

Penerapan Teknik Serangga Steril Dengan Model Logistik

Dalam Pemberantasan Nyamuk *Aedes Aegypti*

Nida Sri Utami

Program Studi Pendidikan Matematika FKIP UMS

Lina Aryati

Jurusan Matematika FMIPA UGM

ABSTRAK

Pada makalah ini akan dibahas mengenai pemberantasan nyamuk *Aedes aegypti* menggunakan Teknik Serangga Steril dengan model logistik. Model ini mempunyai empat jenis titik ekuilibrium dan selanjutnya akan diselidiki kestabilannya. Populasi nyamuk *Aedes aegypti* tidak ada lagi di alam jika hasil kali laju pertemuan nyamuk betina dengan nyamuk jantan alami, laju bertelur, laju perkapita jumlah nyamuk yang tumbuh menjadi nyamuk betina, dan laju perkapita nyamuk steril yang dilepas di alam kurang dari hasil kali laju kematian perkapita nyamuk pada tahap sebelum dewasa, laju kematian perkapita nyamuk pada tahap betina dewasa dan laju kematian perkapita nyamuk betina subur, laju kematian perkapita nyamuk jantan steril.

Key words : *Aedes Aegypti, Steril Insect Technique, Logistic Model, stability.*

1. Pendahuluan

Di negara-negara tropis dan subtropis, penyakit demam berdarah {*dengue*} merupakan salah satu penyebab kematian penduduk. Penyebaran demam berdarah dengue (DBD) ini disebabkan oleh virus *dengue* dan ditularkan melalui gigitan nyamuk. Penyebab penularan (vektor) virus *dengue* dari penderita DBD ke manusia sehat berasal dari air liur nyamuk *Aedes Aegypti* betina pada saat menggigit. Penularan penyakit hanya ditularkan oleh nyamuk betina, karena hanya nyamuk betina yang menghisap darah. Sedangkan nyamuk *Aedes Aegypti* jantan mendapatkan energi dari nektar bunga atau tumbuhan. Nyamuk *Aedes Aegypti* betina menghisap darah untuk memperoleh asupan protein yang diperlukan untuk memproduksi telur. (Soegijanto, 2004)

Sampai saat ini ada beberapa cara yang dilakukan untuk mengendalikan populasi dan penyebaran vektor, yaitu menyebarkan musuh alamiahnya yang berupa larva nyamuk *Toxorhynchites*, menggunakan insektisida, dan menggunakan teknik serangga steril (*Steril Insect Technique*).

Pada makalah ini akan dibahas mengenai pemberantasan nyamuk *Aedes Aegypti* menggunakan SIT dengan model logistik. Yang dimaksud dengan SIT adalah dengan melepaskan serangga jantan steril ke alam, dalam hal ini adalah nyamuk *Aedes Aegypti*. Ketika nyamuk *Aedes Aegypti* jantan steril ini melakukan perkawinan dengan nyamuk *Aedes Aegypti* betina, maka akan menghasilkan telur yang tidak akan menetas. Akibatnya jumlah nyamuk alami di alam akan berkurang dan lama kelamaan akan punah. Model logistik adalah model yang mengasumsikan tingkat kenaikan jumlah populasi terbatas, yaitu tergantung pada kepadatan penduduk. Model logistik menggabungkan dua proses ekologi, yaitu reproduksi dan kompetisi.

Pada makalah ini, akan diberikan model pemberantasan nyamuk *Aedes Aegypti* menggunakan SIT dengan model logistik, dan kemudian akan dicari titik ekuilibrium dan jenis kestabilannya. Kemudian dilakukan identifikasi keberhasilan SIT untuk menanggulangi demam berdarah.

2. Landasan Teori

Berikut akan disajikan beberapa pengertian dasar untuk digunakan pada pembahasan berikutnya.

2.1. Nilai Eigen dan Sistem Persamaan Diferensial

Himpunan matriks-matriks berukuran n yang elemen-elemennya berupa bilangan real dinotasikan dengan $M_n(R)$. Berikut akan diberikan definisi nilai eigen suatu matriks, definisi titik ekuilibrium, dan kestabilan titik ekuilibrium.

Definisi 2.1. (Anton, H., 1994)

Vektor tak nol $x \in \mathbb{C}^n$ disebut vektor eigen (eigen vector) dari A jika $Ax = \lambda x$ untuk suatu skalar λ . Skalar λ disebut nilai eigen (eigen value) dari A dan x disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan λ .

Definisi 2.2. (Anton, H., 1994)

Polinomial karakteristik dari $A \in M_n(R)$ didefinisikan sebagai

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) \quad (2.1.1)$$

dengan λ suatu skalar.

Bentuk $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$ disebut persamaan karakteristik dari nilai eigen, dan λ merupakan akar karakteristik.

Pada bagian ini akan dibicarakan mengenai sistem persamaan diferensial.

Diberikan sistem persamaan diferensial biasa

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

dengan $f_i: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$, dan $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E \subset \mathbb{R}^n$. Kemudian diberikan kondisi awal Sistem (2.1.2) yaitu $x_i(t_0) = x_{i0}, i = 1, 2, \dots, n$.

