TEOREMA TITIK TETAP DI RUANG METRIK Ms LENGKAP

Pipit Pratiwi Rahayu[1], Alya Farahdina[2]
[1,2] Program Studi Matematika UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
pipitprahayu@yahoo.com, *alyafarahdina@gmail.com*

Abstrak

Konsep ruang metrik pertama kali dicetuskan pada tahun 1906 oleh matematikawan asal Perancis yaitu Maurice Fréchet. Dengan berjalannya waktu, ternyata penerapan ruang metrik sangat dirasakan manfaatnya sehingga penelitian mengenai ruang metrik selalu berkembang dan menghasilkan ruang metrik-ruang metrik baru sesuai dengan berkembangnya penerapan daripada ruang metrik itu sendiri. Pada tahun 2014 N.Mlaiki mengenalkan ruang metrik Ms yang merupakan hasil pengembangan dari ruang metrik S parsial dan ruang metrik M. Ruang metrik Ms lengkap dan beberapa teorema pendukung untuk pembuktian eksistensi dan ketunggalan titik tetap di Ms lengkap itulah yang akan dibahas pada makalah ini. Diawali dengan menyampaikan kembali definisi mengenai ruang metrik Ms lengkap dan beberapa sifat maupun teorema yang berkaitan dengan ruang metrik Ms lengkap kemudian dengan menggunakan Teorema Contraction principle di ruang metrik Ms lengkap akan dapat dibuktikan bahwa titik tetap di Ms itu ada dan tunggal. Selain itu nantinya juga akan disertai pula dengan beberapa contoh untuk memperjelas kondisi tersebut. Hasil daripada penelitian ini adalah titik tetap di ruang metrik Ms lengkap itu ada dan tunggal.

Kata Kunci: *Ruang metrik Ms lengkap; Teorema Contraction Principle; Teorema Titik Tetap*

1. PENDAHULUAN

Ruang metrik yaitu himpunan tak kosong X yang dilengkapi dengan sebuah fungsi yang disebut metrik pada *X*. Metrik memetakan sebarang anggota himpunan $X \times X$ ke suatu bilangan real tak negatif dan memenuhi beberapa aksioma tertentu. Penerapan daripada ruang metrik semakin hari semakin berkembang. Penelitian mengenai ruang metrik pun juga menjadi hal yang menarik untuk terus dikaji sehingga memunculkan ruang metrik-ruang metrik baru sesuai dengan penerapannya. Berikut ini sedikit alur munculnya ruang metrik *Ms*. Diawali dengan munculnya definisi ruang metrik parsial oleh S.G.Matthews pada tahun 1992 kemudian dilanjutkan pada tahun 2012 Sedghi dkk menemukan ruang metrik baru yaitu ruang metrik *S*. Pada tahun 2014 M.Asadi mengembangkan ruang metrik parsial menjadi ruang metrik *M* kemudian oleh N.Mlaiki, ruang metrik *M* dan ruang metrik *S* parsial dikembangkan kembali sehingga terbentuklah ruang metrik *Ms*.

Salah satu teorema yang menarik dalam pembahasan ruang metrik adalah teorema titik tetap. Teorema titik tetap sangat banyak aplikasinya, misalkan penerapan teorema titik tetap pada pembuktian eksistensi dan ketunggalan solusi persamaan integral linear dan Non linear. Berangkat dari permasalahan tersebut yang ternyata membutuhkan teorema titik tetap, membuat penelitian mengenai teorema titik tetap terus berkembang termasuk teorema titik tetap di ruang metrik *Ms*.

Ruang metrik *Ms* lengkap dan beberapa teorema pendukung untuk pembuktian eksistensi dan ketunggalan titik tetap di *Ms* lengkap itulah yang akan dibahas pada makalah ini. Diawali dengan menyampaikan kembali definisi mengenai ruang metrik *Ms* lengkap dan beberapa sifat maupun teorema yang berkaitan dengan ruang metrik *Ms* lengkap kemudian dengan menggunakan Teorema *Conraction principle* di ruang metrik *Ms* lengkap akan dapat dibuktikan bahwa titik tetap di *Ms* itu ada dan tunggal. Selain itu nantinya juga akan dilengkapi pula dengan beberapa contoh untuk memperjelas kondisi tersebut.

