

# ANALISIS KESULITAN MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN SOAL PEMBUKTIAN MATEMATIS PADA MATA KULIAH STATISTIKA MATEMATIKA

**Andri Suryana**

Universitas Indraprasta PGRI Jakarta

[andrisuryana21@gmail.com](mailto:andrisuryana21@gmail.com)

## *Abstrak*

*Tujuan penelitian ini secara umum adalah untuk menganalisis kesulitan mahasiswa yang telah memperoleh pembelajaran Model PACE dan konvensional pada Mata Kuliah Statistika Matematika dalam menyelesaikan soal pembuktian matematis. Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif. Adapun subjek dalam penelitian ini adalah mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika yang mengambil Mata Kuliah Statistika Matematika di salah satu PTS di Jakarta Timur. Teknik sampling yang digunakan berupa purposive sampling, sedangkan instrumen yang digunakan adalah dokumen (hasil tes Kemampuan Awal Matematis dan Kemampuan Pembuktian Matematis mahasiswa), lembar observasi, pedoman wawancara, dan peneliti. Data penelitian ini dikumpulkan dengan teknik triangulasi. Adapun hasil dari penelitian ini adalah mahasiswa masih mengalami kesulitan, baik secara keseluruhan maupun berdasarkan level Kemampuan Awal Matematis (KAM), dalam menyelesaikan soal pembuktian matematis pada kedua pembelajaran (Model PACE dan konvensional). Namun, mahasiswa yang telah memperoleh pembelajaran Model PACE mengalami kesulitan yang lebih rendah daripada mahasiswa yang telah memperoleh pembelajaran konvensional. Adapun kesulitan paling banyak yang dialami mahasiswa pada kedua pembelajaran (Model PACE dan konvensional) terletak pada indikator 'mengkonstruksi bukti', yaitu 'kesulitan dalam mengawali proses pembuktian dan membuat keterkaitan antara fakta dengan unsur dari konklusi yang hendak dibuktikan'.*

**Kata Kunci:** Kemampuan Pembuktian Matematis, Model PACE, Statistika Matematika

## **1. PENDAHULUAN**

Statistika Matematika merupakan salah satu mata kuliah di Program Studi Pendidikan Matematika yang memiliki karakteristik: (a) materi bersifat abstrak, (b) membutuhkan kemampuan dalam menggeneralisasi dan mensintesis, (c) menekankan pada aspek penalaran deduktif/pembuktian, (d) memerlukan pemahaman secara analitik dan geometrik, serta (e) memerlukan ide-ide kreatif (Suryana, 2016). Berdasarkan karakteristik tersebut, terlihat bahwa untuk mempelajari mata kuliah Statistika Matematika diperlukan beragam kemampuan matematis, salah satunya adalah kemampuan pembuktian matematis.

Kemampuan pembuktian matematis merupakan kemampuan matematis dalam membaca bukti dan mengkonstruksi bukti (Sumarmo, 2011). Kemampuan membaca bukti merupakan kemampuan dalam menilai kebenaran suatu pembuktian dan memberikan alasan tiap-tiap langkah

pembuktian. Sementara itu, kemampuan mengkonstruksi bukti adalah kemampuan dalam menyusun suatu bukti pernyataan matematika secara lengkap, baik menggunakan pembuktian langsung maupun tidak langsung berdasarkan definisi, prinsip, dan teorema (Sumarmo, 2011). Namun faktanya di lapangan, kemampuan pembuktian matematis mahasiswa pada Mata Kuliah Statistika Matematika ternyata masih tergolong rendah (Marron, 1999; Petocz & Smith, 2007; dan Suryana, 2016).