Sistem (2.1.2) dapat ditulis sebagai,

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.1.3)$$

dengan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E \subset \mathbb{R}^n, f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in \mathbb{R}^n$ dan kondisi awal

$x(t_0) = x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \in E$. Selanjutnya notasi $x(t) = x(x_0, t)$ menyatakan solusi

Sistem (2.1.3) yang melalui x_0 .

Berikut diberikan definisi-definisi dan teorema yang menunjukkan eksistensi dan ketunggalan solusi Sistem (2.1.3).

Definisi 2.3. (Perko, 1991)

Diberikan $E \subset \mathbf{R}^n$, dengan E himpunan terbuka dan $f_i \in C^1(E)$. Vektor $\mathbf{x}(t)$ disebut solusi Sistem (2.1.3) pada interval I jika $\mathbf{x}(t)$ terdiferensial pada I dan $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ untuk setiap $t \in I$ dan $\mathbf{x}(t) \in E$.

Definisi 2.4. (Perko, 1991)

Diberikan fungsi $f: E \rightarrow \mathbf{R}^n$ terdiferensial pada E . Fungsi $f \in C^1(E)$ jika derivative $Df: E \rightarrow \mathbf{R}^n$ kontinu pada E .

Teorema 2.5. (Perko, 1991)

Diberikan $E \subset \mathbf{R}^n$, dengan E himpunan terbuka. Jika $f_i \in C^1(E)$, $i = 1, 2, \dots, n$ dan $x_0 \in E$, maka terdapat $a > 0$ sehingga masalah nilai awal $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ dengan $\mathbf{x}(0) = x_0$ mempunyai solusi tunggal $\mathbf{x}(t)$ pada interval $[-a, a]$.

Selanjutnya akan diberikan definisi titik ekuilibrium dan definisi kestabilan titik ekuilibrium Sistem (2.1.3).

Definisi 2.6. (Perko, 1991)

Titik $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n$ disebut titik ekuilibrium Sistem (2.1.3) jika $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = 0$.

Definisi 2.7. (Perko, 1991)

Diberikan $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n$ titik ekuilibrium Sistem (2.1.3).

i. Titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{x}}$ dikatakan stabil lokal jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, sedemikian sehingga untuk setiap solusi $\mathbf{x}(t)$ yang memenuhi $\|\mathbf{x}(t_0) - \hat{\mathbf{x}}\| < \delta$ berlaku $\|\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$, untuk setiap $t \geq t_0$.

ii. Suatu titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{x}}$ dikatakan tak stabil, jika titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{x}}$ tidak memenuhi (i)

iii. Titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{x}}$ dikatakan stabil asimtotik lokal, jika titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{x}}$ stabil dan jika terdapat $\delta_0 > 0$, sehingga untuk setiap solusi $\mathbf{x}(t)$ yang memenuhi $\|\mathbf{x}(t_0) - \hat{\mathbf{x}}\| < \delta_0$ berlaku

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}.$$

iv. Titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n$ dikatakan stabil asimtotik global jika untuk sebarang titik awal $\mathbf{x}(t_0)$ yang diberikan, setiap solusi Sistem (2.1.3), yaitu $\mathbf{x}(t)$ menuju titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{x}}$ untuk t membesar menuju tak hingga.

Pada bagian berikutnya akan dibicarakan mengenai kestabilan titik ekuilibrium sistem persamaan diferensial linier.

2.2. Kestabilan Titik Ekuilibrium Sistem Persamaan Diferensial Linier

Diberikan sistem linier dalam bentuk

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{2.2.1}$$

dengan $x \in E$, dan A matriks berukuran $n \times n$.

Berikut ini akan diberikan teorema untuk menentukan kestabilan titik ekuilibrium (2.2.1).

Teorema 2.8. (Perko, 1991)

Diberikan Sistem (2.2.1) dengan λ merupakan nilai eigen matriks A .

- i. Jika bagian real semua nilai eigen matriks A berharga non positif, maka titik ekuilibrium \hat{x} stabil.
- ii. Jika bagian real semua nilai eigen matriks A berharga negatif, maka titik ekuilibrium \hat{x} stabil asimtotik lokal.
- iii. Jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen matriks A yang bagian realnya positif, maka titik ekuilibrium \hat{x} tidak stabil.

Pada Subbab berikutnya akan dibicarakan tentang kestabilan titik ekuilibrium sistem persamaan diferensial nonlinier order 1 dengan koefisien konstan.

2.3. Kestabilan Titik Ekuilibrium Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier

Untuk sistem persamaan diferensial nonlinier, kestabilan titik ekuilibriumnya dapat dilihat dari kestabilan sistem linearisasinya jika titik ekuilibrium tersebut merupakan titik ekuilibrium hiperbolik. Berikut ini akan diberikan definisi pelinearan suatu sistem persamaan diferensial nonlinier.

Definisi 2.9.(Perko, 1991)

Diberikan $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ pada Sistem (2.3) dengan $f_i \in C^1(E)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Matriks

$$J(f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \tag{2.3.1}$$

dinamakan matriks Jacobian dari f di titik x .

