)\int_0^k S(t)dt - \int_0^k S(t)dt \\
&= \int_0^k S(h)S(t)dt - \int_0^k S(t)dt \\
&= \int_0^k S(h+t)dt - \int_0^k S(t)dt \\
(S(h) - I)\int_0^k S(t)dt &= \int_h^{h+k} S(t)dt - \int_0^k S(t)dt \\
&= \int_k^{h+k} S(t)dt - \int_0^h S(t)dt \\
&= \int_0^h S(k)S(t)dt - \int_0^h S(t)dt \\
&= S(k)\int_0^h S(t)dt - \int_0^h S(t)dt \\
&= (S(k) - I)\int_0^h S(t)dt.
\end{aligned}$$

Menggunakan definisi A, sehingga diperoleh

$$\frac{1}{h}\int_0^h AS(t)dt = \frac{1}{h}(S(h) - I),$$

yaitu, turunan kanan $S(t)$ pada $t = 0$ ada dan diberikan oleh $S'(0+) = A$.

Untuk $t > 0$ akan diperoleh persamaan berikut, sesuai dengan (3.9)

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(S(t+h) - S(t)\big) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(S(h) - I)S(t) = AS(t) \text{ dan}$$

$$\lim_{h\to 0}(-\tfrac{1}{h})\big(S(t-h) - S(t)\big) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(S(h) - I)\lim_{h\to 0}S(t-h) = AS(t),$$

yaitu, $S'(t) = AS(t), t > 0$.

Oleh karena itu, $S(t)$ merupakan penyelesaian dari $x'(t) = Ax(t), t \geq 0$ dan $x(0) = I$. Karena e^{At} juga merupakan penyelesaian dari masalah ini, akan diperoleh

$$S(t) = e^{At}, t \geq 0,$$

dengan penyelesaian tunggal.

4. KESIMPULAN

Masalah Cauchy Abstrak (MCA) yang didefinisikan sebagai $\dot{x}(t) = Tx(t),\ x(0) = x_0, t \geq 0$ dengan T merupakan operator linier terbatas pada ruang Hilbert X atas bilangan Real.[1] MCA tersebut merupakan bentuk umum dari sistem linier, $\dot{x}(t) = Ax(t), x(0) = x_0, t \geq 0$ dengan A merupakan matrik persegi berukuran n x n yang mempunyai invers. Sehingga setiap MCA yang dibentuk menjadi semigrup operator linier terbatas selalu mempunyai penyelesaian tunggal, $x(t) = e^{At}x_0$ untuk setiap $t \in \mathbb{R}$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Arent, Wolfang, dkk. 2001. *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*. Basel; Boston; Berlin: Birkh$\ddot{a}$user Verlag.
[2] F. Kappel, W. Schappacher: *Strongly continuous semigroups–an introduction*, preprint. 5.
[3] Perko, Lawrence. 2001. *Differential Equations and Dynamical Systems-3rd ed.* New York: Springer-Verlag.
[4] Darmawijaya, Soeparna. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. UGM, Yogyakarta.