Berdasarkan hasil studi Marron (1999) dan Petocz & Smith (2007), diperoleh temuan bahwa mahasiswa ternyata mengalami kesulitan pada proses pembuktian matematis ketika mempelajari Statistika Matematika. Temuan tersebut dipertegas oleh hasil studi Suryana (2016) bahwa mahasiswa mengalami kesulitan dalam membaca bukti dan mengkonstruksi bukti matematis ketika mempelajari Mata Kuliah Statistika Matematika. Dalam membaca bukti matematis, mahasiswa mengalami kesulitan dalam memeriksa kebenaran dan menuliskan konsep yang digunakan pada tiap langkah pembuktian Statistika Matematika. Suryana (2016) mengungkapkan juga bahwa penyebab rendahnya kemampuan pembuktian matematis mahasiswa pada Mata Kuliah Statistika Matematika adalah dosen kurang memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk dapat mengkonstruksi konsep Statistika Matematika secara mandiri dan mahasiswa ternyata masih lemah dalam menguasai konsep materi prasyarat Statistika Matematika.

Untuk mengatasi hal tersebut, maka dosen diharapkan dapat memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk aktif dalam pembelajaran dan dapat mengkonstruksi konsep Statistika Matematika secara mandiri sehingga diharapkan dapat mengatasi kesulitan yang dihadapi mahasiswa dalam mempelajari Mata Kuliah Statistika Matematika, terutama soal pembuktian matematis. Salah satu model yang menganut teori belajar konstruktivisme dan diprediksi dapat mengatasi masalah tersebut adalah pembelajaran Model *PACE*. Model *PACE* dikembangkan oleh Lee (1999) untuk pembelajaran Statistika yang merupakan singkatan dari proyek (*Project*), aktivitas (*Activity*), pembelajaran kooperatif (*Cooperative Learning*), dan latihan (*Exercise*).

Proyek merupakan komponen penting dari Model *PACE* (Lee, 1999). Proyek dilakukan dalam bentuk kelompok. Mahasiswa dapat memilih sendiri topik yang dianggap menarik. Mereka diminta untuk mencari solusi dari permasalahan yang dipilihnya, baik yang berasal dari kejadian dalam kehidupan nyata ataupun dari jurnal yang berkaitan dengan topik. Adapun prosedurnya diberikan dalam bentuk Lembar Proyek (LP). Mereka diharuskan membuat laporan dari proyek yang dikerjakan. Sementara itu, aktivitas dalam Model *PACE* bertujuan untuk memperkenalkan mahasiswa terhadap informasi atau konsep-konsep yang baru (Lee, 1999). Hal ini dilakukan dengan memberikan tugas dalam bentuk Lembar Aktivitas (LA). Adapun perannya sebagai panduan mahasiswa dalam mempelajari materi. Melalui LA,

mahasiswa diberikan kesempatan untuk menemukan sendiri konsep yang dipelajari.

Untuk tahap pembelajaran kooperatif dalam Model *PACE*, biasanya dilaksanakan di kelas. Pada tahap ini, mahasiswa bekerja di dalam kelompok dan harus mendiskusikan solusi dari permasalahan dalam Lembar Diskusi (LD). LD ini digunakan untuk mentransformasikan pengetahuan yang dipelajari pada LA. Melalui LD, mahasiswa berkesempatan untuk mengemukakan temuan-temuan yang diperoleh pada saat diskusi. Selama diskusi, diharapkan terjadi pertukaran informasi yang saling melengkapi sehingga mahasiswa mempunyai pemahaman yang benar terhadap suatu konsep (Lee, 1999). Sementara itu, latihan dalam Model *PACE* bertujuan untuk memperkuat konsep-konsep yang telah dikonstruksi pada tahap aktivitas dan pembelajaran kooperatif dalam bentuk penyelesaian soal-soal (Lee, 1999). Latihan ini diberikan kepada mahasiswa dalam bentuk Lembar Latihan (LL) berupa tugas tambahan agar penguasaan terhadap materi menjadi lebih baik.