Definisi 2.10. (Perko, 1991)

Diberikan \hat{x} titik ekuilibrium Sistem (2.1.3). Sistem Linear

$$\dot{x} = J(f(\hat{x}))x \tag{2.3.2}$$

Setelah proses linierisasi dilakukan pada Sistem (2.1.3), selanjutnya perilaku kestabilan di sekitar titik ekuilibrium ditentukan seperti pada sistem linier, asalkan titik ekuilibrium tersebut hiperbolik. Berikut diberikan definisi titik ekuilibrium hiperbolik dan teorema kestabilan lokal.

Definisi 2.11. (Perko, 1991)

Titik ekuilibrium \hat{x} disebut titik ekuilibrium hiperbolik Sistem (2.1.3) jika tidak ada nilai eigen dari $J(f(\hat{x}))$ yang mempunyai bagian real nol.

Teorema 2.12. (Perko, 1991)

Diberikan matriks Jacobian $J(f(\hat{x}))$ dari Sistem (2.1.3) dengan nilai eigen λ .

- Jika semua bagian real nilai eigen matriks Jacobian $J(f(\hat{x}))$ bernilai negatif, maka titik ekuilibrium \hat{x} dari Sistem (2.1.3) stabil asimtotik lokal.
- Jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen matriks Jacobian $J(f(\hat{x}))$ yang bagian realnya bernilai positif, maka titik ekuilibrium \hat{x} dari Sistem (2.1.3) tidak stabil.

Pada subbab berikutnya akan diberikan Teorema Lyapunov yang digunakan untuk menunjukkan kestabilan global titik ekuilibrium.

2.4. Himpunan Invariant dan Fungsi Liapunov

Berikut akan diberikan definisi himpunan Invariant dan definisi fungsi Lyapunov.

Definisi 2.13. (Verhulst, 1996)

Diberikan Sistem (2.1.3) dengan $E \subset \mathbb{R}^n$ dan $M \subset E$. Himpunan M disebut himpunan invariant terhadap Sistem (2.1.3), jika $x(t_0) = x_0 \in M$ maka $x(x_0, t) \in M$ untuk setiap $t \in \mathbb{R}$.

Definisi 2.14. (Luenberger, 1979)

Diberikan fungsi $V: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dan $\hat{x} \in E$ merupakan titik ekuilibrium Sistem (2.1.3). Fungsi V disebut fungsi Liapunov jika memenuhi ketiga pernyataan berikut:

- Fungsi V kontinu dan mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu pada E atau $V \in C^1(E)$,
- Fungsi $V(x) > 0$ untuk $x \in E$ dengan $x \neq \hat{x}$ dan $V(\hat{x}) = 0$ dengan $x = \hat{x}$,
- Fungsi $\dot{V}(x) \leq 0$, untuk setiap $x \in E$.

Berikut diberikan beberapa sifat yang akan digunakan untuk menganalisis kestabilan global titik ekuilibrium Sistem (2.1.3).

Teorema 2.15(Verhulst, 1996)

Diberikan Sistem (2.1.3) dengan $E \subset \mathbb{R}^n$. Jika terdapat fungsi Liapunov V yang memenuhi tiga syarat berikut

- $E_k = \{x \in E / V(x) \leq k\}$ untuk suatu $k > 0$, merupakan himpunan terbatas
- $\dot{V}(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in E_k$, dan
- Terdapat M himpunan invariant terbesar dalam $H = \{x \in E_k / \dot{V}(x) = 0\}$, dan untuk setiap t mendekati tak hingga solusi $x(t)$ mendekati M ,

maka M merupakan himpunan invariant terbesar dalam H , atau M merupakan gabungan semua himpunan-himpunan invariant dalam H .

Berikut akan diberikan teorema tentang kestabilan global titik ekuilibrium Sistem (2.1.3), yang merupakan akibat dari Teorema 2.17.

Akibat 2.16. (Verhulst, 1996)

Diberikan Sistem (2.1.3) dengan $E \subset \mathbb{R}^n$. Jika terdapat fungsi Liapunov V dengan

- $E_k = \{x \in E / V(x) \leq k\}$ untuk suatu $k > 0$, merupakan himpunan terbatas
- $\dot{V}(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in E_k$, dan
- $H = \{x \in E_k / \dot{V}(x) = 0\}$ tidak memuat solusi kecuali titik ekuilibrium $\hat{x} = 0$,

maka \hat{x} stabil asimtotik lokal. Selanjutnya jika E_k merupakan E , maka titik ekuilibrium tersebut stabil asimtotik global.

Pada subbab berikut akan dibicarakan mengenai cara alternatif untuk menentukan nilai eigen yang dikenal dengan kriteria Routh Hurwitz.

2.5. Kriteria Routh Hurwitz

Berdasarkan Teorema 2.13, kestabilan titik ekuilibrium Sistem (2.1.3) dapat ditinjau berdasarkan nilai eigen dari matrik Jacobiannya. Berikut akan diberikan Kriteria Routh Hurwitz cara untuk menentukan sifat kestabilan dari titik ekuilibrium.

Teorema 2.17.

