PROPORSIONALITAS AUTOKORELASI SPASIAL DENGAN INDEKS GLOBAL (INDEKS MORAN) DAN INDEKS LOKAL (LOCAL INDICATOR OF SPATIAL ASSOCIATION (LISA))

Dewi Retno Sari Saputro[1], Purnami Widyaningsih[1], Nughthoh Arfawi Kurdi[1], Ade Susanti[2]
[1]Program Studi Matematika FMIPA UNS
Jl. Ir. Sutami 36 A Jebres Kentingan Solo Jawa Tengah
[2]Mahasiswa S2 Program Studi Statistika Program Pascasarjana IPB
dewiretnoss@staff.uns.ac.id purnami_w@staff.uns.ac.id
arfa@mipa.uns.ac.id adesusanti23@gmail.com

Abstrak

Autokorelasi spasial merupakan teknik dalam analisis spasial untuk mengukur kemiripan nilai atribut dalam suatu ruang (jarak, waktu dan area). Jika terdapat pola sistematik dalam nilai atribut tersebut,maka terdapat autokorelasi spasial.Adanya autokorelasi spasial mengindikasikan bahwa nilai atribut pada area tertentu terkait oleh nilai atribut tersebut pada area lain yang letaknya saling berdekatan (bertetangga). Ketetanggaan tersebut diharapkan dapat mencerminkan derajat ketergantungan area (spasial) yang tinggi apabila dibandingkan dengan area lain yang letaknya terpisah jauh.Autokorelasi spasial diukur melalui dua indeks yaitu indeks global dan indeks lokal. Indeks Moran adalah indeks global tertua yang membandingkan nilai atribut area dengan nilai atribut area lainnya. Sementara, Local Indicator of Spatial Association (LISA)adalah indeks lokal yang dipergunakan untuk mengevaluasi kecenderungan adanya pola secara lokal dengan menunjukkan beberapa bentuk dari hubungan spasial. Indeks Moran cenderung mengabaikan pola lokal hubungan spasial sehingga LISA memberikan hubungan spasial pada setiap wilayah pengamatan. Keduanya, baik indeks global maupun lokal mempunyai nilai yang proporsional yaitu indeks Moran proporsional dengan jumlah nilai LISA melalui matriks pembobotan spasial (W) dengan taxonomic levels. Dalam artikel ini dibuktikan proporsionalitas tersebut yakni nilai indeks Moran proporsional dengan jumlah nilai LISA.

Kata kunci *: autokorelasi spasial; indeks local; indeks global; indeks Moran; LISA*

1. PENDAHULUAN

Statistika spasial adalah metode statistika yang digunakan untuk menganalisis data spasial. Data spasial adalah data yang memuat informasi lokasi, jadi tidak hanya apa yang diukur namun juga menunjukkan posisi data itu berada (Banerjee, 2004). Data spasial dapat berupa informasi mengenai lokasi geografi seperti letak garis lintang dan garis bujur dari masing-masing wilayah dan perbatasan antar daerah. Secara sederhana data spasial dinyatakan sebagai informasi alamat. Data spasial adalah data yang memuat adanya informasi lokasi atau geografis dari suatu wilayah. Secara umum analisis spasial membutuhkan suatu data yang berdasarkan lokasi dan memuat karakteristik dari lokasi tersebut. Analisis spasial terdiri atas tiga kelompok yaitu visualisasi, eksplorasi, dan pemodelan. Visualisasi adalah menginformasikan hasil analisis spasial. Eksplorasi adalah mengolah data spasial dengan metode statistika. Sedangkan pemodelan adalah menunjukkan adanya konsep hubungan sebab akibat dengan menggunakan metode dari sumber data spasial dan data non spasial untuk memprediksi adanya pola spasial (Nakhapakorn dan Supert, 2006). Lokasi pada data spasial harus diukur agar dapat mengetahui adanya efek spasial yang terjadi. Menurut Kosfeld