Dalam menerapkan pembelajaran Model *PACE*, perlu dipertimbangkan faktor kemampuan awal matematis (KAM) mahasiswa. Hal ini penting untuk diperhatikan dalam proses pembelajaran matematika (Suryadi, 2012), serta diprediksi memiliki kontribusi terhadap hasil penelitian. Untuk dapat mengetahui lebih jauh terkait implementasi pembelajaran Model *PACE* dalam mengatasi kesulitan mahasiswa terkait soal pembuktian matematis, maka dilakukan suatu penelitian dengan judul "Analisis Kesulitan Mahasiswa dalam Menyelesaikan Soal Pembuktian Matematis pada Mata Kuliah Statistika Matematika". Dalam penelitian ini, analisis kesulitan mahasiswa ditinjau secara keseluruhan dan berdasarkan level KAM; indikator kemampuan pembuktian matematis; serta pembelajaran (Model *PACE* dan konvensional) sebagai bentuk kebaruan dari penelitian ini. Adapun indikator kemampuan pembuktian matematis yang digunakan dalam penelitian ini menggunakan teori dari Sumarmo (2011), yaitu kemampuan membaca bukti matematis dan kemampuan mengkonstruksi bukti matematis.

Berdasarkan uraian di atas, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah "Kesulitan apa yang dialami mahasiswa dalam menyelesaikan soal pembuktian matematis pada Mata Kuliah Statistika Matematika ditinjau secara keseluruhan dan berdasarkan level KAM; indikator kemampuan pembuktian matematis; serta pembelajaran?". Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis kesulitan mahasiswa dalam menyelesaikan soal pembuktian matematis pada mata kuliah Statistika Matematika ditinjau secara keseluruhan dan berdasarkan level KAM; indikator kemampuan pembuktian matematis; serta pembelajaran. Penelitian ini diharapkan dapat menjadi suatu referensi serta wacana bagi para praktisi pendidikan matematika dalam upaya mengatasi kesulitan mahasiswa dalam mempelajari Mata Kuliah Statistika Matematika, terutama yang berkaitan dengan soal pembuktian matematis.

## 2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilaksanakan di salah satu PTS di Jakarta Timur. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode kualitatif. Adapun subjek dalam penelitian ini adalah mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika yang mengambil Mata Kuliah Statistika Matematika tahun akademik 2013/2014 sebanyak 137 mahasiswa yang berasal dari 4 kelas paralel, yaitu 2 kelas memperoleh pembelajaran Model *PACE* yang berjumlah 68 mahasiswa, dan 2 kelas lainnya memperoleh pembelajaran konvensional yang berjumlah 69 mahasiswa. Untuk teknik samplingnya, peneliti menggunakan *purposive sampling* dan sumber datanya berasal dari mahasiswa sebagai subjek penelitian.

Penelitian ini menggunakan beragam instrumen, yaitu dokumen (hasil tes Kemampuan Awal Matematis dan Kemampuan Pembuktian Matematis mahasiswa), lembar observasi, pedoman wawancara, dan peneliti. Tes Kemampuan Awal Matematis (KAM) dan tes Kemampuan Pembuktian Matematis (KPM) yang digunakan dalam penelitian ini sudah divalidasi sehingga siap untuk digunakan dalam penelitian. Adapun metode pengumpulan data yang digunakan adalah metode triangulasi, sedangkan teknik analisis datanya menggunakan Model Miled dan Huberman. Aktivitas analisis data dalam model tersebut meliputi reduksi data, *display* data, dan kesimpulan/verifikasi (Sugiyono, 2011). Untuk uji keabsahan datanya, peneliti menggunakan uji kredibilitas (melalui triangulasi), uji transferabilitas, uji dependabilitas, serta uji konfirmasi.

Untuk teknik pengelompokan KAM mahasiswa, peneliti menggunakan aturan Noer (2010) yang dimodifikasi. Adapun aturannya dapat dilihat pada Tabel 1.

**Tabel 1. Kategori Pengelompokan KAM Mahasiswa**

Skor Tes ( $X$ )	Kategori
$X \geq 70\%$	Tinggi
$60\% \leq X < 70\%$	Sedang
$X < 60\%$	Rendah

## 3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

### Hasil Penelitian

#### Data Kemampuan Awal Matematis (KAM) Mahasiswa

Data KAM mahasiswa dianalisis sebelum penelitian yang bertujuan untuk mengelompokkan KAM mahasiswa ke dalam 3 level, yaitu tinggi, sedang, dan rendah. Adapun hasilnya disajikan pada Tabel 2.

