

EFISIENSI DAN AKURASI GABUNGAN METODE FUNGSI WALSH DAN MULTIGRID UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN INTEGRAL FREDHOLM LINEAR

Masduki

Jurusan Pendidikan Matematika FKIP UMS

Abstrak. Penyelesaian persamaan integral Fredholm linear dengan menggunakan metode fungsi Walsh telah dikembangkan. Masing-masing suku dari persamaan integral diekspansikan dalam deret fungsi Walsh berhingga. Untuk mendekati kernel dari persamaan integralnya digunakan deret fungsi Walsh rangkap berhingga dari Blyth et.al. Dengan cara demikian, dihasilkan sistem persamaan linear. Untuk menyelesaikan sistem persamaan yang diperoleh digunakan metode iterasi Picard. Untuk meningkatkan efisiensi dan akurasi penyelesaian dengan metode fungsi Walsh diterapkan skedul multigrid. Terdapat tiga skedul multigrid, yaitu *V-cycle*, *W-cycle*, dan *FMV-cycle*. Pada skedul *V-cycle* dan *W-cycle* dimanfaatkan skema koreksi grid coarse. Sedangkan pada skedul *FMV-cycle* dimanfaatkan iterasi tersarang dan skema koreksi grid coarse secara bersamaan. Penelitian ini akan membandingkan efisiensi dan akurasi ketiga skedul multigrid untuk menyelesaikan persamaan integral Fredholm linear. Eksperimen numerik menunjukkan bahwa penerapan skedul *FMV-cycle*, khususnya untuk $m=32$ dan tiga level perhitungan, memberikan hasil yang lebih efisien dan akurat daripada skedul *V-cycle* maupun *W-cycle*. Selain itu skedul *V-cycle* lebih efisien dibandingkan dengan skedul *W-cycle*.

Kata kunci: *Persamaan Integral Fredholm Linear, Fungsi Walsh, Multigrid*

PENDAHULUAN

Persamaan integral sering muncul dalam permasalahan di bidang fisika, teknik, ekonomi, biologi, matematika terapan dan lain sebagainya. Model seperti laju pertumbuhan penduduk, laju kelahiran, transfer radiasi, aerodinamika, proses penyaringan asap rokok, merupakan model-model yang disajikan dalam bentuk persamaan integral. Fungsi Walsh yang merupakan fungsi gelombang persegi yang lengkap ortonormal telah digunakan dalam bidang yang cukup luas diantaranya analisis sistem komunikasi, analisis spektral, sistem radar, spektroskop dan lain sebagainya (Beauchamp (1975)).

Briggs (1988) telah memberikan tiga skedul multigrid yaitu *V-cycle*, *W-cycle*, dan *FMV-cycle*. Pada skedul *V-cycle* dan *W-cycle* dimanfaatkan skema koreksi grid coarse.

Sedangkan pada skedul *FMV-cycle* dimanfaatkan skema koreksi grid coarse dan iterasi tersarang. Widyarningsih (2001) telah menunjukkan bahwa skedul *V-cycle* mampu meningkatkan efisiensi dari metode fungsi Walsh dalam menyelesaikan persamaan integral Fredholm linear. Demikian juga Masduki (2003) telah menunjukkan bahwa skedul *FMV-cycle* mampu meningkatkan efisiensi dan akurasi metode fungsi Walsh dalam menyelesaikan persamaan integral Fredholm linear.

Dalam penelitian ini, peneliti akan menggunakan ketiga skedul multigrid untuk menyelesaikan persamaan integral Fredholm linear. Selanjutnya ditentukan efisiensi dan akurasi tiap skedul yang digunakan dalam menyelesaikan persamaan integral Fredholm linear tipe dua yang mempunyai bentuk.

$$y(x) = g(x) + \int_0^1 K(x,t)y(t)dt, \quad (1.1)$$

dengan $g(x)$ dan kernel $K(x,t)$ diketahui serta y adalah fungsi linear yang akan ditentukan.

