BEBERAPA TEOREMA TITIK TETAP UNTUK PEMETAAN *NONSELF*

Oleh:

Rindang Kasih

Program Studi Pendidikan Matematika FKIP UNIVET Sukoharjo

Jl. Letjend Sujono Humardani No.1 Kampus Jombor Sukoharjo,

e-mail: Rindang_k@yahoo.com

Abstrak. Dalam paper ini, kami membuktikan beberapa teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself condensing*, kompak dan kontinu, jumlah dua operator, kontraksi dan *nonexpansive*. Pertama, dengan menggunakan beberapa sifat ukuran ketidakompakan dan teorema titik tetap Sadovskii, dibuktikan suatu teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself condensing*. Dengan lemma Urysohn dan teorema titik tetap Schauder, diperoleh bukti suatu teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself* kompak dan kontinu. Dengan menggunakan beberapa sifat ukuran ketidakkompakan dapat dibuktikan teorema titik tetap untuk jumlah dua operator yaitu pemetaan *nonself* kompak dan pemetaan *nonself k-set* kontraksi. Selanjutnya, paper ini juga memuat suatu teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself* kontraksi. Terakhir, kami membuktikan suatu teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself nonexpansive* yang terdefinisi pada himpunan bagian tertutup dari suatu ruang Banach konveks seragam.

Kata kunci : pemetaan *nonexpansive*, pemetaan *condensing*, pemetaan kompak.

PENDAHULUAN

Latar Belakang dan Permasalahan

Titik tetap merupakan salah satu obyek penelitian di dalam matematika analisis dan mempunyai peranan penting baik di dalam matematika itu sendiri maupun di bidang-bidang lainnya. Teorema-teorema titik tetap sering diaplikasikan dalam permasalahan-permasalahan persamaan differensial, persamaan integral, teori permainan, sistem dinamik dan ekonomi.

Titik tetap suatu pemetaan *nonself* $T: U \subseteq X \rightarrow X$ dengan X suatu ruang metrik adalah titik di U yang dipetakan oleh T ke titik tersebut. Sejalan dengan perkembangan sains dan teknologi muncul teorema-teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself*. Beberapa diantaranya adalah teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself* kompak dan kontinu, teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself* kontraksi, teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself condensing*, teorema titik tetap untuk jumlah dari pemetaan *nonself* kompak dan pemetaan *nonself k-set* kontraksi $(0 \leq k < 1)$ dan teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself nonexpansive*.

Teorema-teorema titik tetap untuk lima jenis pemetaan tersebut di atas mempunyai peranan penting, diantaranya sebagai berikut: teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself* kompak dan kontinu digunakan dalam membuktikan eksistensi solusi tunggal persamaan integral Fredholm (O'regan, 2001, Teorema 5.2, hal 49-50), peranan teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself* kontraksi terlihat dalam prosedur iterasi, misalnya prosedur iterasi Newton dan juga digunakan untuk membuktikan jaminan adanya solusi tunggal persamaan integral Volterra (Cinlar, E. dan Vanderbei R.J., 2000, Teorema 18.20, hal 76). Sedangkan teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself nonexpansive* berperan untuk membuktikan eksistensi solusi tunggal dari persamaan Dirichlet homogen order 2 (O'regan, 2001, hal 22-23). Terkait dengan teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself nonexpansive,* O'regan membuktikan teorema berikut ini.

Diberikan U terbatas, terbuka, konveks subset dari suatu ruang Banach konveks seragam X dan $\theta \in U$. Jika $F\colon \overline{U} \to X$ pemetaan *nonexpansive* maka salah satu pernyataan berikut benar:

$(A1)$ F mempunyai suatu titik tetap di $\overline{U}$, atau

$(A2)$ terdapat $\lambda \in (0,1)$ dan $u \in \partial U$ dengan $u = \lambda F(u)$.

Syarat teorema ini akan diperlemah dengan mengganti syarat U terbatas dan konveks dengan syarat $F(\overline{U})$ terbatas.

Tujuan dan Manfaat Penelitian

Penelitian ini bertujuan mempelajari beberapa teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself* yaitu teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself* kompak dan kontinu, teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself condensing*, teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself* kontraksi, teorema titik tetap untuk jumlah dari pemetaan *nonself* kompak dan pemetaan *nonself k-set* kontraksi $(0 \leq k < 1)$, dan teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself nonexpansive.* Selain itu, di dalam paper ini bertujuan memperlemah syarat teorema yang diberikan O'regan di atas dengan mengganti syarat terbatas dan konveks dari U dengan syarat $F(\overline{U})$ terbatas. Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi dalam teori titik tetap dan aplikasinya, terutama dalam penyelesaian permasalahan-permasalahan persamaan differensial dan persamaan integral.