Jika pembuat nol pada

$$P(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n \quad (2.5.1)$$

mempunyai bagian real yang negatif, maka

$$\frac{p_1}{p_0} > 0, \frac{p_2}{p_0} > 0, \dots, \frac{p_n}{p_0} > 0. \quad (2.5.2)$$

Selanjutnya tanpa mengurangi keumuman diambil p_0 positif sehingga seluruh koefisien dari polinomial (2.5.1) bertanda sama, sehingga dapat dibentuk

$$\begin{aligned} c_{10} &= p_0, c_{20} = p_2, c_{30} = p_4, c_{40} = p_6 \\ c_{11} &= p_1, c_{21} = p_3, c_{31} = p_5, c_{41} = p_7 \\ r_2 &= \frac{p_0}{p_1} \left| c_{12} = p_2 - r_2 p_3, c_{22} = p_4 - r_2 p_5, c_{32} = p_6 - r_2 p_7 \right. \\ &\dots \\ r_2 &= \frac{c_{1,j-2}}{c_{1,j-1}} \left| c_{ij} = c_{i+1,j-2} - r_j c_{i+1,j-1}, \begin{matrix} i=1,2,\dots \\ j=2,3,\dots \end{matrix} \right. \\ &\dots \\ c_{1n} &= p_n. \end{aligned}$$

Jika $n = 2m$, maka $c_{m+1,0} = c_{m+1,2} = p_n, c_{m+1,1} = c_{m+1,3} = 0$.

Jika $n = 2m - 1$, maka $c_{m,0} = p_{n-1}, c_{m1} = p_n, c_{m2} = c_{m3} = 0$.

Teorema 2.18.

Pembuat nol dari Polinomial (2.5.1) mempunyai bagian real yang negatif jika dan hanya jika dipenuhi pertidaksamaan (2.5.2) dan

$$c_{11} > 0, c_{12} > 0, \dots, c_{1n} > 0. \quad (2.5.3)$$

Selanjutnya dibentuk matriks dengan entri-entrinya merupakan koefisien dari Polinomial (2.4.1) sebagai berikut

$$H = \begin{bmatrix} p_1 & p_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & \dots & 0 & 0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & p_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_n \end{bmatrix} \quad (2.5.4)$$

Matriks (2.5.4) disebut Matriks Hurwitz. Determinan matriks Hurwitz tingkat k dinotasikan dengan Δ_k yang didefinisikan sebagai

$$\Delta_1 = p_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} p_1 & p_0 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} p_1 & p_0 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 \\ p_5 & p_4 & p_3 \end{vmatrix}, \Delta_4 = \begin{vmatrix} p_1 & p_0 & 0 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & p_0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 \\ p_7 & p_6 & p_5 & p_4 \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{bmatrix} p_1 & p_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & \dots & 0 & 0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & p_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_n \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.19. (Hahn, 1967).

Pembuat nol polinomial (2.5.1) mempunyai bagian real yang negatif jika dan hanya jika dipenuhi pertidaksamaan (2.5.2) dan

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0. \quad (2.5.5)$$

Akibatnya pembuat nol dari polinomial berderajat $n = 2,3,4$ mempunyai bagian real yang negatif jika dipenuhi

- i. untuk $n = 2, p_1 > 0$ dan $p_2 > 0$
- ii. untuk $n = 3, p_1 > 0, p_3 > 0$ dan $p_1 p_2 > p_3$
- iii. untuk $n = 4, p_1 > 0, p_3 > 0, p_4 > 0$ dan $p_1 p_2 p_3 > p_3^2 + p_1^2 p_4$.

Pada subbab berikut akan dibicarakan mengenai Bifurkasi.

2.6. Bifurkasi

Di dalam teori bifurkasi dibicarakan mengenai perubahan struktur orbit dari sistem persamaan diferensial seiring dengan perubahan nilai parameter.

Diberikan persamaan sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x, \mu), x \in R^n, \mu \in R^m \quad (2.6.1)$$

dengan μ suatu parameter.

Definisi 2.20. (Verhulst, 1996)

Nilai parameter $\mu = \mu_0$ disebut nilai bifurkasi jika terdapat solusi non trivial Sistem (2.6.1) yang terdefinisi dalam persekitaran $(x_0, \mu_0) \in R^n \times R^m$.

Contoh 2.21.

Diberikan sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \mu) = \mu - x^2 \\ \dot{\mu} &= 0, \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

dengan $x \in R, \mu \in R$. Jika $f(x, \mu) = 0$, maka diperoleh titik ekuilibrium

$$\mu - x^2 = 0 \leftrightarrow x = \pm\sqrt{\mu}.$$

Untuk $\mu < 0$, tidak mempunyai nilai ekuilibrium, karena $x = \pm\sqrt{\mu}$.

Untuk $\mu = 0$, titik ekuilibrium, karena $x = 0$.

Untuk $\mu > 0$, terdapat 2 titik ekuilibrium yang satu stabil, dan titik ekuilibrium yang satu tidak stabil.

Jadi, $(x, \mu) = (0,0)$ merupakan titik bifurkasi dan $\mu = 0$ merupakan nilai bifurkasi. Bifurkasi pada contoh ini disebut sebagai bifurkasi *Saddle Node*.