Uljanov dan Blyth (1996, 137-143; 1996, 621-628) mengembangkan algoritma baru (selanjutnya disebut dengan metode fungsi Walsh) untuk menyelesaikan persamaan integral Fredholm (1.1) dengan mengekspansikan tiap suku dari persamaan integralnya dengan deret fungsi Walsh berhingga dan kernelnya didekati dengan deret fungsi Walsh rangkap berhingga, yaitu

$$y(x) \approx c_i W_i(x), \quad g(x) \approx g_i W_i(x), \quad \text{dan} \\ K(x,t) \approx a_{ji} W_i(x) W_j(t), \quad (1.2)$$

dengan $i, j = 0, 1, 2, \dots, m, \quad m = 2^n, n \in N$. Dengan pendekatan (1.2), persamaan (1.1) dapat disajikan sebagai sistem persamaan linear

$$c_m = g_m + A_m c_m \quad \text{dengan} \quad A_m = (a_{ij}). \quad (1.3)$$

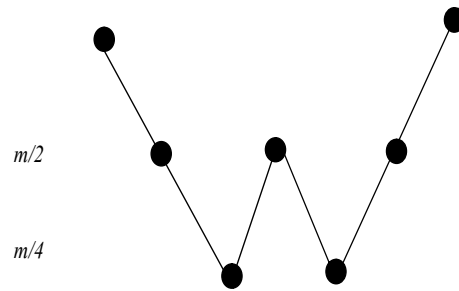
Dengan demikian menyelesaikan persamaan (1.3) identik dengan menyelesaikan persamaan integral Fredholm (1.1) dengan menggunakan metode fungsi Walsh. Uljanov dan Blyth menyelesaikan persamaan (1.3) dengan metode langsung. Eksperimen numerik menunjukkan bahwa penyelesaian persamaan integral Fredholm linear menggunakan metode fungsi Walsh konvergen secara kuadratik.

Untuk meningkatkan efisiensi penyelesaian dengan metode fungsi Walsh digunakan skedul multigrad. Gambar ketiga skedul multigrad 3 level ditunjukkan pada Gambar 1, 2, dan 3.

Gambar 1: Skedul V -cycle tiga level

Pada skedul V -cycle, setiap level dikunjungi sebanyak dua kali. Dengan demikian biaya perhitungan (*Unit Work*) untuk melakukan sekali *sweep* V -cycle dengan masing-masing level diperlukan sekali iterasi adalah

$$m^2 \left(2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots \right) \approx 2.78 \text{ UW}$$



Gambar 2: Skedul W -cycle tiga level

Sedangkan pada skedul W -cycle, *unit work* untuk melakukan sekali *sweep* dengan masing-masing level diperlukan sekali iterasi adalah

$$m^2 \left(2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 + K \right) \approx 3.0625 \text{ UW}$$

Gambar 3: Skedul FMV -cycle tiga level

Pada skedul FMV -cycle, setiap level dikunjungi sebanyak $2n$ untuk $n \in N$. Dengan demikian *unit work* untuk melakukan sekali *sweep* FMV -cycle dengan masing-masing level diperlukan sekali iterasi adalah

$$m^2 \left(2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{4} \right) + 6 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^2 + 8 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^3 + K \right) \approx 3.5 \text{ UW}$$

Penelitian ini bertujuan untuk membandingkan efisiensi dan akurasi ketiga skedul multigrad dalam menyelesaikan persamaan integral Fredholm linear. Untuk mengetahui efisiensi dari skedul yang digunakan dilihat dari banyaknya *unit work* yang diperlukan untuk mencapai galat toleransi tertentu. Sedangkan untuk mengetahui tingkat akurasi dari ketiga skedul dilihat dari besarnya *error absolut* yang dihasilkan.

METODE PENELITIAN

Metode penelitian ini adalah eksperimen secara numerik, artinya algoritma yang telah diturunkan selanjutnya diterapkan dalam tiga kasus persamaan integral Fredholm linear yang telah dipilih. Dalam penelitian ini dipilih kasus yang penyelesaian eksaknya telah tersedia. Dengan demikian keefisienan dan keakuratan ketiga skedul multigrad dapat ditunjukkan. Untuk implementasi programnya digunakan *software Matlab 5.3.1*

