POLINOMIAL KARAKTERISTIK DARI GRAF PRISMA

Fery Firmansah
Prodi Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Widya Dharma Klaten
Email: feryfirmansah@unwidha.ac.id

Abstrak

Graf prisma $C_n \times P_2$ dengan $n \geq 3$ adalah graf hasil kali kartesian graf lingkaran C_n dengan n simpul dan graf lintasan P_2 dengan 2 simpul. Tujuan penelitian ini adalah mendapatkan sifat-sifat polinomial karakteristik dan spektrum dari graf prisma $C_n \times P_2$. Metode penelitian yang digunakan terdiri dari beberapa tahapan antara lain studi literatur, analisis data, dan verifikasi hasil penelitian. Hasil dari penelitan ini sebagai berikut. Koefisien-koefisien polinomial karakteristik dari graf prisma $C_n \times P_2$ yaitu $\chi(C_n \times P_2, \lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_n$ memenuhi $c_1 = 0$ dan $-c_2 = E(C_n \times P_2)$ adalah banyaknya busur pada graf prisma $C_n \times P_2$. Nilai eigen dari graf prisma $C_n \times P_2$ adalah $\lambda = 3$ dengan multiplisitasnya adalah 1. Dibagian akhir juga diberikan spektrum pada beberapa kelas graf prisma $C_n \times P_2$ untuk $n = 3, 4, 5$ dan 6.

Kata Kunci: *graf prisma, nilai eigen, polinomial karakteristik, spektrum graf*

1. PENDAHULUAN

Graf G selain dinyatakan dalam bentuk gambar simpul dan busur juga dapat dinyatakan dalam bentuk matriks, salah satunya adalah matriks *adjacency*. Matriks *adjacency* dari graf G dinotasikan dengan $A(G)$ adalah matriks berukuran $n \times n$, $n = |V(G)|$ yang entri-entrinya merepresentasikan ada tidaknya busur yang menghubungkan dua simpul dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ jika } v_i \text{ dan } v_j \text{ bertetangga} \\ 0, \text{jika } v_i \text{ dan } v_j \text{ tidak bertetangga} \end{cases}$$

untuk $i, j = 1,2,3, \dots, n$, dimana baris i dan kolom j merepresentasikan simpul pada graf G (West, 2001).

Polinomial karakteristik dari graf G adalah $\chi(G,\lambda) = det(\lambda I - A(G))$, dengan λ adalah nilai eigen dari matriks *adjacency* A yang memenuhi $Av = \lambda v$ dengan v adalah vektor eigen yang tak nol. Nilai eigen matriks *adjacency* $A(G)$ merupakan akar-akar dari $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ yang didapatkan dari persamaan karakteristik $\chi(G,\lambda) = det(\lambda I - A(G)) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i) = 0$ (Harary, 1996). Misalkan graf G mempunyai nilai eigen yang berbeda-beda yaitu $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_{q-1}$ dengan multiplisitas masing-masing $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_{q-1})$ maka spektrum dari graf G adalah

$$Spec(G) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{q-1} \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \dots & m(\lambda_{q-1}) \end{pmatrix}$$ (Biggs, 1993).

Biggs (1993) telah menunjukan spektrum dari beberapa kelas graf diantaranya graf lingkaran C_n. Fahcruddin (2009) mendapatkan spektrum graf star S_n dan graf bipartisi komplit $K_{m,n}$. Selvia, dkk (2015) mendapatkan spektrum graf lengkap K_n. Andrari (2017) mendapatkan polinomial karakteristik pada graf kincir angin berarah. Respitawulan (2017) mendapatkan sifat-sifat nilai eigen graf k-reguler tak terhubung. Pada penelitian ini peneliti tertarik untuk mendapatkan polinomial karakteristik dan spektrum dari dari graf prisma $C_n \times P_2$ yang merupakan graf sederhana dan terhubung.