(2006), informasi lokasi dapat diketahui dari dua sumber yaitu (a) hubungan ketetanggaan (*neighborhood*) yang mencerminkan lokasi relatif dari satu unit spasial atau lokasi ke lokasi yang lain dalam ruang tertentu. Hubungan ketetanggaan dari unit-unit spasial biasanya dibentuk berdasarkan peta. Ketetanggaan dari unit-unit spasial ini diharapkan dapat mencerminkan derajat ketergantungan spasial yang tinggi jika dibandingkan dengan unit spasial yang letaknya terpisah jauh. (b) Jarak (*distance*), Lokasi yang terletak dalam suatu ruang tertentu dengan adanya garis lintang dan garis bujur menjadi sebuah sumber informasi. Informasi inilah yang digunakan untuk menghitung jarak antar titik yang terdapat dalam ruang. Diharapkan kekuatan ketergantungan spasial akan menurun sesuai dengan jarak yang ada. Hal ini sesuai dengan hukum pertama geografi yang dikemukakan oleh Tobler (1969) bahwa segala sesuatu saling berhubungan satu dengan yang lainnya namun sesuatu yang berdekatan mempunyai pengaruh lebih besar dibandingkan dengan segala sesuatu yang berjauhan. Kondisi suatu wilayah secara umum berkaitan dengan kondisi di wilayah lain, terutama wilayah yang berdekatan.

Analisis spasial temporal dapat digunakan untuk mendiskripsikan pola kejadian penyakit yang terbentuk dan membandingkannya dengan pola pada waktu yang berbeda. Menurut Anselin (1995), LeSage (1999), Nakhapakorn dan Supert (2006), serta Wen *et al.* (2010), autokorelasi spasial merupakan teknik dalam analisis spasial untuk mengukur tingkat hubungan dalam data yang dipengaruhi oleh ruang (data spasial).

Menurut Wen *et al.* (2010), autokorelasi spasial dapat mengukur kecenderungan adanya pengelompokan hubungan spasial menggunakan indeks global dan indeks lokal. Indeks Moran merupakan indeks global yang digunakan untuk menentukan ada tidaknya hubungan spasial dalam kejadian tertentu (Moran (1950), Anselin (1988), Ste'phane(2011)). *Local indicator of spatial association* (*LISA*) merupakan indeks lokal yang digunakan untuk mengevaluasi kecenderungan adanya pengelompokan spasial secara lokal dan menunjukkan beberapa bentuk dari hubungan spasial. Pada artikel ini dipaparkan indeks Moran dan LISA, keterkaitannya dan pembuktian proporsionalitas indeks Moran dan jumlah LISA.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian berbasis teori sebagai landasan atau dasar penelitian terapan tentang indeks Moran dan LISA, oleh karena itu langkah penelitian adalah melakukan kajian beberapa teori dari beberapa sumber pustaka baik jurnal, artikel atau *paper* yang disampaikan pada forum ilmiah, dan buku teks dengan materi autokorelasi spasial, indeks Moran, matriks pembobot spasial dan LISA. Langkah berikutnya adalah membuktikan proporsionalitas indeks Moran dan jumlah LISA dengan menggunakan beberapa konsep matematis.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Autokorelasi Spasial

Autokorelasi Spasial adalah suatu korelasi sendiri (*self-correlation*) antara variabel dengan dirinya sendiri atau dapat juga diartikan ukuran kemiripan dari objek dalam suatu ruang (Anselin (1993), Griffith (2005)).

Permulaan dari keacakan spasial mengindikasikan pola spasial seperti *clustered* (berkelompok), *dispersed* (menyebar), atau random (acak). Autokorelasi spasial positif mengindikasikan lokasi yang berdekatan mempunyai nilai yang mirip dan cenderung berkelompok. Autokorelasi spasial negatif mengindikasikan lokasi yang berdekatan mempunyai nilai yang berbeda dan cenderung menyebar. Dan tidak ada autokorelasi spasial mengindikasikan pola lokasi acak (Lee dan Wong, 2001). Pengukuran Autokorelasi Spasial untuk data spasial area dapat dihitung menggunakan metode Moran's I (Indeks Moran), Geary's c, dan Tango's excess (Preiffer, 2008).

3.2 Indeks Moran

Indeks Moran adalah ukuran dari autokorelasi global yang merupakan perluasan dari koefisien korelasi Pearson dan disimbolkan dengan I (Cliff dan Ord (1973), Cliff dan Ord (1981)). Indeks Moran merupakan teknik dalam analisis spasial untuk menghitung hubungan spasial yang terjadi dalam suatu ruang (Gittleman dan Kot, 1990). Referensi (Anselin (1988), Anselin (1995)) menyatakan indeks Moran ditulis sebagai

$$I = \frac{n}{W\ \sum_{i=1}^{n} {z_i}^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\, z_i\, z_j \qquad (1)$$

dengan $W = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij}$, $z_i = (x_i - \bar{x})$, dan $z_j = \left(x_j - \bar{x}\right)$, I adalah indeks Moran, n adalah banyak lokasi kejadian, x_i adalah banyaknya kejadian tertentu pada wilayah ke i, x_j adalah banyaknya kejadian tertentu pada wilayah ke j, $\bar{x}$ adalah rata–rata banyaknya kejadian tertentu, w_{ij} adalah elemen matriks pembobotan antara daerah i dan j, dan W adalah jumlah dari semua elemen pada matriks pembobotan spasial.