Tinjauan Pustaka

Teori titik tetap mempunyai keterkaitan erat dengan konsep-konsep analisis fungsional. Oleh karena itu, di dalam paper ini memuat konsep-konsep analysis fungsional. Konsep-konsep analisis fungsional diberikan oleh Kreyszig (1978). Disamping itu, paper ini juga memuat beberapa konsep ruang *euclide*, yang dikemukakan oleh Bartle (2000) karena sangat diperlukan untuk membuktikan beberapa teorema yang mendukung pembahasan tentang teorema titik tetap yang termuat dalam paper ini. Pembahasan teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself* dalam paper ini merupakan studi literatur dengan acuan utama paper *"Some Fixed Theorem for Nonself Maps"* yang ditulis oleh Neeta Singh (2007).

Beberapa hasil penelitian teori titik tetap untuk beberapa macam pemetaan *nonself* telah dirangkum oleh Ravi P. Agarwal, Maria Mefhan dan Donald O'regan (2001), dan oleh Granas dan Dugundji (2003).

A. Metodologi Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan metode literatur (kajian teori). Dengan menggunakan teorema-teorema pendukung, dikaji beberapa teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself* yaitu teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself* kompak dan kontinu, teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself condensing*, teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself* kontraksi, teorema titik tetap untuk jumlah dari pemetaan *nonself* kompak dan pemetaan *nonself k-set* kontraksi $(0 \leq k < 1)$ dan teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself nonexpansive*.

Terlebih dahulu didefinisikan ukuran ketidakkompakan (*measure of noncompactness*) himpunan dan dibuktikan beberapa sifatnya, yang digunakan oleh sebagian teorema-teorema dalam pembahasan. Selanjutnya, untuk membuktikan teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself condensing* dan pemetaan *nonself* kompak dan kontinu terlebih dahulu dibuktikan empat teorema titik tetap terkenal yaitu teorema titik tetap Brouwer, teorema titik tetap Schauder, teorema titik tetap Monch dan teorema titik tetap Sadovskii. Dengan menggunakan teorema titik tetap Sadovskii dan beberapa sifat ukuran ketidakkompakan, dibuktikan teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself condensing* dan kemudian dengan menggunakan teorema titik tetap Schauder dibuktikan pula teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself* kompak dan kontinu, sedangkan teorema titik tetap untuk jumlah pemetaan kompak dan *k-set* kontraksi $(0 \leq k < 1)$ dibuktikan dengan sebuah teorema yang diperoleh berdasarkan teorema titik tetap Monch. Selanjutnya, didefinisikan pemetaan *homotopik* dan dibuktikan sebuah teorema yang berkaitan dengan pemetaan *homotopik*, yang kemudian digunakan untuk membuktikan teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself* kontraksi. Terakhir, dengan menggunakan definisi pemetaan *demiclosed,* definisi *weakly closed,* definisi ruang Banach konveks seragam dan beberapa lemma, dibuktikan teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself nonexpansive* pada suatu subset dari ruang Banach konveks seragam. Dari teorema ini diperoleh beberapa akibat.

PEMBAHASAN

Paper ini terdiri dari empat bagian dan memuat beberapa teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself condensing*, kompak dan kontinu, jumlah dua operator, kontraksi dan *nonexpansive*. Teorema titik untuk pemetaan *nonself condensing* dibuktikan di bagian 2. Pada bagian 3, dibuktikan suatu teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself* kompak dan kontinu, suatu teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself* jumlah dua operator, yang satu operator kompak dan lainnya pemetaan *k-set* kontraksi dan suatu teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself* kontraksi. Teorema berikut diberikan oleh R.P. Agarwal, Maria Mefhan dan D.O'Regan [1].

Diberikan E ruang Banach konveks seragam dan $U \subset E$ terbuka, terbatas, dan konveks dengan $0 \in U$. Jika pemetaan $F : \overline{U} \longrightarrow E$ nonexpansive, maka salah satu pernyataan berikut ini benar.

(A_1) *Pemetaan F mempunyai titik tetap di $\overline{U}$, atau*

(A_2) *Terdapat $u \in \partial U$ dan $\lambda \in (0,1)$ dengan $u = \lambda F(u)$.*

Pada bagian 4 dari paper ini, kami membuktikan bahwa syarat U terbatas dan konveks dalam teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself nonexpansive* di atas dapat diganti dengan syarat $F(\overline{U})$ terbatas.

Selanjutnya, diberikan beberapa notasi dan definisi yang digunakan dalam pembicaraan pada bagian-bagian selanjutnya.

Definisi 1.1 Diberikan E ruang Banach dan Ω_E koleksi semua himpunan bagian terbatas dari E. Ukuran ketidakompakan Kuratowski $\alpha: \Omega_E \longrightarrow [0, \infty)$ didefinisikan oleh

$$\alpha(X) = inf\left\{\varepsilon > 0: D \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} D_i \ dan \ diam(D_i) \leq \varepsilon, i = 1,2, \dots, n\right\}.$$

untuk setiap $D \in \Omega_E$ dengan $diam(D_i) = sup\{\|x - y\|: x, y \in D_i\}$.