**Tabel 2. Statistik Deskriptif Data KAM**

No.	Kelompok Pembelajaran	$n$	$\bar{x}$	$s$
-----	-----------------------	-----	-----------	-----

1	Model <i>PACE</i>	68	24,50	5,91
2	Konvensional	69	23,70	5,68
	<b>Total</b>	<b>137</b>	<b>24,09</b>	<b>5,79</b>

Tabel 2 memberikan informasi bahwa rerata dan simpangan baku dari skor KAM mahasiswa pada kedua kelompok pembelajaran relatif sama. Hal ini memperkuat alasan bahwa penentuan kelompok pembelajaran dapat dilakukan secara acak. Selanjutnya, mahasiswa dikelompokkan berdasarkan skor KAM ke dalam 3 level, yaitu tinggi, sedang dan rendah. Adapun teknik pengelompokannya menggunakan aturan Noer (2010) yang dimodifikasi. Berikut ini diberikan hasil pengelompokan KAM mahasiswa pada masing-masing kelompok pembelajaran.

**Tabel 3. Sebaran Sampel Penelitian**

Level KAM	Kelompok Pembelajaran		Total
	Model <i>PACE</i>	Konvensional	
<b>Tinggi</b>	13	12	25
<b>Sedang</b>	43	43	86
<b>Rendah</b>	12	14	26
<b>Total</b>	<b>68</b>	<b>69</b>	<b>137</b>

**Data Kemampuan Pembuktian Matematis (KPM) Mahasiswa**

Data KPM mahasiswa yang dianalisis berasal dari data postes. Hal ini dilakukan untuk mengetahui pencapaian KPM mahasiswa yang memperoleh pembelajaran Model *PACE* dan konvensional. Adapun datanya diberikan pada Tabel 4.

**Tabel 4. Data Pencapaian KPM**

Indikator KPM	KAM	Stat.	Postes	
			<i>PACE</i>	Konv.
Membaca Bukti (Skor Ideal = 4)	Tinggi	$\bar{x}$	3,39	3,00
		%	(84,62%)	(75%)
	Sedang	$\bar{x}$	2,65	2,14
		%	(66,28%)	(53,49%)
	Rendah	$\bar{x}$	2,33	2,07
		%	(58,30%)	(51,80%)
Total	$\bar{x}$	2,74	2,28	
%	(68,40%)	(56,90%)		
Mengkonstruksi Bukti (Skor Ideal = 8)	Tinggi	$\bar{x}$	4,38	3,25
		%	(54,81%)	(40,63%)
	Sedang	$\bar{x}$	3,95	3,21
		%	(49,42%)	(40,12%)
	Rendah	$\bar{x}$	3,50	2,43
		%	(43,75%)	(30,36%)
Total	$\bar{x}$	3,96	3,06	

		%	(49,45%)	(38,20%)
--	--	---	----------	----------

Berdasarkan Tabel 4, diperoleh temuan bahwa untuk semua indikator KPM, rerata pencapaian mahasiswa secara keseluruhan dan berdasarkan level KAM yang memperoleh pembelajaran Model *PACE* lebih tinggi daripada mahasiswa yang memperoleh pembelajaran konvensional. Selain itu, diperoleh temuan juga bahwa secara keseluruhan dan berdasarkan level KAM, pencapaian KPM mahasiswa yang memperoleh pembelajaran Model *PACE* maupun konvensional pada indikator ‘mengkonstruksi bukti’ ternyata lebih rendah daripada indikator ‘membaca bukti’. Dengan kata lain, kesulitan paling banyak yang dialami mahasiswa dalam menyelesaikan soal pembuktian matematis pada kedua pembelajaran (Model *PACE* maupun konvensional) terletak pada indikator ‘mengkonstruksi bukti’.

**Pembahasan**

Dalam menyelesaikan soal pembuktian matematis pada Mata kuliah Statistika Matematika, ternyata mahasiswa masih mengalami kesulitan, baik yang memperoleh pembelajaran Model *PACE* maupun konvensional. Berikut ini diuraikan kesulitan-kesulitan mahasiswa dalam menyelesaikan soal pembuktian matematis pada Mata kuliah Statistika Matematika ditinjau secara keseluruhan dan berdasarkan level KAM; indikator KPM; serta pembelajaran.