Dasar teori yang digunakan antara lain dimulai dari konsep konvergen dan Cauchy yang ada di sistem bilangan Real.

Definisi 1.1 (Bartle, 2010 : 56) *Diberikan barisan bilangan real* $\{x_n\}$. *Barisan* $\{x_n\}$ *dikatakan konvergen ke* $x \in \mathbb{R}$ *apabila untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sehingga* $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ *berlaku:*

$$0 < |x_n - x| < \varepsilon$$

Selanjutnya, x *disebut limit barisan dari* $\{x_n\}$ *dan* $\{x_n\}$ *konvergen ke* x *dinotasikan dengan* $x_n \to x$ *untuk* $n \to \infty$ *atau* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Definisi 1.2 (Bartle, 2010 : 85) *Barisan bilangan real* $\{x_n\}$ *disebut barisan Cauchy, apabila* $\forall \varepsilon > 0$ *terdapat* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sehingga* $\forall m, n \in \mathbb{N}$ *dengan* $n, m \geq n_0$ *berlaku* $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Definisi ruang metrik beserta makna konvergen maupun Cauchy pada suatu ruang metrik juga digunakan. Berikut penjelasannya.

Definisi 1.3 (Shirali, 2006: 27) *Diberikan suatu himpunan tak kosong* X *dan fungsi* $d : X \times X \to [0, \infty)$. *Selanjutnya* (X, d) *disebut sebagai ruang metrik jika* $\forall x, y, z \in X$ *berlaku:*

(d1) $d(x, y) \geq 0$

(d2) $d(x, y) = 0$ *jika dan hanya jika* $x = y$

(d3) $d(x, y) = d(y, x)$

(d4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Fungsi d disebut sebagai metrik pada X. *Selanjutnya pasangan* (X, d) *disebut ruang metrik.*

Definisi 1.4 (Shirali, 2006 : 38) *Diberikan* (X,d) *adalah ruang metrik dan* $\{x_n\}$ *adalah barisan pada himpunan* X. *Selanjutnya, untuk setiap* $x \in X$ *dikatakan limit dari* $\{x_n\}$ *jika dan hanya jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan asli* n_0 *sehingga berlaku* $d(x_n, x) < \varepsilon$ *untuk setiap* $n \geq n_0$.

Definisi 1.5 (Shirali, 2006: 45) *Diberikan ruang metrik* (X,d) *dan barisan* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *pada himpunan* X *dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sehingga untuk setiap* $n, m \geq n_0$ *berlaku* $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Definisi 1.6 (Shirali, 2006: 47) *Suatu ruang metrik* (X,d) *dikatakan lengkap apabila setiap barisan Cauchy di* X *konvergen.*

Ruang metrik mengalami pengembangan, salah satunya munculnya defnisi baru yaitu ruang metrik parsial. Berikut ini diberikan penjelasan mengenai ruang metrik parsial baik definisi sampai sifat konvergen maupun Cauchy pada ruang metrik parsial.

Definisi 1.7 (M. Bukatin, 2009:1) *Diberikan himpunan* X *dan fungsi* $p: X \times X \to [0,\infty)$ *sehingga untuk setiap* $x, y, z \in X$ *berlaku:*

(P1) $x = y$ *jika dan hanya jika* $p(x,x) = p(y,y) = p(x,y)$

(P2) $p(x,x) \leq p(x,y)$

(P3) $p(x,y) = p(y,x)$

(P4) $p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$

Selanjutnya, (X,p) *adalah ruang metrik parsial.*

Lemma 1.8 *Setiap ruang metrik merupakan ruang metrik parsial.*

Definisi 1.9 (M.Bukatin, 2009: 3) *Barisan* $\{x_n\}$ *pada ruang metrik parsial* (X,p) *konvergen ke* $x \in X$ *apabila berlaku:*