3.3 Matriks Pembobotan Spasial

Matriks pembobotan spasial W yaitu matriks yang elemennya adalah nilai pembobotan yang diberikan untuk perbandingan antar wilayah. Pembobotan tersebut didasarkan pada hubungan spasial antar wilayah. Referensi (LeSage, 1999), menyatakan terdapat dua cara untuk menentukan matriks pembobotan spasial W yaitu *phylogenetic* distance dan *taxonomic levels* yang diuraikan sebagai berikut.

a. Dengan p*hylogenetic* distance yaitu *Inverse Distance.* Nilai pembobot spasial dalam hal ini adalah

$$w_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}\ . \qquad (2)$$

Dari persamaan (2), w_{ij} menyatakan elemen pada matriks pembobotan spasial antara lokasi i dan j, d_{ij} menyatakan jarak antara lokasi i dan lokasi j dan n menyatakan banyak lokasi kejadian. Jarak antara lokasi i dan lokasi j adalah

$$d_{ij} = \sqrt{\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2}.$$

b. Dengan *taxonomic levels* yaitu *Fixed Distance* yaitu pembobotan dengan nilai 1, apabila suatu daerah letaknya saling berdekatan (kelompok yang sama) dan nilai 0 utk selainnya. Referensi (Gumpert, 2007) menyatakan bahwa terdapat 2 jenis *fixed distance* yaitu *Rook contiguity matrix dan Queen contiguity matrix. Rook contiguity matrix adalah* pembobotan dengan nilai 1, apabila suatu daerah letaknya saling berdekatan di sebelah kanan atau kiri dan atas atau bawah dengan daerah lain, Dan pembobotan dengan nilai 0, apabila letaknya tidak berdekatan sebelah kanan atau kiri dan atas atau bawah dengan daerah lain. Sedangkan *Queen contiguity matrix* merupakan pembobotan dengan nilai 1, apabila suatu daerah letaknya saling berdekatan dengan daerah lain. Dan pembobotan dengan nilai 0, apabila letaknya tidak berdekatan.
Matriks pembobotan spasial antara daerah *i* dan *j* dinyatakan sebagai

$$W_{n\times n} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & \cdots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & & w_{2n} \\ \vdots & & & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & w_{n3} & & w_{nn} \end{pmatrix}$$

Menurut (Gumpert (2007) dan Wen *et al.* (2010)), nilai yang dihasilkan dalam I adalah $-1 < I < 1$. Nilai indeks Moran dapat digunakan untuk menentukan karakteristik dari pola spasial secara umum yaitu bergerombol (*clustered*), random, dan menyebar (*dispersed*).

a. Jika nilai $I > E(I) = -\frac{1}{n-1}$ maka autokorelasi spasial positif dimana pola daerah sekitarnya memiliki sifat yang sama satu sama lain atau *clustered*.
b. Jika nilai $I < E(I)$ maka autokorelasi spasial negatif dimana pola daerah disekitarnya memiliki sifat yang berbeda satu sama lain atau *dispersed*.
c. Jika nilai *I* sama dengan nilai $E(I) = -\frac{1}{n-1}$ yang menghampiri nol, maka tidak terdapat autokorelasi spasial dimana polanya random (tidak menunjukkan pola yang sama maupun berbeda).

Autokorelasi spasial bernilai positif berarti nilai-nilai yang tinggi berdekatan dengan nilai yang tinggi atau nilai yang rendah berdekatan dengan nilai yang rendah. Autokorelasi spasial bernilai negatif berarti nilai yang tinggi berdekatan dengan nilai yang rendah atau nilai rendah bedekatan dengan nilai yang tinggi. Tidak terdapat autokorelasi spasial berarti bahwa kejadian tersebut random atau acak.