**Indikator ‘Membaca Bukti’ pada KPM**

Untuk indikator ‘membaca bukti’ pada KPM, rerata pencapaian mahasiswa secara keseluruhan dan berdasarkan level KAM yang memperoleh pembelajaran Model *PACE* lebih tinggi daripada mahasiswa yang memperoleh pembelajaran konvensional. Hal ini dapat dilihat pada Tabel 4. Dengan kata lain, mahasiswa yang memperoleh pembelajaran Model *PACE* secara keseluruhan dan berdasarkan level KAM pada indikator ‘membaca bukti’, mengalami kesulitan yang lebih rendah dalam menyelesaikan soal KPM daripada mahasiswa yang memperoleh pembelajaran konvensional. Untuk memperkuat hasil analisis deskriptif tersebut, maka analisis dilanjutkan pada analisis dokumen (jawaban tes mahasiswa berdasarkan level KAM), hasil observasi, dan wawancara (triangulasi). Adapun soal KPM yang mengungkap indikator ‘membaca bukti’ pada Mata kuliah Statistika Matematika adalah sebagai berikut:

Periksalah kebenaran tiap langkah pembuktian di bawah ini dan tuliskanlah konsep-konsep yang digunakannya.

**Pernyataan:**  
 Jika  $X$  dan  $Y$  adalah dua peubah acak berdistribusi normal yang memiliki fungsi pembangkit momen gabungan berbentuk:

$$M(t_1, t_2) = \exp \left[ \mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2) \right]$$

maka  $\text{cov}(X, Y) = \rho\sigma_1\sigma_2$ .

**Bukti:**

Akan dicari terlebih dahulu nilai  $E(X)$  dan  $E(Y)$ :

- $M(t_1, 0) = \exp\left[\mu_1 t_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 t_1^2\right]$  ... (1)

$$\frac{\partial M(t_1, 0)}{\partial t_1} = (\mu_1 + \sigma_1^2 t_1) \exp\left[\mu_1 t_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 t_1^2\right] \quad \dots (2)$$

sehingga  $E(X) = \left. \frac{\partial M(t_1, 0)}{\partial t_1} \right|_{t_1=0} = \mu_1$  ... (3)

- $M(0, t_2) = \exp\left[\mu_2 t_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 t_2^2\right]$  ... (4)

$$\frac{\partial M(0, t_2)}{\partial t_2} = (\mu_2 + \sigma_2^2 t_2) \exp\left[\mu_2 t_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 t_2^2\right] \quad \dots (5)$$

sehingga  $E(Y) = \left. \frac{\partial M(0, t_2)}{\partial t_2} \right|_{t_2=0} = \mu_2$  ... (6)

Selanjutnya, akan dicari nilai  $E(XY)$ , yaitu:

$$\frac{\partial M(t_1, t_2)}{\partial t_1} = \left\{ \exp\left[\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2)\right] \right\} \left\{ \mu_1 + \frac{1}{2}(2\sigma_1^2 t_1 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_2) \right\} \dots (7)$$

$$\frac{\partial^2 M(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \left\{ \exp\left[\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2)\right] \right\} (\rho\sigma_1\sigma_2) + \left\{ \mu_1 + \frac{1}{2}(2\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_2) \right\} \left\{ \exp\left[\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2)\right] \right\} \left\{ \mu_2 + \frac{1}{2}(2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 t_2) \right\} \quad \dots (8)$$

sehingga  $E(XY) = \left. \frac{\partial^2 M(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_{t_1=t_2=0} = \rho\sigma_1\sigma_2 + \mu_1\mu_2$  ... (9)

Akibatnya,  $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \rho\sigma_1\sigma_2$  ... (10)

**Terbukti.**

Soal di atas bertujuan untuk mengungkap kemampuan mahasiswa dalam memeriksa kebenaran tiap langkah pembuktian dan menuliskan konsep-konsep yang digunakan berkaitan dengan materi ‘Distribusi Normal Bivariat’. Adapun hasil analisis dokumen (jawaban tes mahasiswa berdasarkan level KAM), observasi, dan wawancara terkait indikator ‘membaca bukti’ adalah sebagai berikut:

- Untuk mahasiswa dengan KAM tinggi yang memperoleh pembelajaran Model *PACE*, umumnya mereka tidak mengalami kesulitan yang berarti dalam memeriksa kebenaran tiap langkah pembuktian dan menuliskan konsep-konsep yang digunakan, meskipun beberapa diantaranya kurang lengkap dalam menuliskan konsep. Lain halnya dengan mahasiswa

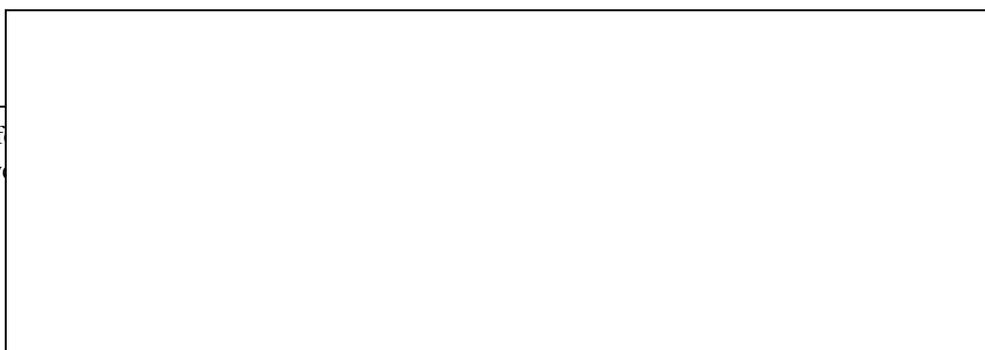
yang memperoleh pembelajaran konvensional, umumnya mereka sedikit mengalami kesulitan dalam memeriksa kebenaran terkait konsep ‘turunan parsial’ dari fungsi kompleks.

- b. Untuk mahasiswa dengan KAM sedang yang memperoleh pembelajaran Model *PACE*, umumnya mereka mengalami kesulitan dalam memeriksa kebenaran tiap langkah pembuktian dan menuliskan konsep ‘turunan parsial’ dari fungsi kompleks. Hal ini terlihat dari jawaban mahasiswa yang tidak lengkap dalam menuliskan konsep tersebut. Lain halnya dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran konvensional, umumnya mereka masih mengalami kesulitan dalam menuliskan beberapa konsep yang digunakan dalam bukti tersebut.
- c. Untuk mahasiswa dengan KAM rendah, baik yang memperoleh pembelajaran Model *PACE* maupun konvensional, umumnya mereka masih mengalami kesulitan dalam menuliskan sebagian besar konsep-konsep yang digunakan dalam bukti tersebut. Hal ini terlihat dari jawaban mahasiswa yang masih banyak ditemukan kekeliruan, seperti kesalahan dalam menurunkan secara parsial dari fungsi kompleks, sebagian besar alasan yang dikemukakan mahasiswa kurang tepat, serta ada beberapa persamaan ternyata tidak dianalisis oleh mahasiswa.

Berdasarkan hasil analisis di atas, secara umum mahasiswa ternyata masih mengalami kesulitan dalam memeriksa kebenaran dan menuliskan konsep yang digunakan dalam tiap langkah pembuktian. Temuan ini ternyata serupa dengan temuan Suryana (2016). Adapun salah satu faktor penyebabnya menurut Suryana (2016) adalah lemahnya penguasaan materi prasyarat.