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = p(x,x).$$

Definisi 1.10 (M.Bukatin, 2009: 3) *Barisan* $\{x_n\}$ *pada ruang metrik parsial* (X,p) *dikatakan barisan Cauchy apabila terdapat* $a \geq 0$ *sedemikian hingga untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *maka terdapat* $k \in \mathbb{N}$ *sehingga untuk setiap* $n, m > k$ *berlaku:*

$$\left|p\left(x_n, x_m\right)-a\right|<\varepsilon .$$

Definisi 1.11 (M.Bukatin, 2009: 3) *Setiap ruang metrik parsial* (X, p) *dikatakan lengkap apabila setiap barisan Cauchy di ruang metrik parsial* (X, p) *adalah barisan yang konvergen.*

Ruang metrik *M* juga merupakan pengembangan dari ruang metrik parsial. Berikut penjelesannya.

Definisi 1.12 (M.Asadi, 2014: 2) *Diberikan himpunan tak kosong X dan sebuah fungsi* $m: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ *disebut sebagai metrik – M jika untuk setiap* $x, y, z \in X$ *berlaku :*

(m1) $x=y$ *jika dan hanya jika* $m(x, x)=m(y, y)=m(x, y)$

(m2) $m_{x,y} \leq m(x, y)$, *dengan* $m_{x,y} := min\{m(x,x), m(y,y)\}$

(m3) $m(x, y)=m(y, x)$

(m4) $m(x, y)-m_{x,y} \leq \left(m(x, z)-m_{x,z}\right)+\left(m(z, y)-m_{z,y}\right)$ *,dengan didefinisikan bahwa* $m_{x,y} := min\{m(x,x), m(y,y)\}$.

Selanjutnya, pasangan (X, m) *disebut sebagai ruang metrik – M.*

Tidak hanya sampai ruang metrik parsial dan ruang metrik *M*, pengembangan ruang metrik juga terus diteliti sampai akhirnya muncul ruang metrik S parsial.

Definisi 1.13 Ruang Metrik *S* parsial (N.Mlaiki, 2016: 1) *Diberikan X himpunan tak kosong. Diberikan fungsi* $S_p: X^3 \rightarrow [0, \infty)$ *disebut metrik – S parsialjikauntuk setiap* $x, y, z, t \in X$ *berlaku:*

(SP1) $x=y$ *jika dan hanya jika* $S_p(x, x, x)=S_p(y, y, y)=S_p(x, x, y)$

(SP2) $S_p(x, x, x) \leq S_p(x, y, z)$

(SP3) $S_p(x, x, y)=S_p(y, y, x)$

(SP4) $S_p(x, y, z) \leq S_p(x, x, t)+S_p(y, y, t)+S_p(z, z, t)-S_p(t, t, t)$

Selanjutnya, pasangan $\left(X, S_p\right)$ *disebut ruang metrik – S parsial.*

Pada makalah ini, inti daripada pembahasan adalah menyelidiki ada atau tidaknya titik tetap di ruang metrik *Ms*,maka harus dipahami terlebih dahulu definisi mengenai titik tetap.

Definisi 1.14 (Shirali, 2006: 133) *Sebuah titik* $x \in X$ *dikatakan sebagai titik tetap pada pemetaan* $T : X \to X$ *jika berlaku* $Tx = x$.

Contoh 1.15
Diberikan fungsi $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $Tx = x^2 - 7x + 16$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Akan ditunjukkan fungsi T mempunyai titik tetap tunggal.
Penjelasan:
Akan dicari titik tetap untuk fungsi $Tx = x^2 - 7x + 16$. Diperoleh bahwa:

$$Tx = x$$
$$x^2 - 7x + 16 = x$$
$$x^2 - 8x + 16 = 0$$
$$(x-4)(x-4) = 0$$
$$x = 4$$

Jadi, diperoleh bahwa titik tetap tunggal fungsi $Tx = x^2 - 7x + 16$ adalah 4, sebab:

$$T4 = 4^2 - 7 \cdot 4 + 16 = 4 . +$$

Berikut ini akan diberikan contoh titik tetap yang tidak tunggal untuk lebih mudah dalam memahami definisi dari titik tetap.