Uji signifikansi diperlukan untuk menentukan apakah benar terdapat suatu hubungan spasial dengan H_0 tidak terdapat autokorelasi spasial. Referensi (Cliff dan Ord (1973), Cliff dan Ord (1981)), indeks Moran *I* diasumsikan mendekati distribusi normal. Uji signifikansi dapat dilakukan dengan membandingkan nilai dari $Z(I)$ dengan $Z\alpha_{/2}$. $Z(I)$ ditulis sebagai

$$Z(I)=\frac{I-E(I)}{\sqrt{V(I)}} \quad (2)$$

dengan nilai harapan $E(I)$ dan variansi $Var\,(I)$ berturut-turut adalah $E(I)=\frac{-1}{n-1}$ dan $V(I)=\frac{nS_4-S_3S_5}{(n-1)(n-2)(n-3)\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_{ij}\right)^2}$ dengan $S_1=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(w_{ij}+w_{ji}\right)^2$, $S_2=\sum_i\left(\sum_j w_{ij}+\sum_j w_{ji}\right)^2$, $S_3=\frac{\frac{1}{n}\sum_i (x_i-\bar{x})^4}{\left(\frac{1}{n}\sum_i (x_i-\bar{x})^2\right)^2}$, $S_4=(n^2-3n+3)S_1-nS_2+3\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_{ij}\right)^2$, dan $S_5=S_1-2n\,S_1+6\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_{ij}\right)^2$.

Nilai harapan $E(I)=-\frac{1}{n-1}$ dapat dituliskan dalam *trace* dengan *trace* (tr) adalah jumlah elemen digonal suatu matriks. Terkait dengan hal tersebut, ditelusuri bagaimana memperoleh nilai harapan tersebut melalui trace. Nilai harapan $E(I)$ dapat ditulis sebagai

$$E(I)=\frac{tr(K)}{n-k} \quad (3)$$

dengan matriks K adalah $K=M\frac{1}{2}(V+V')M'$, dengan $M=I_n-\frac{1}{n}1_n1'_n$, I_n menyatakan matriks identitas $n\times n$, 1_n menyatakan matriks $n\times 1$ yang semua elemennya 1 dan $1'_n$ menyatakan transpos dari matriks 1_n. V merupakan matriks pembobotan terstandar. Misal $G=\frac{1}{2}(V+V')$ sehingga dapat dituliskan $K=M'GM$. Masing-masing matriks V,G,M dan K secara berturut-turut dituliskan sebagai

$$V=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{(n-1)} & \frac{1}{(n-1)} & \cdots & \frac{1}{(n-1)} \\ 0 & 0 & \frac{w_{23}}{\sum_{j=2}^{n}w_{2j}} & \cdots & \frac{w_{2n}}{\sum_{j=2}^{n}w_{2j}} \\ 0 & \frac{w_{32}}{\sum_{j=2}^{n}w_{3j}} & 0 & \cdots & \frac{w_{3n}}{\sum_{j=2}^{n}w_{3j}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{w_{n2}}{\sum_{j=2}^{n}w_{nj}} & \frac{w_{n3}}{\sum_{j=2}^{n}w_{nj}} & \cdots & 0 \end{pmatrix};$$

$$G=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2(n-1)} & \frac{1}{2(n-1)} & \cdots & \frac{1}{2(n-1)} \\ \frac{1}{2(n-1)} & 0 & g_{23} & \cdots & g_{2n} \\ \frac{1}{2(n-1)} & g_{32} & 0 & \cdots & g_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2(n-1)} & g_{n2} & g_{n3} & \cdots & 0 \end{pmatrix};$$

$$M_{n\times n} = I_n - \frac{1}{n}1_n1'_n = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} \end{pmatrix};$$ dan $K = M'GM$.

Selanjutnya, dihitung *trace* untuk matriks K yakni

$$tr(K) = tr(M'GM) = tr(MM'G) = tr(MG)$$

$$tr(K) = tr\left[\begin{pmatrix} M^{(1)} & : & M^{(2)} \\ .. & & .. \\ M^{(2)'} & : & M^{(3)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & : & B \\ .. & & .. \\ B' & : & C \end{pmatrix}\right]$$

$$= tr\left[\begin{pmatrix} M^{(1)}A + M^{(2)}B' & : & M^{(1)}B + M^{(2)}C \\ .. & & .. \\ M^{(2)'}A + M^{(3)}B' & : & M^{(2)'}B + M^{(3)}C \end{pmatrix}\right]$$