Untuk setiap $A, B \in \Omega_E$ berlaku

(i) $\alpha(A) = 0$ jika dan hanya jika $\bar{A}$ kompak.
(ii) $\alpha(A) = \alpha(\bar{A})$.
(iii) Jika $A \subseteq B$ maka $\alpha(A) \leq \alpha(B)$.
(iv) $\alpha(A \cup B) = maks\{\alpha(A), \alpha(B)\}$.
(v) $\alpha(\lambda A)$= $|\lambda|\alpha(A)$ untuk setiap $\lambda \in R$.
(vi) $\alpha(A + B) \leq \alpha(A) + \alpha(B)$.
(vii) $\alpha(co(A)) = \alpha(A)$.

Definisi 1.2 Diberikan E ruang Banach dan $k \geq 0$. Pemetaan $F : X \subseteq E \longrightarrow E$ disebut *k-set* kontraksi (*k-set contractive*) jika untuk setiap $Y \subseteq X$ terbatas, $F(Y)$ terbatas dan $\alpha(F(Y)) \leq k\alpha(Y)$.

Definisi 1.3 Diberikan E ruang Banach. Pemetaan $F : X \subseteq E \longrightarrow E$ disebut *condensing* jika untuk setiap $Y \subseteq X$ terbatas dan $\alpha(Y) > 0$, $F(Y)$ terbatas, dan $\alpha(F(Y)) < \alpha(Y)$.

Definisi 1.4 Diberikan X dan Y ruang bernorma. Pemetaan $F : X \longrightarrow Y$ disebut kompak jika terdapat $K \subseteq Y$ kompak sehingga $F(X) \subseteq K$.

Definisi 1.5 Diberikan E ruang Banach. Pemetaan $F: X \subseteq E \longrightarrow E$ disebut kontinu lengkap (*completely continuous*) jika $F(Y)$ kompak relatif untuk setiap $Y \subseteq X$ terbatas.

Definisi 1.6 Diberikan E ruang bernorma dengan $C \subseteq E$. Pemetaan $F: C \longrightarrow E$ disebut *nonexpansive* jika $\|F(x) - F(y)\| \leq \|x - y\|$ untuk setiap $x, y \in C$.

Definisi 1.7 Diberikan E ruang Banach. Pemetaan $F: X \subseteq E \longrightarrow E$ disebut *demiclosed* jika untuk setiap barisan $\{x_n\} \subseteq X$ konvergen lemah ke suatu $x \in X$ (dinotasikan dengan $x_n \rightharpoonup x$) dan barisan $\{F(x_n)\}$ konvergen kuat ke suatu y berakibat $F(x) = y$.

Definisi 1.8 Diberikan E ruang bernorma dengan $C \subseteq E$. Himpunan C dikatakan tertutup lemah (*weakly closed*) jika C memuat limit semua barisan $\{x_n\} \subseteq C$ yang konvergen lemah.

Definisi 1.9 Ruang Banach E disebut konveks seragam (*uniformly convex Banach space*) jika untuk setiap $\varepsilon \in (0,2]$ terdapat $\delta_\varepsilon \in (0,1]$ sehingga untuk setiap $x, y \in E$ dengan $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$ dan $\|x - y\| \geq \varepsilon$ berlaku $\frac{\|x+y\|}{2} \leq 1 - \delta_\varepsilon$.

Definisi 1.10 Diketahui E ruang Banach, $C \subseteq E$ tertutup, konveks dan $U \subseteq C$ terbuka dengan $p \in U$. Jika pemetaan $F: \overline{U} \longrightarrow C$ dikatakan memenuhi kondisi Monch (*Monch's condition*) jika untuk setiap $D \subseteq \overline{U}$ terbilang (*countable*) dan $D \subseteq \overline{co}\{F(D) \cup \{p\}\}$ berakibat $\overline{U}$ kompak.

2. Teorema Titik Tetap untuk Pemetaan *Nonself Condensing*

Terlebih dahulu diberikan teorema titik tetap Sadovskii berikut ini.

Teorema 2.1 *Diberikan E ruang Banach dengan $C \subseteq E$ konveks, tertutup dan $p \in U$. Jika pemetaan $F : C \longrightarrow C$ kontinu dan condensing dengan $F\ (C)$ terbatas, maka F mempunyai titik tetap di C.*

Dengan menggunakan Teorema 2.1, dibuktikan teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself condensing*.