Contoh 1.16
Diberikan fungsi $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $Tx = \sqrt{x}$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Akan ditunjukkan fungsi T mempunyai titik tetap.
Penjelasan:
Akan dicari titik tetap untuk fungsi $Tx = \sqrt{x}$. Diperoleh bahwa:

$$Tx = x$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = x$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - x = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x(x-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 1$$

Jadi, diperoleh bahwa titik tetap fungsi $Tx = \sqrt{x}$ adalah 0 dan 1, sebab:

$$T0 = \sqrt{0} = 0 \text{ dan } T1 = \sqrt{1} = 1 . +$$

2. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penyusunan makalah ini adalah studi literatur. Penyusunan makalah ini akan diawali dengan penjelasan dasar-dasar analisis real, konsep ruang metrik dan teori titik tetap sebagai dasar teori. Selanjutnya akan dijelaskan juga mengenai konsep barisan konvergen, barisan Cauchy pada ruang metrik. Ruang metrik yang akan disampaikan disini mulai dari ruang metrik parsial, ruang metrik M, ruang metrik S, ruang metrik S parsial, kemudian barulah muncul ruang metrik Ms. Pada ruang metrik Ms pun ada juga definisi tersendiri mengenai konsep barisan konvergen dan Cauchy. Teorema Contraction Principle akan juga dibuktikan Pembuktian bahwa di ruang metrik Ms itu ada titik tetap dan tunggal bisa memanfaatkan teorema *contraction principle*.

3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Ruang metrik *Ms* merupakan pengembangan dari ruang metrik *M* dan ruang metrik *S* parsial.

Definisi 3.1 Ruang Metrik M_s (N.Mlaiki, 2017: 2) *Diberikan himpunan tak kosong X dan fungsi* $m_s : X^3 \to [0,\infty)$ *disebut metrik – M_s jika untuk setiap* $x, y, z, t \in X$ *berlaku:*

(MS1) $x = y$ *jika dan hanya jika* $m_s(x,x,x) = m_s(y,y,y) = m_s(x,x,y)$

(MS2) $m_{sx,y,z} \le m_s(x,y,z)$ *dengan*

$m_{sx,y,z} := min\{m_s(x,x,x), m_s(y,y,y), m_s(z,z,z)\}$

(MS3) $m_s(x,x,y) = m_s(y,y,x)$

(MS4)

$m_s(x,y,z) - m_{sx,y,z} \le (m_s(x,x,t) - m_{sx,x,t}) + (m_s(y,y,t) - m_{sy,y,t}) + (m_s(z,z,t) - m_{sz,z,t})$

dengan $m_{sx,y,z} := min\{m_s(x,x,x), m_s(y,y,y), m_s(z,z,z)\}$

Selanjutnya, pasangan (X, m_s) *disebut sebagai ruang metrik – M_s.*

Definisi 3.2 (N.Mlaiki, 2017: 2) *Diberikan* (X, m_s) *adalah ruang metrik – M_s maka barisan* $\{x_n\}$ *pada himpunan* X *dikatakan konvergen ke* $x \in X$ *jika*

$$\lim_{n\to\infty}\left(m_s(x_n, x_n, x) - m_{s_{x_n,x_n,x}}\right) = 0$$

atau dapat ditulis juga sebagai $\{x_n\} \to x$ *untuk* $n \to \infty$ *di ruang metrik* (X, m_s).

Definisi 3.3 (N.Mlaiki, 2017: 3*)* *Diberikan* (X, M_s) *adalah ruang metrik –* M_s *maka barisan* $\{x_n\}$ *pada himpunan* X *dikatakan barisan* M_s *– Cauchy jika*

$$\lim_{m,n\to\infty}\left(m_s\left(x_n, x_n, x_m\right) - m_{sx_n,x_n,x_m}\right) = 0 \; dan \; \lim_{m,n\to\infty}\left(M_{sx_n,x_n,x_m} - m_{sx_n,x_n,x_m}\right) = 0$$

ada dan terbatas.