3. Analisis Model Teknik Serangga Steril Dengan Model Logistik

Dalam model pengendalian nyamuk demam berdarah menggunakan teknik serangga steril dengan model logistik, populasi *Aedes aegypti* dibagi menjadi 6 kelas, yaitu :

- i. kelas populasi *Aedes aegypti* sebelum dewasa (A),
- ii. kelas populasi *Aedes aegypti* betina sebelum kawin (I),
- iii. kelas populasi *Aedes aegypti* betina subur dan telah kawin (F),
- iv. kelas populasi *Aedes aegypti* betina tidak subur dan telah kawin (U),
- v. kelas populasi *Aedes aegypti* jantan yang ada di alam (M),
- vi. kelas populasi *Aedes aegypti* jantan steril yang dilepas pada ekosistem *Aedes aegypti* (M_T).

Jika nyamuk jantan steril melakukan perkawinan dengan nyamuk betina yang subur maupun nyamuk betina yang tidak subur, maka tidak akan menghasilkan telur yang menetas. Dengan kata lain tidak akan dihasilkan keturunan baru. Jika nyamuk betina subur melakukan perkawinan dengan nyamuk jantan yang subur, maka akan dihasilkan telur yang nantinya akan menetas menjadi nyamuk, dan akan masuk ke kelas A .

Berikut akan diberikan beberapa asumsi:

- i. Diasumsikan laju bertelur nyamuk betina yang diletakkan di tempat perindukan sebanding dengan kepadatannya dan juga tergantung ketersediaan tempat untuk membuat koloni telur.
- ii. Diasumsikan probabilitas pertemuan nyamuk jantan steril dengan betina tidak hanya bergantung pada jumlah nyamuk jantan steril yang dilepas tetapi juga seberapa jauh nyamuk jantan tersebut dilepaskan dari koloni telur nyamuk alami.
- iii. Diasumsikan bahwa tingkat pertumbuhan nyamuk jantan steril diatur oleh tingkat kapasitas, yaitu kapasitas batas untuk memproduksi dan mengembangkan nyamuk jantan steril. Selain diatur oleh tingkat kapasitas, diasumsikan area dan fasilitas hidup nyamuk jantan steril terbatas.

Berikut akan diberikan beberapa parameter yang nantinya akan digunakan pada pembentukan model. Beberapa parameter tersebut adalah :

- i. Parameter C menyatakan koloni telur maksimal yang dapat ditampung dengan mengingat ketersediaan tempat serta nutrisi sebagai sumber makanan.
- ii. Parameter ϕ menyatakan laju bertelur, akibatnya laju per kapita banyaknya telur yang diletakkan pada koloni telur diberikan $\phi \left(1 - \frac{A}{C}\right)$.
- iii. Parameter γ menyatakan laju perkapita jumlah nyamuk yang melalui tahap transisi yaitu tahap sebelum dewasa menjadi dewasa.
- iv. Parameter r menyatakan proporsi tahap sebelum dewasa menjadi nyamuk betina, akibatnya proporsi tahap sebelum dewasa menjadi nyamuk jantan sebesar $1 - r$.
- v. Jika β menyatakan laju pertemuan nyamuk betina dengan nyamuk jantan alami, dan probabilitas pertemuan nyamuk betina dengan nyamuk jantan alami adalah $\frac{M}{M+M_T}$, maka laju perkapita pertemuan nyamuk betina subur dengan nyamuk jantan alami sebesar $\frac{\beta M}{M+M_T}$.
- vi. Jika parameter p dengan $0 \leq p \leq 1$ merupakan proporsi nyamuk jantan steril yang dilepaskan di sekitar koloni telur, maka probabilitas pertemuan nyamuk jantan steril dengan nyamuk betina sebesar $\frac{pM_T}{M+M_T}$.
- vii. Laju pertemuan nyamuk betina dengan nyamuk jantan steril dinyatakan dengan $q\beta$, dimana $0 \leq q \leq 1$, dan $\beta_T = pq\beta$ merupakan laju pertemuan nyamuk betina subur dengan nyamuk jantan steril. Akibatnya laju perkapita pertemuan nyamuk betina subur dengan nyamuk jantan steril sebesar $\frac{\beta_T M_T}{M+M_T}$.
- viii. Laju pertumbuhan nyamuk steril yang dilepas di alam dinyatakan dengan $\alpha M_T \left(1 - \frac{M_T}{K}\right)$, dengan K kapasitas batas (*carrying capacity*) produksi nyamuk jantan steril. Sedangkan $\alpha \left(1 - \frac{M_T}{K}\right)$ merupakan laju perkapita nyamuk steril yang dilepas di alam, dan α merupakan nilai intrinsik laju pertumbuhan nyamuk, yaitu jumlah kelahiran per individu per satuan waktu.
- ix. Parameter μ_A menyatakan laju kematian perkapita nyamuk sebelum tahap dewasa,
parameter μ_I menyatakan laju kematian perkapita nyamuk betina pada tahap dewasa sebelum kawin,
parameter μ_F menyatakan laju kematian perkapita nyamuk betina pada tahap dewasa yang telah kawin dan subur,
parameter μ_U menyatakan laju kematian perkapita nyamuk betina pada tahap dewasa yang telah kawin dan tidak subur,
parameter μ_M menyatakan laju kematian perkapita nyamuk jantan,
parameter μ_T menyatakan laju kematian perkapita nyamuk jantan steril.