atau $\quad tr(K) = tr\left(M^{(1)}A\right) + tr\left(M^{(2)}B'\right) + tr\left(M^{(2)'}B\right) + tr\left(M^{(3)}C\right)$
dengan nilai masing-masing sukunya adalah

a. $M^{(1)}A = \left(1-\frac{1}{n}\right)(0) = 0; tr\left(M^{(1)}A\right) = tr[(0)] = 0,$

b. $M^{(2)}B' = \left[\left(-\frac{1}{n}.\frac{1}{2(n-1)}\right) + \left(-\frac{1}{n}.\frac{1}{2(n-1)}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{n}.\frac{1}{2(n-1)}\right)\right] = \left(\frac{-(n-1)}{2n(n-1)}\right) = \frac{-1}{2n}$

dengan $tr\left(M^{(2)}B'\right) = \frac{-1}{2n}$

$$M^{(2)'}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2n(n-1)} & -\frac{1}{2n(n-1)} & -\frac{1}{2n(n-1)} & \cdots & -\frac{1}{2n(n-1)} \\ -\frac{1}{2n(n-1)} & -\frac{1}{2n(n-1)} & -\frac{1}{2n(n-1)} & \cdots & -\frac{1}{2n(n-1)} \\ -\frac{1}{2n(n-1)} & -\frac{1}{2n(n-1)} & -\frac{1}{2n(n-1)} & \cdots & -\frac{1}{2n(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{2n(n-1)} & -\frac{1}{2n(n-1)} & -\frac{1}{2n(n-1)} & \cdots & -\frac{1}{2n(n-1)} \end{pmatrix}$$

dengan

$$tr\left(M^{(2)'}B\right) = -\frac{1}{2n(n-1)} + \left(-\frac{1}{2n(n-1)}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{2n(n-1)}\right)$$

$$= \frac{-(n-1)}{2n(n-1)} = \frac{-1}{2n},$$

dan

c. $$M^{(3)}C = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & g_{23} & \cdots & g_{2n} \\ g_{32} & 0 & \cdots & g_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n2} & g_{n3} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

dengan $tr\left(M^{(3)}C\right) = -\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} g_{ij} = -\frac{1}{n}(n-1) = \frac{-(n-1)}{n}$.
Dari uraian tersebut diperoleh

$$tr(K) = tr\left(M^{(1)}A\right) + tr\left(M^{(2)}B'\right) + tr\left(M^{(2)\prime}B\right) + tr\left(M^{(3)}C\right)$$
$$= \frac{-1-1-2n+2}{2n} = \frac{-2n}{2n} = -1$$

Untuk $k = 1$ diperoleh $E(I) = \frac{-1}{n-1}$.

Moran cenderung mengabaikan pola lokal hubungan spasial. Oleh karena itu, diperlukan informasi kecenderungan adanya hubungan spasial di setiap lokasi (lokal) dengan LISA.

3.4 *Local Indicator of Spatial Association* (LISA)

Autokorelasi spasial global dalam hal ini adalah indeks Moran tidak memberikan informasi pola spasial pada wilayah tertentu. Oleh karena itu, diperlukan informasi kecenderungan adanya hubungan spasial di setiap lokasi dengan LISA. Referensi (Anselin, 1995), mendefinisikan LISA sebagai suatu statistik yang memenuhi dua kriteria berikut.

1) Nilai LISA setiap daerah dapat digunakan untuk memberikan petunjuk adanya pengelompokan hubungan spasial yang signifikan dari nilai yang sama di sekitar daerah tersebut.
2) Jumlah dari nilai *LISA* untuk seluruh wilayah sebanding dengan nilai indeks Moran.

LISA untuk setiap wilayah i ditulis sebagai

$$L_i = \frac{z_i}{m_2}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\, z_j \tag{4}$$

dengan $m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {z_i}^2$, $z_i = (x_i - \bar{x})$, $z_j = \left(x_j - \bar{x}\right)$, I_i adalah nilai *LISA* pada wilayah i, n adalah banyak lokasi kejadian, x_i adalah banyaknya kejadian tertentu pada wilayah ke-i, x_j adalah banyaknya kejadian tertentu pada wilayah ke j, $\bar{x}$ menyatakan rata–rata banyak kejadian, w_{ij} merupakan elemen matriks pembobotan antara wilayah i dan j. Jumlah LISA untuk seluruh wilayah adalah