Teorema 2.2 *Diberikan E ruang Banach, $C \subseteq E$ tertutup dan konveks, $U \subset C$ terbuka dan $p \in U$. Jika pemetaan $F: \overline{U} \longrightarrow C$ condensing dan kontinu dengan $F\ (\overline{U})$ terbatas dan $F/_{\partial U}$ = p, maka F mempunyai titik tetap di $\overline{U}$.*

Bukti. Didefinisikan pemetaan $N : C \longrightarrow C$ dengan rumus

$$N(x) = \begin{cases} F(x) \text{ untuk } x \in \overline{U} \\ p \quad \text{untuk } x \in C \setminus \overline{U}. \end{cases}$$

Karena U terbuka, F kontinu pada $\overline{U}$ dan $F/_{\partial U} = p$, maka $N : C \longrightarrow C$ kontinu. Jelas bahwa $N\ (C)$ terbatas di C sebab $F\ (\overline{U})$ terbatas di C. Selanjutnya ditunjukkan N pemetaan *condensing*. Diambil sebarang $A \subseteq C$ terbatas dengan $\alpha(A) > 0$, maka

$N(A) \subseteq F\ (\overline{U} \cap A) \cup \{p\}$ dan

$$\alpha\big(N(A)\big) \leq \alpha(F\ (\overline{U} \cap A) \cup \{p\}\ ) \leq maks\{\alpha\big(F\ (A)\big), \alpha(\{p\})\} = \alpha\big(F\ (A)\big).$$
$$< \alpha(\ A).$$

Oleh karena itu N pemetaan *condensing*. Berdasarkan Teorema 2.1, terdapat $x \in C$ dengan $x = N(x)$. Karena p di U yang terbuka, maka $x \in U$ dan oleh karena itu $x = F(x)$. Terbukti F mempunyai titik tetap di $\overline{U}$.■

3. Teorema Titik Tetap untuk Pemetaan *Nonself* Kompak dan Pemetaan *Nonself* Kontraksi

Untuk membuktikan teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself* kompak dan kontinu diperlukan lemma Urysohn, lemma Mazur dan teorema titik tetap Schauder. Dimulai dengan lemma Urysohn berikut ini.

Lemma 3.1 *Diberikan E ruang bernorma dan $A, B \subseteq E$ tak kosong. Jika A dan B tertutup dan saling asing maka terdapat pemetaan kontinu $\mu : E \longrightarrow [0,1]$ dengan sifat $\mu(A) = \{1\}$* dan $\mu(B) = \{0\}$.

Selanjutnya diberikan lemma Mazur dengan bukti alternatif.

Lemma 3.2 *Diberikan E ruang Banach dan $A \subseteq E$. Jika A kompak atau kompak relatif maka $\overline{co}(A)$ kompak.*

Bukti. Karena A kompak atau kompak relatif, maka $\alpha\big(co(A)\big) = \alpha(A) = 0$. Terbukti $\overline{co}(A)$ kompak. ■

Diberikan teorema teorema titik tetap Schauder berikut ini.

Teorema 3.3 *Diberikan E ruang bernorma dengan $C \subseteq E$ tertutup dan konveks. Jika pemetaan $F : C \longrightarrow C$ kompak dan kontinu, maka F mempunyai paling sedikit memiliki satu titik tetap di C.*

Dengan menggunakan Lemma 2.1, Lemma 2.2 dan Teorema 2.3, dibuktikan teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself* kompak dan kontinu berikut ini.

Teorema 3.4 *Diketahui E ruang Banach, $C \subseteq E$ konveks dan $U \subset C$ terbuka dengan $p \in U$. Jika pemetaan $F: \overline{U} \longrightarrow C$ kompak dan kontinu, maka salah satu pernyataan berikut ini benar.*

(A_1) *Pemetaan F mempunyai titik tetap di $\overline{U}$ atau*

(A_2) *Terdapat $u \in \partial U$ dan $\lambda \in (0{,}1)$ dengan $u = \lambda F(u) + (1-\lambda)p$.*

Bukti. Diasumsika (A_2) tak berlaku. Jika F mempunyai titik tetap di ∂U, maka bukti trivial, sedangkan Jika F tidak mempunyai titik tetap di ∂U, maka untuk setiap $u \in \partial U$ dan $\lambda \in [0{,}1]$ berlaku $u \neq \lambda F(u) + (1-\lambda)p$. Dibentuk

$$A \coloneqq \{x \in \overline{U} : x = tF(x) + (1-t)p \text{ untuk suatu } t \in [0{,}1]\}.$$

Karena $0.F(x) + (1-0)p = p \in \overline{U}$, maka $A \neq \phi$. Karena F kontinu, maka A tertutup. Karena A dan ∂U saling asing, maka berdasarkan Lemma 2.1, terdapat pemetaan kontinu $\mu : \overline{U} \longrightarrow [0{,}1]$ dengan sifat $\mu(A) = \{1\}$ dan $\mu(\partial U) = \{0\}$. Dibentuk pemetaan $N : C \longrightarrow C$ dengan rumus

$$N(x) = \begin{cases} \mu(x)F(x) + (1-p)\mu(x), & \text{untuk } x \in \overline{U} \\ p & \text{, untuk } x \in C \backslash \overline{U}. \end{cases}$$