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam penelitian ini ketiga skedul multigrad diterapkan pada tiga kasus persamaan integral Fredholm linear yang tersedia penyelesaian eksaknya. Untuk menyelesaikan persamaan integral Fredholm linear tipe dua seperti pada persamaan (1.1) dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengekspansikan masing-masing suku dari persamaan (1.1) dengan deret fungsi Walsh berhingga dan rangkap berhingga, yaitu

$$y(x) \approx \sum_{i=0}^{m-1} c_i W_i(x), \quad g(x) \approx \sum_{i=0}^{m-1} g_i W_i(x),$$

$$K(x,t) \approx \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} W_i(x) W_j(t) \quad (3.1)$$

untuk menyederhanakan penulisan persamaan (3.1) digunakan konvensi

penjumlahan Einstein, sehingga persamaan (3.1) menjadi

$$y(x) \approx c_i W_i(x), \quad g(x) \approx g_i W_i(x), \quad \text{dan} \\ K(x,t) \approx a_{ij} W_i(x) W_j(t), \quad (3.2)$$

2. Dengan menggunakan persamaan (3.2), maka persamaan integral (1.1) dapat dituliskan sebagai berikut

$$c_i W_i(x) = g_i W_i(x) + \int_0^1 a_{ij} W_i(x) W_j(t) c_k W_k(t) dt \\ c_i W_i(x) = g_i W_i(x) + a_{ij} W_i(x) c_k \int_0^1 W_j(t) W_k(t) dt \quad (3.3)$$

3. Dengan menggunakan sifat keortonormalan fungsi Walsh, maka persamaan (3.3) dapat disajikan sebagai berikut.

$$c_i W_i(x) = g_i W_i(x) + a_{ij} W_i(x) c_k \\ \text{atau} \\ c_i = g_i + a_{ij} c_k \quad (3.4)$$

persamaan (3.4) membentuk sistem persamaan linear

$$c_m = g_m + A_m c_m \quad (3.5)$$

4. Selanjutnya persamaan (3.5) diselesaikan dengan skedul *V-cycle*, *W-cycle*, dan *FMV-cycle*.

Untuk menyelesaikan ketiga kasus dibuat program dengan menggunakan *software Matlab*. Hasil dari simulasi numerik untuk masing-masing kasus diberikan sebagai berikut.

Kasus 1.

Diberikan persamaan integral Volterra linear yang diambil dari Jerri (1985)

$$y(x) = \sin(x) + \int_0^x 2 \cos(x-t) y(t) dt \quad (3.6)$$

yang mempunyai penyelesaian eksak. Menurut

Golberg (1979) persamaan integral (3.6) dapat dinyatakan sebagai persamaan integral Fredholm

$$y(x) = \sin(x) + \int_0^1 K(x,t)y(t)dt \quad (3.7)$$

dengan

$$K(x,t) = \begin{cases} 2 \cos(x-t), & 0 \leq t \leq x \\ 0, & x < t \leq 1 \end{cases}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (3.7) digunakan ketiga skedul multigrid. Pada tiap skedul digunakan tiga level perhitungan dengan level tertinggi adalah $m = 32$. selain itu pada tiap level dilakukan sebanyak dua kali iterasi. Banyaknya pengulangan skedul, *unit work* dan error yang diperlukan oleh masing-masing skedul untuk menyelesaikan persamaan (3.7) diberikan pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1: Pengulangan skedul, *unit work* dan error penyelesaian persamaan (3.7)

Metode	Pengulangan Skedul	Unit Work	Error
<i>FMV-cycle</i> 3 level	1	6.375	1.9314×10^{-6}
	2	12.75	3.2867×10^{-7}
	3	19.125	3.0958×10^{-7}
<i>W-cycle</i> 3 level	1	5.75	7.4897×10^{-6}
	2	11.5	2.5524×10^{-6}
	3	17.25	6.9322×10^{-6}
	4	23	3.3471×10^{-6}
	5	28.75	4.3657×10^{-6}
<i>V-cycle</i> 3 level	1	5.125	5.7869×10^{-5}
	2	10.25	1.4469×10^{-5}
	3	15.375	1.7382×10^{-5}
	4	20.5	1.2172×10^{-5}
	5	25.625	1.1965×10^{-5}

Berdasarkan Tabel 3.1, penyelesaian dengan *FMV-cycle* 3 level dibatasi sampai tiga kali pengulangan skedul. Hal ini disebabkan setelah tiga kali pengulangan ternyata error yang dihasilkan cenderung stabil. Demikian juga untuk *W-cycle* dan *V-cycle* dibatasi sampai lima kali pengulangan skedul karena pengulangan berikutnya errornya cenderung stabil.