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = \frac{1}{m_2}\sum_{i=1}^{n}\left(z_i\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\, z_j\right) = \frac{1}{m_2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij} z_i\, z_j$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} {z_i}^2\right)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij} z_i\, z_j = \frac{n}{\left(\sum_{i=1}^{n} {z_i}^2\right)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij} z_i\, z_j$$

dengan nilai indeks Moran (global) seperti pada persamaan (1) yang ditulis sebagai

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = \left(\frac{n}{W \ \sum_{i=1}^{n} {z_i}^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \, z_i \, z_j \right) \times W$$

atau $\sum_{i=1}^{n} L_{i,t} = I \times W$ sehingga diperoleh bahwa nilai indeks Moran sebanding dengan jumlah nilai LISA yaitu

$$I = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i}{W}$$

dengan $W = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij}$. Selanjutnya, perhitungan nilai harapan $E(I_i)$ dan $Var\ (I_i)$ diuraikan sebagai berikut.

$$E(I_i) = E\left[\frac{z_i}{m_2} \sum_{j \neq i} w_{ij} \, z_j \right] = \frac{1}{m_2} \ E[z_i] \ E\left[\sum_{j \neq i} w_{ij} \, z_j \right] = \frac{1}{m_2} \left(\sum_{j \neq i} w_{ij} \right) E[z_i z_j]$$

$$= \frac{1}{m_2} \left(\sum_{j \neq i} w_{ij} \right) \frac{-m_2}{(n-1)} = -\frac{\left(\sum_{j \neq i} w_{ij}\right)}{n-1} = -\frac{w_i}{n-1}$$

dengan w_i adalah jumlah elemen baris dari $\left(\sum_{j \neq i} w_{ij}\right)$.

$Var\ (I_i) = E\left[{I_i}^2\right] - (E[I_i])^2;$

$$E\left[{I_i}^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{m_2}\right)^2 {z_i}^2 \left(\sum_{j \neq i} w_{ij} \, z_j \right)^2 \right]$$

$$= \left(\frac{1}{m_2}\right)^2 E\left[{z_i}^2 \left(\sum_{j \neq i} w_{ij} \, z_j \right)^2 \right]$$

$$= \left(\frac{1}{m_2}\right)^2 \left(\sum_{j \neq i} {w_{ij}}^2 \, E\left[{z_i}^2 {z_j}^2\right] + \sum_{k \neq i} \sum_{h \neq i} w_{ik} w_{ih} \, E\left[{z_i}^2 z_k z_h\right] \right)$$

dengan $E\left[{z_i}^2 {z_j}^2\right] = \frac{n{m_2}^2 - m_4}{(n-1)}$, $E\left[{z_i}^2 z_k z_h\right] = \frac{2m_4 - n{m_2}^2}{(n-1)(n-2)}$, dan $m_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n} {z_i}^4}{n}$ sehingga $E\left[{I_i}^2\right]$ dapat ditulis juga sebagai

$$E\left[{I_i}^2\right] = \left(\frac{1}{m_2}\right)^2 \left[\left(\sum_{j \neq i} {w_{ij}}^2 \right) \left(\frac{n{m_2}^2 - m_4}{(n-1)} \right) + \left(\sum_{k \neq i} \sum_{h \neq i} w_{ik} w_{ih} \left(\frac{2m_4 - n{m_2}^2}{(n-1)(n-2)} \right) \right) \right] \quad (3)$$

Kemudian dimisalkan $b_2 = {m_4}/{{m_2}^2}$, persamaan (3) dapat disederhanakan dan dapat dituliskan kembali sebagai

$$E\left[{I_i}^2\right] = \left(\sum_{j \neq i} {w_{ij}}^2 \right) \left(\frac{n - b_2}{(n-1)} \right) + \sum_{k \neq i} \sum_{h \neq i} w_{ik} w_{ih} \left(\frac{2b_2 - n}{(n-1)(n-2)} \right).$$

dengan demikian diperoleh bahwa $Var\ (I_i) = E[I_i^{\ 2}] - (E[I_i])^2$ atau $Var\ (I_i) = \left(\sum_{j\neq i} w_{ij}^{\ 2}\right)\left(\frac{n-b_2}{(n-1)}\right) + \sum_{k\neq i}\sum_{h\neq i} w_{ik}w_{ih}\left(\frac{2b_2-n}{(n-1)(n-2)}\right) - \left(-\frac{w_i}{n-1}\right)^2$.

4. SIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan,, autokorelasi spasial dapat mengukur kecenderungan adanya pengelompokan hubungan spasial menggunakan indeks global dan indeks lokal. Indeks Moran merupakan indeks global yang digunakan untuk menentukan ada tidaknya hubungan spasial dalam kejadian dan LISA merupakan indeks lokal yang digunakan untuk mengevaluasi kecenderungan adanya pengelompokan spasial secara lokal dan menunjukkan beberapa bentuk dari hubungan spasial. Meskipun fungsi pengukurannya pada pengelompokkan yang berbeda, lokal dan global, namun nilai indeks Moran sebanding dengan jumlah nilai LISA yaitu $I = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i}{W}$.

5. UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan terima kasih ditujukan pada Kementerian Riset Teknologi dan Perguruan Tinggi (Ristek Dikti) melalui Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat (LPPM) Universitas Sebelas Maret Surakarta atas Hibah Penelitian Unggulan Perguruan Tinggi (PUPT). Artikel ini salah satu diantara beberapa artikel terkait hibah penelitian tersebut yang didesiminasikan melalui forum ilmiah.

6. DAFTAR PUSTAKA

Anselin, L. (1988). *Spatial Econometrics: Methods and Models*. London, NJ: Kluwer Academic Press.

Anselin, L. (1993). Exploratory Spatial Data Analysis and geographic Information Systems. National Center for Geographic Information and Analysis of California Santa Barbara: CA93106.

Anselin, L. (1995). Local Indicator of Spatial Association. Geographical Analysis, 27, 93-115.

Banerjee, S. (2004). *Hierarchical Modeling and Analysis for Spatial Data*. Boca Raton, NJ: Chapman and Hall/CRC.

Cliff, A. D. and J. K. Ord. (1973). *Spatial Autocorrelation*. London, NJ: Pion.

Cliff, A. D. and J. K. Ord. (1981). Spatial and Temporal Analysis: Autocorrelation in Space and Time. *Quantitative Geography: A British View*, 104 – 110. Routledge & Kegan Paul, London.

D. Gumpert D. (2007). Spatial Methods in Econometrics. *Doctoral thesis, WU Vienna University of Economics and Business*.

Gittleman, J. L. and M. Kot. (1990). Adaptation: Statistics and A null Model for Estimating Phylogenetic Effects. *Systematic Zoology*, **39**, 227 – 241.

Griffith, D. (2005). *Spatial Autocorrelation Concept*. Department of Geography, Syracuse University.

Kosfeld, R. (2006). *Spatial Econometric*. Diakses dari URL: http://www.scribd.com.

Lee, J. and S. D. Wong. (2001). *Statistical Analysis With Arcview GIS*. New York, NJ: John Willey & Sons. Inc.

LeSage, J. P. (1999). *The Theory and Practice of Spatial Econometrics*. Department of Econometrics, University of Toledo, 10-14.

Moran, P. A. P. (1950). Notes on Continuous Stochastic Phenomen. *Biometrika*, **37**(1), 17–23. JSTOR 2332142. doi:10.2307/2332142.

Nakhapakorn, K. and J. Supert. (2006). Temporal and Spatial Autocorrelation Statistics of Dengue Fever. *Dengue Buletin*, **30**, 177-183.

Pfeiffer, Dirk U, P. Timothy. Robinson, B. Kim. Stevens, J. David. Rogers, C.A. Archie. (2008). *Spatial Analysis in Epidemiologi*. New York, NJ: Oxford University Press.

Ste'phane, D. (2011). A New Perspective about Moran's Coefficient: Spatial Autocorrelation as a Linear Regression Problem. *Geographical Analysis*, **43**, 127–141.

Tobler, W. (1969). Geographical filters and their inverses. *Geographical Analysis*, **1**(3), 234–53.

Wen, Tzai-Hung, N. H. Lin, D. Chao, K. Huang, C. Kan, K. Chun-Min Lin, J. T. Wu, S. Y. Huang, I-Chun Fan. (2010). Spatial-temporal Patterns of Dengue in Areas at Risk of Dengue Hemorrhagic Fever in Kaohsiung Taiwan 2001. *International Journal of Infectious Diseases*, **14**, 334-343.

Zhukov, Y. (2010). *Spatial Autocorrelation*. Amerika: IQSS, Harvard University.