Karena U terbuka, dan F dan μ kontinu pada $\overline{U}$, maka $N : C \longrightarrow C$ kontinu. Ditunjukkan N pemetaan kompak. Karena F kompak, maka $F(\overline{U})$ kompak relatif. Berdasarkan Lemma 2.2, $\overline{co}\{F(\overline{U}) \cup \{p\}\}$ kompak. Karena $N(C)$ termuat di $\overline{co}\{F(\overline{U}) \cup \{p\}\}$, maka N pemetaan kompak. Berdasarkan Teorema 2.3, terdapat $y \in C$ dengan $y = N(y)$. Karena p di U yang terbuka, maka $y \in \overline{U}$. Oleh karena itu, $y = N(y) = \mu(y)F(y) + (1-p)\mu(y)$. Dengan kata lain, $y \in A$. Karena $\mu(A) = \{1\}$, maka $y = F(y)$. Jadi (A_1) berlaku. ■

Diberikan teorema titik tetap Monch.

Teorema 3.5 *Diketahui E ruang Banach, $C \subseteq E$ tertutup, konveks dan $U \subset C$ terbuka dengan $p \in U$. Jika pemetaan $F : \overline{U} \longrightarrow C$ kontinu, memenuhi kondisi*

Monch dan $u \neq \lambda F(u) + (1-\lambda)p$ *untuk setiap* $u \in \partial U$ *dan* $\lambda \in (0,1)$, *maka* F *mempunyai titik tetap di* $\overline{U}$.

Dengan menggunakan Teorema 2.5, diperoleh teorema titik untuk pemetaan *nonself* jumlah dua operator, yang satu operator kompak dan lainnya pemetaan *k-set* kontraksi berikut ini.

Teorema 3.6 *Diketahui E ruang Banach,* $C \subseteq E$ *tertutup, konvek,* $U \subset C$ *terbuka dengan* $p \in U$ *dan pemetaan* $F_1 : \overline{U} \longrightarrow C$ *kompak dan kontinu lengkap dan pemetaan* $F_2 : \overline{U} \longrightarrow C$ *k-set kontraksi* $(0 \leq k < 1)$ *dan kontinu. Jika* $F : \overline{U} \longrightarrow C$ *dengan* $F \coloneqq F_1 + F_2$ *dan* $F(\overline{U})$ *terbatas, maka salah satu pernyataan berikut berlaku.*

(A_1) *Pemetaan* F *mempunyai titik tetap di* $\overline{U}$, *atau*

(A_2) *Terdapat* $u \in \partial U$ *dan* $\lambda \in (0,1)$ *dengan* $u = \lambda F(u) + (1-\lambda)p$.

Bukti. Karena $F(\overline{U})$ terbatas, maka jika diambil sebarang $A \subseteq \overline{U}$ terbatas dengan $\alpha(A) > 0$, diperoleh $F(A)$ terbatas. Karena F_1 kompak dan kontinu lengkap, maka $\alpha\big(F_2(A)\big) = 0$. Karena F_2 *k-set* kontraksi $(0 \leq k < 1)$ dan kontinu, maka

$$\alpha\big(F(A)\big) = \alpha\big(F_1(A) + F_2(A)\big) \leq \alpha\big(F_1(A)\big) + \alpha\big(F_2(A)\big) = \alpha\big(F\ (A)\big) \leq k\alpha(\ A).$$

Jadi F pemetaan *k-set* kontraksi. Berdasarkan Teorema 2.5, terbukti salah satu pernyataan (A_1) atau (A_2) berlaku. ■

Untuk membuktikan teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself* kontraksi dengan berbagai kondisi titik batas, diperlukan teorema berikut.

Teorema 3.7 *Diberikan E ruang Banach,* $U \subset E$ *terbuka dengan* $0 \in U$. *Jika pemetaan* $F : \overline{U} \longrightarrow E$ *kontraksi dengan* $F(\overline{U})$ *terbatas, maka , maka salah satu pernyataan berikut berlaku.*

(A_1) *Pemetaan* F *mempunyai titik tetap di* $\overline{U}$, *atau*

(A_2) *Terdapat* $u \in \partial U$ *dan* $\lambda \in (0,1)$ *dengan* $u = \lambda F(u)$.

Teorema 3.8 *Diberikan E ruang Banach,* $U \subset E$ *terbuka dengan* $0 \in U$ *dan pemetaan* $F : \overline{U} \longrightarrow E$ *kontraksi dengan* $F(\overline{U})$ *terbatas. Jika untuk setiap* $x \in \partial U$ *memenuhi salah satu kondisi berikut ini :*

(i) $\|F(x)\| \leq \|x\|$,
(ii) $\|F(x)\| \leq \|x - F(x)\|$,
(iii) $\|F(x)\| \leq \{\|x\|^2 + \|x - F(x)\|^2\}^{\frac{1}{2}}$,
(iv) $\|F(x)\| \leq maks\{\|x\|, \|x - F(x)\|\}$,
Maka F *mempunyai titik tetap tunggal di* $\overline{U}$.