Semua parameter tersebut bernilai positif.

Berikut akan diberikan beberapa variabel yang nantinya akan digunakan dalam pembentukan model. Beberapa variabel tersebut adalah:

$A(t)$: menyatakan jumlah populasi nyamuk pada tahap sebelum dewasa dalam waktu t ,

$I(t)$: menyatakan jumlah populasi nyamuk betina pada tahap dewasa sebelum kawin dalam

waktu t ,

$F(t)$: menyatakan jumlah populasi nyamuk betina pada tahap dewasa yang telah kawin dan subur dalam waktu t ,

$U(t)$: menyatakan jumlah populasi nyamuk betina pada tahap dewasa yang telah kawin dan tidak subur dalam waktu t ,

$M(t)$: menyatakan jumlah populasi nyamuk jantan dalam waktu t ,

$M_T(t)$: menyatakan jumlah populasi nyamuk steril yang dilepas di alam dalam waktu t .

Dari beberapa asumsi tersebut, model pemberantasan nyamuk *Aedes aegypti* menggunakan SIT dengan model logistik dapat diilustrasikan seperti pada diagram transfer berikut.

Selanjutnya dapat diformulasikan model matematika untuk pemberantasan *Aedes Aegypti* menggunakan SIT sebagai berikut

$$\frac{dA}{dt} = \phi \left(1 - \frac{A}{C}\right) F - (\mu_A + \gamma)A, \quad (3.1a)$$

$$\frac{dI}{dt} = r\gamma A - \frac{\beta MI}{M + M_T} - \frac{\beta_T M_T I}{M + M_T} - \mu_I I, \quad (3.1b)$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\beta MI}{M + M_T} - \mu_F F, \quad (3.1c)$$

$$\frac{dM}{dt} = (1 - r)\gamma A - \mu_M M, \quad (3.1d)$$

$$\frac{dM_T}{dt} = \alpha M_T \left(1 - \frac{M_T}{K}\right) - \mu_T M_T, \quad (3.1e)$$

dan untuk perkawinan nyamuk jantan dengan nyamuk betina yang tidak subur diperoleh

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\beta_T M_T I}{M + M_T} - \mu_U U. \quad (3.2)$$

Pada subbab berikutnya akan dibicarakan mengenai titik ekuilibrium.

3.5. Titik Ekuilibrium

Akan diberikan lemma yang nantinya digunakan untuk mencari titik ekuilibrium pada Sistem (3.1a) sampai dengan (3.1e).

1. Untuk $\hat{M}_T = 0$.

Untuk $\hat{A} = 0$, dapat diperoleh

$$\hat{I} = \frac{r\gamma\hat{A} \left(\hat{M} + \frac{K}{\alpha} (\alpha - \mu_T) \right)}{\left((\mu_I + \beta)\hat{M} + (\beta_T + \mu_I) \frac{K}{\alpha} (\alpha - \mu_T) \right)} = 0, \hat{F} = \frac{(\gamma + \mu_A)C\hat{A}}{\phi(C - \hat{A})} = 0, \hat{M} = \frac{(1 - r)\gamma\hat{A}}{\mu_M} = 0$$

$$\hat{U} = \frac{\beta_T \hat{M}_T \bar{I}}{\mu_U (\hat{M} + \hat{M}_T)} = 0.$$

Dapat diperoleh titik ekuilibrium $E_0 = (0,0,0,0)$, dan $\bar{U} = 0$.

Untuk titik ekuilibrium E_0 , nyamuk jantan alami maupun nyamuk jantan steril tidak ada di alam.

2. Untuk $\hat{M}_T = 0$, diperoleh $\hat{A} = \frac{C(N-1)}{N}$, dengan

$$N = \frac{\beta r \gamma \phi}{(\mu_A + \gamma)(\mu_I + \beta) \mu_F}.$$

Selanjutnya diperoleh

$$\hat{I} = \frac{r\gamma}{(\mu_I + \beta)} \hat{A}, \quad \hat{F} = \frac{(\gamma + \mu_A)C}{\phi(C - \hat{A})} \hat{A}, \quad \hat{M} = \frac{(1-r)\gamma}{\mu_M} \hat{A}, \quad \hat{U} = \frac{\beta_T M_T I}{\mu_U (M + M_T)} = 0.$$

Jadi jika $N > 1$, dan $r < 1$ diperoleh titik ekuilibrium

$$E_1 = \left(\hat{A}, \frac{r\gamma}{(\mu_I + \beta)} \hat{A}, \frac{(\gamma + \mu_A)C}{\phi(C - \hat{A})} \hat{A}, \frac{(1-r)\gamma}{\mu_M} \hat{A}, 0 \right) \text{ dan } \bar{U} = 0,$$

dengan

$$\hat{A} = \frac{C(N-1)}{N}.$$

Untuk titik ekuilibrium E_1 hanya ada nyamuk jantan alami yang ada di alam.