Definisi 3.4 (N.Mlaiki, 2017: 3)*Diberikan* (X, m_s) *adalah ruang metrik –* M_s*. Sebuah himpunan dikatakan bola apabila untuk setiap* $x \in X$ *dan* $\varepsilon > 0$ *berlaku* $B_s(x,\varepsilon) = \left\{y \in X : m_s^*(x,x,y) = m_s(x,x,y) - m_{sx,x,y} \le \varepsilon\right\}$.

Definisi 3.5 (N.Mlaiki, 2017: 3) *Diberikan* (X, m_s) *adalah ruang metrik –* M_s *maka* (X, m_s) *dikatakan lengkap apabila setiap barisan* M_s *– Cauchy* $\{x_n\}$ *pada himpunan* X *konvergen ke* $x \in X$ *dan* $x \in B_s$ *sehingga berlaku:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(m_s\left(x_n, x_n, x\right) - m_{sx_n,x_n,x}\right) = 0 \; dan \; \lim_{n\to\infty}\left(M_{sx_n,x_n,x} - m_{sx_n,x_n,x}\right) = 0$$

Ada dan terbatas.

Lemma 3.6 (Contraction Principle) *Diberikan* (X, m_s) *yaitu ruang metrik –* M_s *dan barisan* $\{x_n\} \subseteq X$ *jika terdapat* $k \in [0,1)$ *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$ *sedemikian hingga* $m_s(x_n, x_n, x_{n-1}) \le k m_s(x_{n-1}, x_{n-1}, x_{n-2})$ *maka berlaku:*

$$\lim_{n\to\infty} m_s(x_n, x_n, x_{n-1}) = 0 \; dan \; \lim_{n\to\infty} m_s(x_n, x_n, x_n) = 0.$$

Bukti

a) Diambil sebarang barisan $\{x_n\}$ pada ruang metrik – M_s. Diperoleh:

$$m_s(x_n, x_n, x_{n-1}) \le k m_s(x_{n-1}, x_{n-1}, x_{n-2}) \le k^2 m_s(x_{n-2}, x_{n-2}, x_{n-3}) \le \ldots \le k^n m_s(x_1, x_1, x_0).$$

Terlihat jelas bahwa terbentuk barisan yang turun monoton maka barisan tersebut akan konvergen ke nilai infimumnya. Oleh karena itu diperoleh bahwa $m_s(x_n, x_n, x_{n-1})$ konvergen kenilai infimumnya yaitu 0 untuk $n \to \infty$ atau diperoleh bahwa $\lim_{n\to\infty} m_s(x_n, x_n, x_{n-1}) = 0$.

b) Berdasarkan pada Persamaan kondisi (MS4) diperoleh bahwa:

$$\lim_{n\to\infty} min\left\{m_s(x_n, x_n, x_n), m_s(x_n, x_n, x_n), m_s(x_{n-1}, x_{n-1}, x_{n-1})\right\} = \lim_{n\to\infty} m_{sx_n,x_n,x_{n-1}}$$
$$\le \lim_{n\to\infty} m_s(x_n, x_n, x_{n-1}).$$

Oleh karena $\lim_{n\to\infty} m_s(x_n, x_n, x_{n-1}) = 0$ sehingga diperoleh:

$$\lim_{n\to\infty} min\left\{m_s\left(x_n, x_n, x_n\right), m_s\left(x_n, x_n, x_n\right), m_s\left(x_{n-1}, x_{n-1}, x_{n-1}\right)\right\} \le \lim_{n\to\infty} m_s\left(x_n, x_n, x_{n-1}\right) = 0.$$

Oleh karena itu diperoleh bahwa $\lim_{n\to\infty} m_s(x_n, x_n, x_n) = 0$. +

Teorema 3.7 *Diberikan* $\left(X, m_s\right)$ *adalah ruang metrik – M_s lengkap. Jika didefinisikan fungsi* $T : X \to X$ *dengan :*

$$m_s\left(Tx, Tx.Ty\right) \le km_s\left(x, x, y\right) \tag{3.1}$$

untuk setiap $x, y \in X$ *dimana* $k \in \left[0,1\right)$ *maka T memiliki titik tetap tunggal di X.*