Bukti. Diandaikan pemetaan F tidak mempunyai titik tetap, maka menurut Teorema 3.7, maka terdapat $x \in \partial U$ *dan* $\lambda \in (0,1)$ dengan $x = \lambda F(x)$.

Diasumsikan setiap $x \in \partial U$ memenuhi (iii). Jika $F(x)= 0$, maka bukti trivial. Jika $F(x) \neq 0$, maka

$$\|F(x)\|^2=\|F(\lambda F(x))\|^2 \leq \|\lambda F(x)\|^2 + \|\lambda F(x) - F(\lambda F(x))\|^2=2(\lambda^2 -)\|F(x)\|^2$$

yang berakibat $\lambda \leq 0$ atau $\lambda \geq 1$, kontradiksi dengan $\lambda \in (0,1)$. Pengandaian salah, yang benar F mempunyai titik tetap di $\overline{U}$. Selanjutnya ditunjukkan ketunggalan titik tetap tersebut. Diandaikan terdapat $x, y \in \partial U$ dengan $x \neq y$, $x = F(x)$ dan $y = F(y)$, maka

$$0 < \|x - y\| = \|F(x) - F(Y)\| \leq L\|x - y\| < \|x - y\|$$

dengan $L < 1$ suatu konstanta, suatu kontradiksi. Jadi pengandaian salah, yang benar F memiliki titik tetap tunggal. Untuk kondisi lainnya, bukti sejalan. ■

Akibat 3.9 *Diberikan E ruang Banach,*$U \subset E$ *terbuka, terbatas dengan* $0 \in U$ *dan pemetaan* $F : \overline{U} \longrightarrow E$ *kontraksi. Jika untuk setiap* $x \in \partial U$ *memenuhi salah satu kondisi berikut ini :*

(i) $\|F(x)\| \leq \|x\|$,
(ii) $\|F(x)\| \leq \|x - F(x)\|$,
(iii) $\|F(x)\| \leq \{\|x\|^2 + \|x - F(x)\|^2\}^{\frac{1}{2}}$,
(iv) $\langle F(x), x\rangle \leq \|x\|^2$ *jika ada* $\langle .,. \rangle$ *inner product pada E,*
maka F mempunyai titik tetap tunggal di $\overline{U}$.

Bukti. Karena U terbatas dan F pemetaan kontraksi pada $\overline{U}$, maka $F(\overline{U})$ terbatas. Berdasarkan Teorema 2.8, F mempunyai titik tetap tunggal di $\overline{U}$. ■

4. Teorema Titik Tetap untuk Pemetaan *Nonself Nonexpansive*

Bagian ini dimulai dengan tiga lemma yang disajika sebagai berikut.

Lemma 4.1 *Diberikan E ruang Banach konveks seragam. Jika U tertutup di E, maka U tertutup lemah* (*weakly closed*) *di E.*

Lemma 4.2 *Setiap ruang Banach konveks seragam refleksif.*

Lemma 4.3 *Diberikan E ruang Banach konveks seragam dengan* $U \subseteq E$ *tertutup. Jika* $F\colon U \longrightarrow E$ *nonexpansive, maka* $I - F$ *pemetaan demiclosed dengan I pemetaan identitas pada U.*

Dengan menggunakan tiga lemma di atas, diperoleh teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself nonexpansive* berikut ini.

Teorema 4.4 *Diberikan E ruang Banach konveks seragam dan* $U \subset E$ *terbuka dengan* $0 \in U$. *Jika pemetaan* $F : \overline{U} \longrightarrow E$ *nonexpansive dengan* $F(\overline{U})$ *terbatas, maka salah satu pernyataan berikut ini benar.*

(A_1) *Pemetaan F mempunyai titik tetap di* $\overline{U}$, *atau*

(A_2) *Terdapat* $u \in \partial U$ *dan* $\lambda \in (0,1)$ *dengan* $u = \lambda F(u)$.

Bukti. Diasumsikan (A_2) tidak berlaku. Untuk setiap $n \in \{2,3,4,\ldots\}$ dibentuk $F_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)F$. Karena pemetaan $F : \bar{U} \longrightarrow E$ *nonexpansive*, maka pemetaan $F_n : \bar{U} \longrightarrow E$ kontraksi dengan konstanta kontraksi $1 - \frac{1}{n}$. Karena $F(\bar{U})$ terbatas, maka $F_n(\bar{U})$ terbatas. Berdasarkan Teorema 2.7, salah satu pernyataan berikut berlaku : pemetaan F_n mempunyai titik tetap di $\bar{U}$ atau terdapat $u \in \partial U$ dan $\lambda \in (0,1)$ dengan $u = \lambda F_n(u)$. Jika pernyataan kedua berlaku, maka

$$u = \lambda F_n(u) = \lambda\left(1 - \frac{1}{n}\right)F(u) = \lambda_1 F(u)$$