3. Untuk $\hat{M}_T = \frac{K(\alpha - \mu_T)}{\alpha}$.

Untuk $\hat{A} = 0$, dapat diperoleh

$$\hat{I} = \frac{r\gamma \hat{A} \left(\hat{M} + \frac{K}{\alpha} (\alpha - \mu_T) \right)}{\left((\mu_I + \beta) \hat{M} + (\beta_T + \mu_I) \frac{K}{\alpha} (\alpha - \mu_T) \right)} = 0, \quad \hat{F} = \frac{(\gamma + \mu_A)C \hat{A}}{\phi(C - \hat{A})} = 0,$$

$$\hat{M} = \frac{(1-r)\gamma \hat{A}}{\mu_M} = 0, \quad \hat{U} = 0.$$

Jadi jika $\alpha > \mu_T$ diperoleh titik ekuilibrium $E_2 = \left(0,0,0,0, \frac{K(\alpha - \mu_T)}{\alpha} \right)$ dan $\bar{U} = 0$.

Untuk titik ekuilibrium E_2 hanya ada nyamuk jantan steril di alam.

4. Untuk $\hat{M}_T = \frac{K(\alpha - \mu_T)}{\alpha}$, diperoleh

$$\hat{A}_+ = \frac{(N-1)C}{2N} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4NH}{(N-1)^2}} \right].$$

Dapat diperoleh

$$\hat{I}_+ = \frac{r\gamma \hat{A}_+ \left(M + \frac{K}{\alpha} (\alpha - \mu_T) \right)}{\left((\mu_I + \beta)M + (\beta_T + \mu_I) \frac{K}{\alpha} (\alpha - \mu_T) \right)}, \quad \hat{F}_+ = \frac{(\gamma + \mu_A)C \hat{A}_+}{\phi(C - \hat{A}_+)}, \quad \hat{M}_+ = \frac{(1-r)\gamma \hat{A}_+}{\mu_M}$$

$$\hat{U}_+ = \frac{\beta_T \hat{M}_T \frac{r\gamma \hat{A}_+ [(1-r)\gamma \hat{A}_+ + \mu_M \hat{M}_T]}{(\mu_I + \beta)(1-r)\gamma \hat{A}_+ + (\mu_1 + \beta_T)\mu_M \hat{M}_T}}{\mu_U \left(\frac{(1-r)\gamma}{\mu_M} \hat{A}_+ + \hat{M}_T \right)}.$$

Jadi jika $\mu_T > \mu_T$, dan $r < 1$ diperoleh titik ekuilibrium

$$E_{3+} = \left(\hat{A}_+, \frac{r\gamma \hat{A}_+ [(1-r)\gamma \hat{A}_+ + \mu_M \hat{M}_T]}{(\mu_I + \beta)(1-r)\gamma \hat{A}_+ + (\mu_1 + \beta_T)\mu_M \hat{M}_T}, \frac{(\gamma + \mu_A)C}{\phi(C - \hat{A}_+)} \hat{A}_+, \frac{(1-r)\gamma}{\mu_M} \hat{A}_+, \hat{M}_T \right),$$

$$\text{dan } \hat{U}_+ = \frac{\beta_T \hat{M}_T \frac{r\gamma \hat{A}_+ [(1-r)\gamma \hat{A}_+ + \mu_M \hat{M}_T]}{(\mu_I + \beta)(1-r)\gamma \hat{A}_+ + (\mu_1 + \beta_T)\mu_M \hat{M}_T}}{\mu_U \left(\frac{(1-r)\gamma}{\mu_M} \hat{A}_+ + \hat{M}_T \right)}.$$

Titik ekuilibrium E_{3+} berarti di alam terdapat nyamuk jantan steril dan juga terdapat nyamuk jantan alami.

5. Untuk $\hat{M}_T = \frac{K(\alpha - \mu_T)}{\alpha}$, diperoleh

$$\hat{A}_- = \frac{(N-1)C}{2N} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4NH}{(N-1)^2}} \right].$$

Dapat diperoleh

$$\hat{I}_- = \frac{r\gamma \hat{A}_- \left(M + \frac{K}{\alpha} (\alpha - \mu_T) \right)}{\left((\mu_I + \beta)M + (\beta_T + \mu_I) \frac{K}{\alpha} (\alpha - \mu_T) \right)}, \quad \hat{F}_- = \frac{(\gamma + \mu_A)C \hat{A}_-}{\phi(C - \hat{A}_-)}, \quad \hat{M}_- = \frac{(1-r)\gamma \hat{A}_-}{\mu_M},$$

$$\hat{U}_- = \frac{\beta_T \hat{M}_T \frac{r\gamma \hat{A}_- [(1-r)\gamma \hat{A}_- + \mu_M \hat{M}_T]}{(\mu_I + \beta)(1-r)\gamma \hat{A}_- + (\mu_1 + \beta_T)\mu_M \hat{M}_T}}{\mu_U \left(\frac{(1-r)\gamma}{\mu_M} \hat{A}_- + \hat{M}_T \right)}.$$