Graf prisma $C_n \times P_2$ dengan $n \geq 3$ adalah graf reguler berderajat 3 yang diperoleh dari hasil kali kartesian graf lingkaran C_n dengan n simpul dan graf lintasan P_2 dengan 2 simpul (Sugeng & Silaban, 2014). Pada penelitian ini akan diberikan sifat-sifat dari polinomial karakteristik dari graf prisma $C_n \times P_2$ dengan $n \geq 3$, nilai eigen dari graf prisma $C_n \times P_2$ dengan $n \geq 3$ dan spektrum $C_n \times P_2$ dengan $n = 3,4,5$, dan 6.

2. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan terdiri dari beberapa tahapan antara lain. Tahapan studi literatur yaitu mengumpulkan referensi yang berkaitan dengan topik penelitian yaitu polinomial karakteristik dari graf, sehingga diperolah tujuan dari penelitian ini yaitu mendapatkan polinomial karakteristik dari graf prisma beserta spektrumnya. Tahapan analisis data berupa analisis pada kelas graf prisma yang sederhana untuk mendapatkan sifat-sifat yang lebih umum yang dinyatakan dalam bentuk teorema. Tahapan verifikasi hasil yaitu melakukan pembuktian teorema yang diperoleh dengan menggunakan metode pembuktian matematika yang tepat.

3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Hasil penelitian dan pembahasan pada penelitian ini berupa sifat-sifat polinomial karakteristik dari graf prisma $C_n \times P_2$ dengan $n \geq 3$ yang dinyatakan dalam bentuk teorema disertai dengan pembuktiannya.

Misalkan $A(C_n \times P_2)$ adalah matriks *adjacency* dari graf prisma $C_n \times P_2$, dimana $A(C_n \times P_2) = [a_{ij}]$, dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } v_i \text{ dan } v_j \text{ bertetangga} \\ 0, & \text{jika } v_i \text{ dan } v_j \text{ tidak bertetangga} \end{cases}$$

maka polinomial karakteristik dari graf prisma $C_n \times P_2$, sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \chi(C_n \times P_2, \lambda) &= \det(A(C_3 \times P_2) - \lambda I) \\ &= \lambda^{2n} + c_1\lambda^{2n-1} + c_2\lambda^{2n-2} + c_3\lambda^{2n-3} + \cdots + c_{2n} \end{aligned}$$

Teorema 1. *Koefisien-koefisien polinomial karakteristik dari graf prisma $C_n \times P_2$ dengan $n \geq 3$ yaitu*

$$\chi(C_n \times P_2, \lambda) = \lambda^{2n} + c_1\lambda^{2n-1} + c_2\lambda^{2n-2} + c_3\lambda^{2n-3} + \cdots + c_{2n}$$

memenuhi:

i. $c_1 = 0$

ii. $-c_2 = E(C_n \times P_2)$ *adalah banyaknya busur graf prisma* $C_n \times P_2$

Bukti :

i. Karena graf prisma $C_n \times P_2$ adalah graf sederhana maka semua entri diagonal utama dari matriks *adjacency* $A(C_n \times P_2)$ bernilai nol. Akibatnya semua submatriks utama yang berukuran 1×1 dari matriks adjacency $A(C_n \times P_2)$ berupa matriks nol sehingga jumlah determinan semua submatriks utama berukuran 1×1 dari matriks adjacency $A(C_n \times P_2)$ tersebut bernilai nol. Sehingga diperoleh $c_1 = -E_1\big(A(C_n \times P_2)\big) = 0$;

ii. Submatriks utama yang berukuran 2×2 dari matriks *adjacency* $A(C_n \times P_2)$ hanya berbentuk $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ atau $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

    Misalkan submatriks utama $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ada sebanyak x dan $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ada sebanyak y, diperoleh

    $$c_2 = -E_2\big(A(C_n \times P_2)\big) = x\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = x.0 + y.-1 = -y$$

    Lebih lanjut submatriks utama $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ merupakan representasi dari pasangan simpul yang bertetangga yakni sebuah busur dari graf prisma $C_n \times P_2$, sehingga banyaknya busur y pada graf prisma $C_n \times P_2$ adalah $E(C_n \times P_2) = -c_2 = -(-y) = y$

Berikut diberikan nilai eigen dan multiplisitas dari graf prisma $C_n \times P_2$ dengan $n \geq 3$ yang dinyatakan dalam Teorema 2.