dengan $\lambda_1 = \lambda\left(1 - \frac{1}{n}\right) \in (0,1)$ dan $u \in \partial U$, kontradiksi dengan (A_2) tak berlaku. Oleh karena itu, untuk setiap $n \in \{2,3,4,\ldots\}$, terdapat $u_n \in U$ sehingga $u_n = F_n(u_n)$. Karena $F_n(\bar{U})$ terbatas, maka $\{F_n(u_n)\}$ terbatas. Oleh karena itu $\{u_n\}$ terbatas di U. Karena E ruang Banach konveks seragam, maka berdasarkan Lemma 4.2, E refleksif. Jadi, diperoleh barisan $\{u_n\}$ terbatas di E yang refleksif. Oleh karena itu, terdapat barisan bagian $\{u_{n_k}\}$ yang konvergen lemah, katakan ke suatu $u \in E$. Karena $\bar{U}$ tertutup di suatu ruang Banach konveks seragam, maka berdasarkan Lemma 4.1, $\bar{U}$ tertutup lemah dan oleh karena itu, $u \in \bar{U}$. Selanjutnya, karena $u_{n_k} = \left(1 - \frac{1}{n_k}\right)F\left(u_{n_k}\right)$ dan $F(\bar{U})$ terbatas, maka terdapat bilangan $M > 0$ sehingga

$$\left\|(I - F)\left(u_{n_k}\right)\right\| = \frac{1}{n_k}\left\|F\left(u_{n_k}\right)\right\| \leq \frac{M}{n_k} \longrightarrow 0 \text{ untuk } n_k \longrightarrow \infty.$$

Berdasarkan Lemma 4.3, $I - F$ *demiclosed*. Jadi diperoleh $(I - F)(u) = 0$ atau $F(u) = u$. Dengan kata lain, (A_1) berlaku. ■

Berdasarkan Teorema 3.4, diperoleh tiga akibat di bawah ini.

Akibat 4.5 *Diberikan E ruang Banach konveks seragam dan $U \subset E$ terbatas, terbuka dengan $0 \in U$. Jika pemetaan $F : \bar{U} \longrightarrow E$ nonexpansive, maka salah satu pernyataan berikut ini benar.*

(A_1) *Pemetaan F mempunyai titik tetap di $\bar{U}$ atau*

(A_2) *Terdapat $u \in \partial U$ dan $\lambda \in (0,1)$ dengan $u = \lambda F(u)$.*

Bukti. Karena U terbatas dan F pemetaan *non expansive* pada $\bar{U}$, maka $F(\bar{U})$ terbatas. Berdasarkan Teorema 3.4, salah satu dari (A_1) atau (A_2) berlaku. ■

Akibat 4.6 *Diberikan E ruang Banach konveks seragam, $U \subset E$ terbatas, terbuka dengan $0 \in U$ dan pemetaan $F : \bar{U} \longrightarrow E$ non expansive. Jika untuk setiap $x \in \partial U$ memenuhi salah satu kondisi berikut ini :*

(i) $\|F(x)\| \leq \|x\|$,
(ii) $\|F(x)\| \leq \|x - F(x)\|$,
(iii) $\|F(x)\| \leq \{\|x\|^2 + \|x - F(x)\|^2\}^{\frac{1}{2}}$,
(iv) $\langle F(x), x\rangle \leq \|x\|^2$ *jika ada $\langle .,. \rangle$ inner product pada E,*

maka F mempunyai titik tetap tunggal di $\overline{U}$.

Bukti. Berdasarkan bukti Akibat 3.5, $F(\overline{U})$ terbatas. Berdasarkan Teorema 3.4, jika diasumsikan F mempunyai titik tetap di $\overline{U}$, maka terdapat $u \in \partial U$ dan $\lambda \in (0,1)$ dengan $u = \lambda F(u)$. Selanjutnya, dengan cara yang sama dengan bukti Teorema 2.8, terbukti bahwa jika untuk setiap $x \in \partial U$ memenuhi salah satu kondisi (*i*), (*ii*), (*iii*) atau (*iv*), maka F mempunyai titik tetap tunggal di $\overline{U}$. ■

Akibat 4.7 *Diberikan H ruang Hilbert real, B_r bola terbuka dengan pusat 0 dan jari-jari $r > 0$ dan pemetaan $F : \overline{B_r} \longrightarrow E$ nonexpansive. Jika untuk setiap $x \in \partial U$ memenuhi salah satu kondisi berikut ini:*

(i) $\|F(x)\| \leq \|x\|$,
(ii) $\|F(x)\| \leq \|x - F(x)\|$,
(iii) $\|F(x)\| \leq \{\|x\|^2 + \|x - F(x)\|^2\}^{\frac{1}{2}}$,
(iv) $\langle F(x), x \rangle \leq \|x\|^2$,

maka F mempunyai titik tetap tunggal di $\overline{U}$.