### **Indikator ‘Mengkonstruksi Bukti’ pada KPM**

Untuk indikator ‘mengkonstruksi bukti’ pada KPM, rerata pencapaian mahasiswa secara keseluruhan dan berdasarkan level KAM yang memperoleh pembelajaran Model *PACE* lebih tinggi daripada mahasiswa yang memperoleh pembelajaran konvensional. Hal ini dapat dilihat pada Tabel 4. Dengan kata lain, mahasiswa yang memperoleh pembelajaran Model *PACE* secara keseluruhan dan berdasarkan level KAM pada indikator ‘mengkonstruksi bukti’, mengalami kesulitan yang lebih rendah dalam menyelesaikan soal KPM daripada mahasiswa yang memperoleh pembelajaran konvensional. Untuk memperkuat hasil analisis deskriptif tersebut, maka analisis dilanjutkan pada analisis dokumen (jawaban tes mahasiswa berdasarkan level KAM), hasil observasi, dan wawancara (triangulasi). Adapun soal KPM yang mengungkap indikator ‘mengkonstruksi bukti’ pada Mata kuliah Statistika Matematika adalah sebagai berikut:



Diketahui  $X_1, X_2,$  dan  $X_3$  merupakan peubah acak bebas stokastik yang masing-masing berdistribusi normal dengan parameter secara berturut-turut adalah  $\mu_1$  dan  $\sigma_1^2$ ,  $\mu_2$  dan  $\sigma_2^2$ , serta  $\mu_3$  dan  $\sigma_3^2$ .

Jika  $Z = \frac{\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3}{\rho^2}$ , dengan  $\alpha, \beta, \gamma,$  dan  $\rho$  adalah bilangan real

serta  $\rho \neq 0$ , buktikanlah bahwa  $Z$  berdistribusi normal dengan parameter

$$\frac{\alpha}{\rho^2} \mu_1 + \frac{\beta}{\rho^2} \mu_2 + \frac{\gamma}{\rho^2} \mu_3 \text{ dan } \frac{\alpha^2}{\rho^4} \sigma_1^2 + \frac{\beta^2}{\rho^4} \sigma_2^2 + \frac{\gamma^2}{\rho^4} \sigma_3^2.$$

Soal di atas bertujuan untuk mengungkap kemampuan mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti matematis terkait materi ‘Distribusi Normal Multivariat’. Adapun hasil analisis dokumen (jawaban tes mahasiswa berdasarkan level KAM), observasi, dan wawancara terkait indikator ‘mengkonstruksi bukti’ adalah sebagai berikut:

- a. Untuk mahasiswa dengan KAM tinggi yang memperoleh pembelajaran Model *PACE*, umumnya mereka tidak mengalami kesulitan yang berarti dalam menyusun bukti. Namun, bukti yang dikonstruksinya ternyata ada yang belum lengkap. Lain halnya dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran konvensional, umumnya mereka mengalami kesulitan dalam menyederhanakan nilai fungsi pembangkit momen dari peubah acak  $Z$  yang berdistribusi normal.
- b. Untuk mahasiswa dengan KAM sedang yang memperoleh pembelajaran Model *PACE*, umumnya mereka mengalami kesulitan dalam menerapkan ‘teorema fungsi pembangkit momen’ pada saat menguraikan fungsi pembangkit momen menjadi bagian-bagiannya sehingga jawabannya menjadi keliru. Lain halnya dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran konvensional, umumnya mereka mengalami kesulitan dalam memahami konsep ‘peubah acak bebas stokastik’.
- c. Untuk mahasiswa dengan KAM rendah, baik yang memperoleh pembelajaran Model *PACE* maupun konvensional, umumnya mereka mengalami kesulitan dalam mengawali proses pembuktian.

Berdasarkan hasil analisis di atas, secara umum mahasiswa ternyata masih mengalami kesulitan dalam mengkonstruksi bukti matematis. Temuan ini ternyata serupa dengan temuan Suryana (2016). Adapun salah satu faktor penyebabnya menurut Suryana (2016) adalah mahasiswa masih lemah dalam membuat keterkaitan antara fakta dengan unsur dari konklusi yang hendak dibuktikan.