Selain itu, apabila dilihat besarnya *unit work* dan error yang dihasilkan pada keadaan stabil maka skedul *FMV-cycle* memerlukan 19.125 UW dengan error sebesar 3.0958×10^{-7} . Sedangkan skedul *W-cycle* dan *V-cycle* memerlukan masing-masing sebesar 28.75 UW dan 25.625 UW dengan error sebesar 4.3657×10^{-6} dan 1.1965×10^{-5} . Dari besar *unit work* dan error yang dihasilkan maka dapat disimpulkan bahwa penerapan skedul *FMV-cycle* lebih efisien dan akurat apabila dibandingkan dengan skedul *W-cycle* maupun *V-cycle*. Sedangkan untuk skedul *W-cycle* dan *V-cycle* apabila dilihat *unit work* yang diperlukan untuk mencapai keadaan error yang stabil maka skedul *V-cycle* lebih efisien daripada *W-cycle*. Tetapi apabila dilihat error yang dihasilkan maka skedul *W-cycle* lebih akurat dibandingkan dengan skedul *V-cycle*.

Dengan demikian efisiensi dan akurasi penyelesaian persamaan integral Fredholm (3.7) untuk ketiga skedul multigrid dapat disajikan seperti pada tabel 3.2 berikut.

Tabel 3.2: Efisiensi dan Akurasi Skedul Multigrid

Kategori	Skedul Multigrid
Efisiensi	<i>FMV-cycle</i> > <i>V-cycle</i> > <i>W-cycle</i>
Akurasi	<i>FMV-cycle</i> > <i>W-cycle</i> > <i>V-cycle</i>

Keterangan:

> = lebih ... dari

Kasus 2.

Diberikan persamaan integral Volterra linear yang diambil dari Jerri (1985)

$$y(x) = x + \int_0^x 2e^{-x-t} y(t)dt \quad (3.8)$$

yang mempunyai penyelesaian eksak

$$y(x) = x + \frac{2}{9} e^{3x} (1 - 3xe^{-3x} - e^{-3x}).$$

Persamaan (3.8) dapat dinyatakan sebagai persamaan integral Fredholm linear, yaitu

$$y(x) = x + \int_0^1 K(x,t)y(t)dt, \quad (3.9)$$

dengan

$$K(x,t) = \begin{cases} 2e^{x-t}, & 0 \leq t \leq x \\ 0, & x < t \leq 1 \end{cases}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (3.9) digunakan ketiga skedul multigrad. Pada tiap skedul digunakan tiga level perhitungan dengan level tertinggi adalah $m = 32$. selain itu pada tiap level dilakukan sebanyak dua kali iterasi. Banyaknya pengulangan skedul, *unit work* dan error yang diperlukan oleh masing-masing skedul untuk menyelesaikan persamaan (3.9) diberikan pada Tabel 3.3.

Tabel 3.3: Pengulangan, *unit work* dan error penyelesaian persamaan (3.9)

Metode	Pengulangan Skedul	Unit Work	Error
<i>FMV-cycle 3 level</i>	1	6.375	1.2887×10^{-6}
	2	12.75	1.3113×10^{-6}
	3	19.125	1.3025×10^{-6}
<i>W-cycle 3 level</i>	1	5.75	3.0541×10^{-5}
	2	11.5	3.3304×10^{-6}
	3	17.25	1.0552×10^{-4}
	4	23	1.3250×10^{-4}
	5	28.75	1.3463×10^{-4}
<i>V-cycle 3 level</i>	1	5.125	5.2421×10^{-5}
	2	10.25	4.8112×10^{-4}
	3	15.375	3.5761×10^{-4}
	4	20.5	3.3524×10^{-4}
	5	25.625	3.3451×10^{-4}

Berdasarkan Tabel 3.3, penyelesaian dengan *FMV-cycle 3 level* dibatasi sampai tiga kali pengulangan skedul. Hal ini disebabkan setelah tiga kali pengulangan ternyata error yang dihasilkan cenderung stabil. Demikian juga untuk *W-cycle* dan *V-cycle* dibatasi sampai lima kali pengulangan skedul karena pengulangan berikutnya errornya cenderung stabil.