Teorema 2. *Misalkan $C_n \times P_2$ adalah graf prisma dengan $n \geq 3$, maka*

i. Nilai eigen dari $C_n \times P_2$ adalah $\lambda = 3$;

ii. Multiplisitas dari $\lambda = 3$ adalah 1;

Bukti :

i. Pilih vektor eigen $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$,

    karena graf prisma $C_n \times P_2$ adalah graf reguler berderajat 3, maka setiap baris dari matriks *adjacency* $A(C_n \times P_2)$ mempunyai 3 buah entri bernilai 1, sehingga diperoleh

    $$A(C_n \times P_2)v = A(C_n \times P_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ \vdots \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

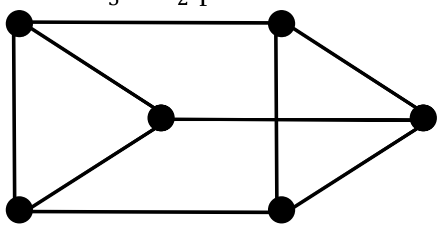
    jadi $\lambda = 3$ adalah nilai eigen dari graf prisma $C_n \times P_2$;

ii. Karena graf prisma $C_n \times P_2$ dengan $n \geq 3$ adalah graf terhubung, maka nilai eigen 3 mempunyai dimensi 1. Sehingga multiplisitas dari $\lambda = 3$ adalah 1;

Berikut diberikan spektrum matriks a*djacency* pada graf prisma $C_n \times P_2$ dengan $n = 3,4,5,$ dan 6.

- **Spektrum Graf Prisma $C_3 \times P_2$**

Berikut diberikan graf prisma $C_3 \times P_2$ pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf Prisma $C_3 \times P_2$

Matriks *adjacency* graf prisma $C_3 \times P_2$ adalah

$$A(C_3 \times P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Polinomial karakteristik graf prisma $C_3 \times P_2$ adalah

$$\chi(C_3 \times P_2, \lambda) = \det(A(C_3 \times P_2) - \lambda I)$$

$$= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 12\lambda^2 - 4\lambda^3 - 9\lambda^4 + \lambda^6$$

Sehingga spektrum graf prisma $C_3 \times P_2$ adalah

$$Spec(C_3 \times P_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

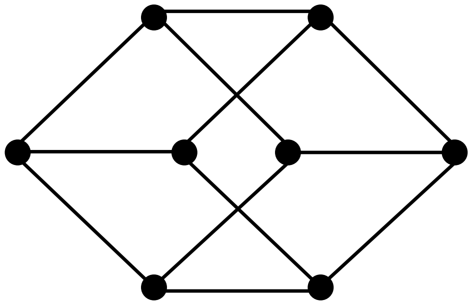
dengan nilai eigen graf prisma $C_3 \times P_2$ adalah $\{-2, -2, 1, 0, 0, 3\}$

dan vektor eigen graf prisma $C_3 \times P_2$ adalah

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ dan } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Spektrum Graf Prisma $C_4 \times P_2$**

Berikut diberikan graf prisma $C_4 \times P_2$ pada Gambar 2



Gambar 2. Graf Prisma $C_4 \times P_2$

Matriks *adjacency* graf prisma $C_4 \times P_2$ adalah

$$A(C_4 \times P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Polinomial karakteristik graf prisma $C_4 \times P_2$ adalah

$\chi(C_4 \times P_2, \lambda) = \det(A(C_4 \times P_2) - \lambda I)$

$$= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$= 9 - 28\lambda^2 + 30\lambda^4 - 12\lambda^6 + \lambda^8$