Bukti:

Diketahui $k \in [0,1)$ maka terdapat $n_0 \in \square$, sehingga untuk $0 < \varepsilon < 1$ diperoleh

$$k^{n_0} < \varepsilon/8 . \tag{0.1}$$

Didefinisikan

$$Tx = Fx \text{ dan } F^i x_0 = x_i = Fx_{i-1} \text{ untuk } i = 1, 2, 3, \ldots \tag{0.2}$$

Selanjutnya, untuk setiap $x, y \in X$ akan diperoleh barisan berikut

$$\begin{aligned} & m_s\left(Fx, Fx, Fy\right) = m_s\left(T^{n_0}x, T^{n_0}x, T^{n_0}y\right) \\ & \le km_s\left(T^{n_0-1}x, T^{n_0-1}x, T^{n_0-1}y\right) \\ & \vdots \\ & \le k^{n_0} m_s\left(x, x, y\right), \end{aligned}$$

sehingga untuk $i = 1, 2, 3, \ldots$ diperoleh

$$\begin{aligned} m_s\left(x_{i+1}, x_{i+1}, x_i\right) &= m_s\left(Fx_i, Fx_i, Fx_{i-1}\right) \\ &\le k^{n_0} m_s\left(x_i, x_i, x_{i-1}\right) \\ &\vdots \\ &\le k^{in_0} m_s\left(x_1, x_1, x_0\right). \end{aligned}$$

Berdasarkan Lemma 3.6 diperoleh bahwa:

$$\lim_{i\to\infty} m_s\left(x_{i+1}, x_{i+1}, x_i\right) = 0 \text{ dan} \lim_{i\to\infty} m_s\left(x_i, x_i, x_i\right) = 0 . \tag{0.3}$$

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa fungsi T memiliki titik tetap tunggal u .

Pembuktian ini akan dilakukan dalam beberapa tahap, antara lain:

(1) Akan dibuktikan bahwa $\{x_n\}$ merupakan barisan M_s – Cauchy

(2) Akan dibuktikan bahwa akibat dari pembuktian (1) akan berlaku $\lim_{n\to\infty} m_s(Tx_n, Tx_n, Tu) = 0$. Pembuktian ini melibatkan pembuktian (1) dan sifat nilai maksimum suatu barisan bilangan real.

(3) Akan dibuktikan bahwa T memiliki titik tetap di ruang metrik – M_s. Pembuktian melibatkan pembuktian (2).

(4) Akan dibuktikan bahwa T memiliki titik tetap tunggal di ruang metrik – M_s.

Berikut ini pembutiannya:

Untuk pembuktian (1), dan (2) diserahkan kepada pembaca. Sekarang akan dibuktikan (3) dan (4).

(3) Akan dibuktikan bahwa T memiliki titik tetap di ruang metrik – M_s.

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(m_s(x_n, x_n, u) - m_{sx_n,x_n,u}\right) = 0 \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(m_s(x_{n+1}, x_{n+1}, u) - m_{sx_{n+1},x_{n+1},u}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(m_s(Tx_n, Tx_n, u) - m_{sTx_n,Tx_n,u}\right),\end{aligned}$$

Diketahui $x_{n+1} = Tx_n$ dan $\{x_{n+1}\} \to u$ untuk $n \to \infty$ maka jelas bahwa $Tx_n \to u$ untuk $n \to \infty$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(m_s(x_n, x_n, u) - m_{sx_n,x_n,u}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(m_s(Tx_n, Tx_n, u) - m_{sTx_n,Tx_n,u}\right) \\ &= m_s(u,u,u) - \lim_{n\to\infty} m_{sTx_n,Tx_n,u}.\end{aligned}$$

Diketahui $Tx_n \to Tu$ untuk $n \to \infty$ dan diperoleh:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(m_s(x_n, x_n, u) - m_{sx_n,x_n,u}\right) &= m_s(u,u,u) - \lim_{n\to\infty} m_{sTx_n,Tx_n,u} \\ 0 &= m_s(u,u,u) - m_{sTu,Tu,u},\end{aligned}$$

sehingga diperoleh bahwa $m_{sTu,Tu,u} = m_s(u,u,u)$.