Selain itu, apabila dilihat besarnya *unit work* dan error yang dihasilkan pada keadaan stabil maka skedul *FMV-cycle* memerlukan 19.125 UW dengan error sebesar 1.3025×10^{-6} . Sedangkan skedul *W-cycle* dan *V-cycle* memerlukan masing-masing sebesar 28.75

UW dan 25.625 UW dengan error sebesar 1.3463×10^{-4} dan 3.3451×10^{-4} . Dari besar *unit work* dan error yang dihasilkan maka dapat disimpulkan bahwa penerapan skedul *FMV-cycle* lebih efisien dan akurat apabila dibandingkan dengan skedul *W-cycle* maupun *V-cycle*. Sedangkan untuk skedul *W-cycle* dan *V-cycle* apabila dilihat *unit work* yang diperlukan untuk mencapai keadaan error yang stabil maka skedul *V-cycle* lebih efisien daripada *W-cycle*. Tetapi apabila dilihat error yang dihasilkan maka skedul *W-cycle* lebih akurat dibandingkan dengan skedul *V-cycle*.

Dengan demikian efisiensi dan akurasi penyelesaian persamaan integral Fredholm (3.9) untuk ketiga skedul multigrad dapat disajikan seperti pada tabel 3.4 berikut.

Tabel 3.4: Efisiensi dan Akurasi Skedul Multigrad

Kategori	Skedul Multigrad
Efisiensi	<i>FMV-cycle</i> > <i>V-cycle</i> > <i>W-cycle</i>
Akurasi	<i>FMV-cycle</i> > <i>W-cycle</i> > <i>V-cycle</i>

Keterangan:

> = lebih ... dari

KESIMPULAN DAN SARAN

Eksperimen numerik menunjukkan bahwa penerapan gabungan metode fungsi Walsh dan skedul *FMV-cycle*, khususnya untuk $m = 32$ dengan tiga level perhitungan, mampu memberikan penyelesaian persamaan integral Fredholm linear yang lebih efisien dan akurat dibandingkan apabila diterapkan skedul *V-cycle* maupun *W-cycle*. Selain itu skedul *V-cycle*, untuk ketiga kasus, lebih efisien dibandingkan dengan skedul *W-cycle*.

Algoritma penyelesaian persamaan integral yang lebih efisien dan akurat masih merupakan bidang yang cukup luas. Penerapan pada kasus-kasus yang lain akan memperluas kesimpulan yang diberikan.

DAFTAR RUJUKAN

- Beauchamp, K. G., 1975, *Walsh Function and Their Applications*, Academic Press, London.
- Blyth, W. F. and Uljanov, V., 1996, *Numerical Solution of Weakly Singular Fredholm Integral Equations using Walsh Functions*, Computational Techniques and Applications: CTAC95, Hal: 137-143.
- Golberg, M. A., 1973, *Solution Methods for Integral Equations, Theory and Applications*, Plenum Press, New York.
- Jeri, A. J., 1985, *Introduction to Integral Equations with Applications*, Marcel Dekker Inc., New York.
- Masduki, 2003, Efisiensi Metode Fungsi Walsh dan FMV-cycle untuk Menyelesaikan Persamaan Integral Fredholm Linear, *Jurnal MIPA*, Vol. 13, No. 2, Hal: 150 – 155.
- Uljanov, V., and Blyth, W. F., 1996, *Numerical Solution of Urysohn Integral Equation using Walsh Function*, The Role of Mathematics in Modern Engineering: 1st Biennial Engineering Mathematics Conference: AEMC94 (Alan K. Easton and Joseph M. Steiner, eds), The Engineering Mathematics Group (EMG), Australian and New Zealand Industrial and Applied Mathematics (ANZIAM), Australian Mathematics Society and Student Litterature, Hal: 621-628.
- Widyaningsih, P., 2001, *Gabungan Metode Fungsi Walsh dan V-cycle dalam Penyelesaian Persamaan Integral Fredholm Linear*, Dipresentasikan pada Seminar Nasional Matematika yang diselenggarakan oleh UNY, Yogyakarta, 21 April 2001.