Sehingga spektrum graf prisma $C_4 \times P_2$ adalah

$$Spec(C_4 \times P_2) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

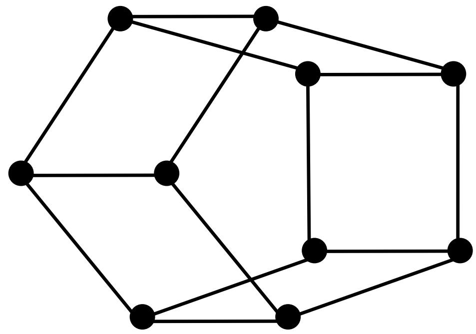
dengan nilai eigen graf prisma $C_4 \times P_2$ adalah $\{-3, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 3\}$

dan vektor eigen graf prisma $C_4 \times P_2$ adalah

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{dan} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Spektrum Graf Prisma $C_5 \times P_2$**

Berikut diberikan graf prisma $C_5 \times P_2$ pada Gambar 3.



Gambar 3. Graf Prisma $C_5 \times P_2$

Matriks *adjacency* graf prisma $C_5 \times P_2$ adalah

$$A(C_5 \times P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Polinomial karakteristik graf prisma $C_5 \times P_2$ adalah

$\chi(C_5 \times P_2, \lambda) = \det(A(C_5 \times P_2) - \lambda I)$

$$= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$= 3 + 20\lambda + 35\lambda^2 - 20\lambda^3 - 85\lambda^4 - 4\lambda^5 + 65\lambda^6 - 15\lambda^8 + \lambda^{10}$

Sehingga spektrum graf prisma $C_5 \times P_2$ adalah

$Spec(C_5 \times P_2)$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -\frac{1}{2}(3+\sqrt{5}) & -\frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) & \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) & \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

dengan nilai eigen graf prisma $C_5 \times P_2$ adalah

$$\left\{ \begin{matrix} 3, \frac{1}{2}\left(-3-\sqrt{5}\right), \frac{1}{2}\left(-3-\sqrt{5}\right), \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right), \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right), 1, \\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}), \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}), \frac{1}{2}(-3+\sqrt{5}), \frac{1}{2}(-3+\sqrt{5}) \end{matrix} \right\}$$

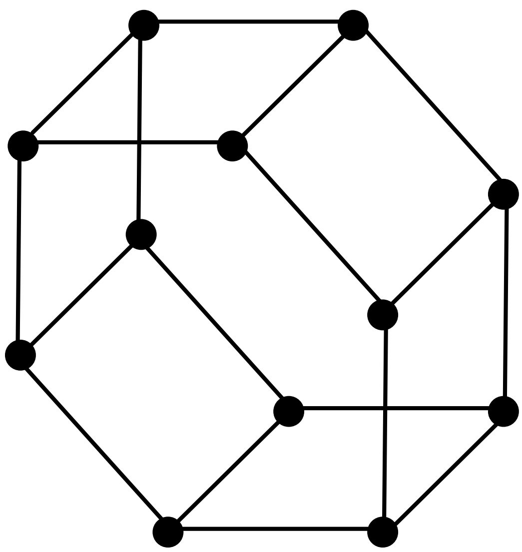
dan vektor eigen graf prisma $C_5 \times P_2$ adalah

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\\ \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})\\ 1\\ 0\\ -1\\ \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})\\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\\ -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})\\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\\ -1\\ 0\\ -1\\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\\ \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\\ -1\\ 0\\ 1\\ \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\\ -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\\ \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\\ 1\\ 0\\ -1\\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\\ 1\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\\-1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})\\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\\ -1\\ 0\\ 1\\ \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})\\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\\ -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\\ \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})\\ 1\\ 0\\ -1\\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\\ \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\\ \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\\ 1\\ 0\\ -1\\ \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\\ -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \text{ dan } \begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\\ -1\\ 0\\ -1\\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\\ \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