Bukti : Ditunjukkan H ruang Banach konveks seragam. Diberikan sebarang $\varepsilon \in (0,2]$. Dipilih $\delta_\varepsilon > 0$ sehingga $\delta_\varepsilon \leq 1 - \frac{1}{2}\sqrt{4 - \varepsilon^2}$. Jelas bahwa $\delta_\varepsilon \in (0,1]$. Diambil sebarang $x, y \in H$ dengan $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$ dan $\|x - y\| \geq \varepsilon$, maka dengan aturan parallelogram diperoleh

$$\|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x - y\|^2 \leq 4 - \varepsilon^2 \leq 4(1 - \delta_\varepsilon)^2$$

yang berakibat $\frac{\|x+y\|}{2} \leq 1 - \delta_\varepsilon$. Jadi H ruang Banach konveks seragam. Berdasarkan Akibat 4.6, terbukti bahwa jika setiap $x \in \partial U$ memenuhi salah satu kondisi (*i*), (*ii*), (*iii*) atau(*iv*), maka F mempunyai titik tetap tunggal di $\overline{U}$. ■

KESIMPULAN

Berdasarkan pada pembahasan, Teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself condensing* diperoleh dengan menggunakan teorema titik tetap Sadovskii berikut ini.

Diketahui E ruang Banach dan $C \subseteq E$ dengan C tertutup, konveks dan $x_0 \in C$. Jika $F: C \to C$ pemetaan kontinu, condensing dan $F(C)$ terbatas di C, maka F mempunyai titik tetap di C.

Dengan menggunakan teorema titik tetap Sadovskii di atas diperoleh teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself condensing* berikut ini.

Diketahui E ruang Banach, $C \subseteq E$ dengan C tertutup, konveks, $U \subset C$ dengan U terbuka dan $p \in U$. Jika $F: \overline{U} \to C$ pemetaan condensing dan kontinu dengan $F(\overline{U})$ terbatas di C dan $F(x) = p$, untuk setiap $x \in \partial U$ maka F mempunyai suatu titik tetap di $\overline{U}$.

Dalam membuktikan teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself condensing* di atas, di konstruksi suatu pemetaan yang memenuhi asumsi-asumsi teorema titik tetap Sadovskii, yaitu pemetaan *self condensing* dan kontinu yaitu $N: C \to C$ dengan sifat $N(x) = F(x)$, untuk setiap $x \in \overline{U}$. Berdasarkan Teorema titik tetap Sadovskii dapat ditunjukkan F memiliki titik tetap di $\overline{U}$. Jadi teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself condensing* di atas lebih umum dari teorema titik tetap Sadovskii. Karena teorema titik tetap Sadovskii lebih umum dari teorema titik tetap Brouwer dan teorema titik tetap Schauder, maka teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself condensing* juga lebih umum dari teorema titik tetap Brouwer dan teorema titik tetap Schauder. Berikut ini theorema titik tetap untuk pemetaan kompak dan kontinu yang diberikan di dalam (O'Regan, Teorema 5.1 Hal. 48). Di dalam pembahasan, telah ditunjukkan bahwa syarat U terbatas dan konveks yang diberikan di dalam (O'Regan, Teorema 3.3, Hal 21) dapat diperlemah.

Peranan kekonvekan U pada teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself nonexpansive* di atas untuk menjamin $\overline{U}$ tertutup lemah karena setiap himpunan tertutup dan konveks di ruang Banach pasti tertutup lemah. Di dalam paper ini telah ditunjukkan bahwa setiap himpunan tertutup di ruang Banach konveks seragam pasti tertutup lemah. Oleh karena itu syarat kekonvekan U di dalam teorema titik tetap untuk pemetaan *nonself nonexpansive* di atas dapat dihilangkan. Selain itu telah dibuktikan bahwa U tidak perlu terbatas tetapi cukup $F(\overline{U})$ terbatas. Jadi syarat U terbatas dan konveks di dalam (O'Regan, 2001, Teorema 3.3, Hal. 21) dapat diperlemah dengan menggantinya di $F(\overline{U})$ terbatas.

Referensi

[1] Agarwal, R.P., Meehan, A.M., dan O'Regan, D., *Fixed Point Theory and Applications*, Cambridge University Press (2001).

[2] Cinlar, E. dan Vanderbei, R.J., *Mathematical Methods of Enginereeng Analysis*, Dover

Publication, Inc. New York (2000).

[2] Granas, A. dan Dugunji, J., *Fixed Point Theory*, Springer Monographs in Mathematics (2003).

[7] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applicaations,* John Wiley and Sons, Inc., Canada (1978).

[4] Sherbert R.D. dan Bartle G. R., *Introduction To Real Analysis*, John Wiley and Sons,

Inc., New York (2000).

[5] Singh,N., "*Some Fixed Point Theorems for Nonself Maps*", Int. Journal of Math. Analysis, Vol.1, 2007, no.28, 1389 – 1395.

[3] Thomson B., *Real Analysis*, Doc. Anon. Candra N, Prentice Hall (2007).