Berdasarkan hasil analisis keseluruhan di atas secara triangulasi (dokumentasi, observasi, dan wawancara), diperoleh temuan bahwa mahasiswa masih mengalami kesulitan, baik secara keseluruhan maupun

berdasarkan level KAM, dalam menyelesaikan soal terkait KPM pada kedua pembelajaran (Model *PACE* maupun konvensional). Namun, mahasiswa yang telah memperoleh pembelajaran Model *PACE* mengalami kesulitan yang lebih rendah daripada mahasiswa yang telah memperoleh pembelajaran konvensional, baik secara keseluruhan maupun berdasarkan level KAM. Hal ini dikarenakan, pembelajaran Model *PACE* ternyata lebih memberikan kontribusi terhadap pencapaian KPM mahasiswa daripada pembelajaran konvensional (Suryana, 2016). Pada dasarnya, kunci dari keberhasilan pembelajaran Model *PACE* yang dapat mengembangkan KPM mahasiswa tiap level KAM sehingga dapat mengatasi kesulitan dalam menyelesaikan soal pembuktian matematis terletak pada peran LKM (LP, LA, LD, dan LL). Temuan ini ternyata serupa dengan temuan Isnarto, *et al.* (2014).

Selain temuan di atas, diperoleh juga temuan lain yaitu kesulitan paling banyak yang dialami mahasiswa tiap level KAM pada kedua pembelajaran (Model *PACE* maupun konvensional) dalam menyelesaikan soal pembuktian matematis pada Mata kuliah Statistika Matematika terletak pada indikator ‘mengkonstruksi bukti’, yaitu ‘kesulitan dalam mengawali proses pembuktian dan membuat keterkaitan antara fakta dengan unsur dari konklusi yang hendak dibuktikan’. Temuan ini ternyata serupa dengan temuan Moore (1994) dan Isnarto, *et al.* (2014).

#### 4. SIMPULAN

Mahasiswa masih mengalami kesulitan, baik secara keseluruhan maupun berdasarkan level KAM, dalam menyelesaikan soal terkait KPM pada kedua pembelajaran (Model *PACE* maupun konvensional). Namun, mahasiswa yang telah memperoleh pembelajaran Model *PACE* mengalami kesulitan yang lebih rendah daripada mahasiswa yang telah memperoleh pembelajaran konvensional, baik secara keseluruhan maupun berdasarkan level KAM. Adapun kesulitan paling banyak yang dialami mahasiswa tiap level KAM pada kedua pembelajaran (Model *PACE* maupun konvensional) terletak pada indikator ‘mengkonstruksi bukti’, yaitu ‘kesulitan dalam mengawali proses pembuktian dan membuat keterkaitan antara fakta dengan unsur dari konklusi yang hendak dibuktikan’. Untuk mengatasi hal tersebut, dosen disarankan untuk mengimplementasikan pembelajaran Model *PACE* secara intensif agar mahasiswa dapat mengkonstruksi sendiri konsep Statistika Matematika secara mendalam, khususnya yang berkaitan dengan KPM.

#### 5. DAFTAR PUSTAKA

Isnarto, *et al.* (2014). Student’s proof ability: Exploratory studies of abstract algebra course. *International Journal of Education dan Research*, 2 (6), 215-228.

- Lee, C. (1999). An assesment of the PACE strategy for an introduction statistics course. *Innovations of teaching Statistics*, 65 (3). 1215-1221.
- Marron, J.S. (1999). Effective writing in mathematical statistics. *Statistica Neerlandica Journal*, 53 (1), 68-75.
- Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27 (3), 249-266.
- Noer, S. H. (2010). *Peningkatan kemampuan berpikir kritis, kreatif, dan reflektif (K2R) matematis siswa SMP melalui pembelajaran berbasis masalah*. Disertasi. PPs UPI Bandung: Tidak diterbitkan.
- Petocz, P. & Smith, N. (2007). *Materials for learning mathematical statistics. Article of delta conference*. Sydney: University of Technology.
- Sugiyono (2011). *Metode penelitian kombinasi (mixed methods)*. Bandung: Alfabeta.
- Sumarmo, U. (2011). *Bahan Kuliah: Advanced mathematical thinking dan habit of mind mahasiswa*. PPs UPI Bandung: Tidak diterbitkan.
- Suryadi, D. (2012). *Membangun budaya baru dalam berpikir matematika*. Bandung: Rizqi Press.
- Suryana, A. (2016). *Meningkatkan Advanced Mathematical Thinking dan Self-Renewal Capacity Mahasiswa melalui Pembelajaran Model PACE*. Disertasi. PPs UPI Bandung: Tidak diterbitkan.