Adapun berdasarkan kondisi kontraksi diperoleh bahwa $m_s(Tu,Tu,Tu) \leq km_s(u,u,u)$ untuk $k \in [0,1)$ sehingga jelas bahwa $m_{sTu,Tu,u} = m_s(Tu,Tu,Tu)$.

Oleh karea itu diperoleh

$$m_{sTu,Tu,u} = m_s(u,u,u) \text{ dan } m_{sTu,Tu,u} = m_s(Tu,Tu,Tu)$$

sehingga jelas bahwa $m_s(Tu,Tu,Tu) = m_s(u,u,u)$ maka terbukti bahwa $Tu = u$.

(4) Akan dibuktikan ketunggalan titik tetapnya.

Misalkan T memiliki dua titik tetap yaitu $u, v \in X$ sehingga berlaku $Tu = u$ dan $Tv = v$ .Akan dibuktikan bahwa $u = v$.

Berdasarkan kondisi kontraksi diperoleh bahwa:

i. $m_s(u,u,u) = m_s(Tu,Tu,Tu) \leq km_s(u,u,u) < m_s(u,u,u)$.
ii. $m_s(v,v,v) = m_s(Tv,Tv,Tv) \leq km_s(v,v,v) < m_s(v,v,v)$.
iii. $m_s(u,u,v) = m_s(Tu,Tu,Tv) \leq km_s(u,u,v) < m_s(u,u,v)$.

Oleh karena itu dapat disimpulkan $m_s(u,u,u) = m_s(v,v,v) = 0 = m_s(u,u,v)$ maka terbukti bahwa $u = v$.

Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa T memiliki titik tetap tunggal yaitu $u \in X$ dengan memenuhi kondisi kotraksi pada Pertidaksamaan (3.1) sehingga berlaku juga bahwa $m_s(u,u,u) = 0$. +

4. SIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan, jika diberikan (X, m_s) adalah ruang metrik – M_s lengkap dan didefinisikan fungsi $T : X \to X$ maka terbukti bahwa :

(1) Barisan $\{x_n\} \subset X$ merupakan barisan M_s – Cauchy

(2) Pada ruang metrik *Ms* berlaku $\lim_{n\to\infty} m_s(Tx_n, Tx_n, Tu) = 0$.

(3) Pemetaan T memiliki titik tetap di ruang metrik – M_s.

(4) Pemetaan T memiliki titik tetap tunggal di ruang metrik – M_s.

5. DAFTAR PUSTAKA

Mlaiki, N., N. Souayah, K. Abodayeh and T. Abdeljawad. (2017). Contraction principles in M_s metric spaces. *J.nonlinear Sci. Appl.*,**10** , 575-582.

Asadi, Mehdi., Erdal K.,and Salimi, Peyman. (2014). New extension of p-metric spaces with some fixed point result on M-metric spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, **18**, 1-9.

S. Sedghi., N. Shobe., A.Aliouche. (2012). A generalization of fixed point theorems in S-metric spaces. *Mat. Vesnik* , **64** , 258-266.

Bartle, Robert G., and Sherbert, D.R. (2010). *Introduction to Real Analysis Fourth Edition*. University of Illinois, Urbana-Champaign.

Shirali, Satish and Vasudeva,Harkrishan L. (2006). *Metric Spaces*. London: Springer – Verlag.

Bukatin.M., R.Kopperman, S.Matthews and H.Pajoohesh. (2009). Partial Metric Spaces. *Am. Math. Monthly* , **116** , 708-718.

Mlaiki, Nabil and N.Souayah. (2016). A coincident point principle for two weakly compatible mappings in partial S-metric spaces. *J.Nonlinear Sci. Appl.* **9** , 2217-2223.