- **Spektrum Graf Prisma $C_6 \times P_2$**

Berikut diberikan graf prisma $C_6 \times P_2$ pada Gambar 4



Gambar 4. Graf Prisma $C_6 \times P_2$

Matriks *adjacency* graf prisma $C_6 \times P_2$ adalah

$$A(C_6 \times P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Polinomial karakteristik graf prisma $C_6 \times P_2$ adalah

$\chi(C_6 \times P_2, \lambda) = \det(A(C_6 \times P_2) - \lambda I)$

$$= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$= 144\lambda^4 - 232\lambda^6 + 105\lambda^8 - 18\lambda^{10} + \lambda^{12}$

Sehingga spektrum graf prisma $C_6 \times P_2$ adalah

$$Spec(C_6 \times P_2) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

dengan nilai eigen graf prisma $C_6 \times P_2$ adalah

$\{-3,3,-2,-2,2,2,-1,1,0,0,0,0\}$

dan vektor eigen graf prisma $C_6 \times P_2$ adalah

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\\1\\-1\\-1\\1\\-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\\0\\-1\\-1\\0\\1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\\-1\\0\\-1\\1\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\\0\\1\\1\\0\\-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\\1\\0\\-1\\-1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\\-1\\1\\-1\\1\\-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\\-1\\-1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\\0\\0\\-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\\0\\-1\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\\0\\0\\-1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \text{ dan } \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\\0\\1\\-1\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

4. SIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan diperoleh hasil bahwa. Koefisien-koefisien polinomial karakteristik dari graf prisma $C_n \times P_2$ dengan $n \geq 3$ yaitu $\chi(C_n \times P_2, \lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_n$ memenuhi $c_1 = 0$ dan $-c_2 = E(C_n \times P_2)$ adalah banyaknya busur pada graf prisma $C_n \times P_2$. Nilai eigen dari graf prisma $C_n \times P_2$ adalah $\lambda = 3$ dengan multiplisitasnya adalah 1. Disisi yang lain juga diperoleh spektrum matriks *adjacency* dari graf prisma $C_n \times P_2$ untuk $n = 3, 4, 5$ dan 6.

5. DAFTAR PUSTAKA

Andrari, F. R. (2017). Polinomial Karakteristik pada Graf Kincir Angin Berarah, *Faktor Exacta* 10(2), 111-117. Diakses dari https://journal.lppmunindra.ac.id/index.php/Faktor_Exacta/article/view/1306

Biggs, N. (1993). *Algebraic Graph Theory 2ed*. Cambridge: Cambridge University Press

Darmajid, dkk. (2011). *Teori Graf Aljabar*. Bandung: Institut Teknologi Bandung.

Fahcruddin, I. (2009). Spectrum pada Graf Star (Sn) dan Graf Bipartisi Komplit (Km,n) dengan m, n ϵ N. *Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*, Diselenggarakan oleh Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY 5 Desember 2009 (Hal. 1-11). Diakses dari https://eprints.uny.ac.id/7003/1/A-1-Imam%20Fahcruddin.pdf

Harary, F. (1996). *Graph Theory*. Philippines: Addison-Wesley Publishing Company.

Respitawulan. (2017). Properti Eigen Graf K-Reguler Tak Terhubung. Jurnal Matematika, 16(2), 1-6. Diakses dari https://ejournal.unisba.ac.id/index.php/matematika/article/view/2691/2017

Selvia, S. M., dkk. (2015). Spektrum Graf Bintang Sn dan Graf Lengkap Kn untuk n $\geq$ 2. *Jurnal Matematika Unand*, 4(4), 129-136. Diakses dari http://jmua.fmipa.unand.ac.id/index.php/jmua/article/view/518/507

Sugeng, K. A & Silaban, D. R. (2014). *Graf dan Aplikasinya*. Depok: Universitas Indonesia.

West, D. B. (2001). *Introduction to Graph Theory (2end ed.)*. London: Pratice Hall.