Jadi diperoleh titik ekuilibrium

$$E_{3-} = \left(\hat{A}_-, \frac{r\gamma \hat{A}_- [(1-r)\gamma \hat{A}_- + \mu_M \hat{M}_T]}{(\mu_I + \beta)(1-r)\gamma \hat{A}_- + (\mu_1 + \beta_T)\mu_M \hat{M}_T}, \frac{(\gamma + \mu_A)C}{\phi(C - \hat{A}_-)} \hat{A}_-, \frac{(1-r)\gamma}{\mu_M} \hat{A}_-, \hat{M}_T \right),$$

$$\text{dan } \hat{U}_- = \frac{\beta_T \hat{M}_T \frac{r\gamma \hat{A}_- [(1-r)\gamma \hat{A}_- + \mu_M \hat{M}_T]}{(\mu_I + \beta)(1-r)\gamma \hat{A}_- + (\mu_1 + \beta_T)\mu_M \hat{M}_T}}{\mu_U \left(\frac{(1-r)\gamma}{\mu_M} \hat{A}_- + \hat{M}_T \right)}.$$

Titik ekuilibrium E_{3-} berarti di alam terdapat nyamuk jantan steril dan juga terdapat nyamuk jantan alami.

6. Untuk $\hat{M}_T = \frac{K(\alpha - \mu_T)}{\alpha}$. Dari (ii. b. 2) diperoleh $\hat{A} = \frac{(N^* - 1)C}{2N^*}$,

$$\text{dengan } N^* = (1 + 2H) \left[1 + \sqrt{1 - \frac{1}{(1 + 2H)^2}} \right].$$

Selanjutnya diperoleh

$$\hat{I} = \frac{r\gamma}{(\mu_I + \beta)} \hat{A}, \quad \hat{F} = \frac{(\gamma + \mu_A)C}{\phi(C - \hat{A})} \hat{A}, \quad \hat{M} = \frac{(1-r)\gamma}{\mu_M} \hat{A}, \text{ dan } \hat{U} = \frac{\beta_T M_T I}{\mu_U (M + M_T)} = 0.$$

Jadi diperoleh titik ekuilibrium

$$E_3 = \left(\hat{A}, \frac{r\gamma}{(\mu_I + \beta)} \hat{A}, \frac{(\gamma + \mu_A)C}{\phi(C - \hat{A})} \hat{A}, \frac{(1-r)\gamma}{\mu_M} \hat{A}, \hat{M}_T \right) \text{ dan } \hat{U} = 0,$$

dengan syarat $N^* > 1$.

Untuk titik ekuilibrium E_3 terdapat nyamuk jantan alami dan juga nyamuk jantan steril yang ada di alam .

3.6. Kestabilan Titik Ekuilibrium

Akan dicari kestabilan dari titik-titik ekuilibrium dengan terlebih dahulu akan diberikan beberapa lemma dan teorema yang diperlukan.

Lemma 3.4.

Diberikan fungsi $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ dari Sistem (3.4.1a) sampai dengan (3.4.1e) dengan

$$\begin{aligned} f_1 &= \phi \left(1 - \frac{A}{C} \right) F - (\mu_A + \gamma)A, \\ f_2 &= r\gamma A - \frac{\beta MI}{M + M_T} - \frac{\beta_T M_T I}{M + M_T} - \mu_I I, \\ f_3 &= \frac{\beta MI}{M + M_T} - \mu_F F, \\ f_4 &= (1-r)\gamma A - \mu_M M, \\ f_5 &= \alpha M_T \left(1 - \frac{M_T}{K} \right) - \mu_T M_T. \end{aligned}$$

Diperoleh matriks Jacobian fungsi f di titik $x = (A, I, F, M, M_T)$, adalah

$$J(f(x)) = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & j_{14} & j_{15} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & j_{24} & j_{25} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} & j_{34} & j_{35} \\ j_{41} & j_{42} & j_{43} & j_{44} & j_{45} \\ j_{51} & j_{52} & j_{53} & j_{54} & j_{55} \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

dengan

$$\begin{aligned} j_{11} &= -\frac{\phi}{C} F - (\gamma + \mu_A), \quad j_{12} = 0, \quad j_{13} = \phi \left(1 - \frac{A}{C} \right), \quad j_{14} = 0, \quad j_{15} = 0, \\ j_{21} &= r\gamma, \quad j_{22} = -\mu_I - \frac{\beta M + \beta_T M_T}{M + M_T}, \quad j_{23} = 0, \quad j_{24} = \frac{(\beta_T - \beta) M_T I}{(M + M_T)^2}, \\ j_{25} &= \frac{(\beta - \beta_T) M I}{(M + M_T)^2}, \end{aligned}$$

$$j_{31} = 0, \quad j_{32} = \frac{\beta M}{M + M_T}, \quad j_{33} = -\mu_F, \quad j_{34} = \frac{\beta M_T I}{(M + M_T)^2}, \quad j_{35} = -\frac{\beta M I}{(M + M_T)^2}$$

$$j_{41} = (1 - r)\gamma, \quad j_{42} = 0, \quad j_{43} = 0, \quad j_{44} = -\mu_M, \quad j_{45} = 0,$$

$$j_{51} = 0, \quad j_{52} = 0, \quad j_{53} = 0, \quad j_{54} = 0, \quad j_{55} = -\frac{2\alpha M_T}{K} + \alpha - \mu_T.$$

3.6.1. Kestabilan Titik Ekuilibrium E_0 .

Akan dicari kestabilan titik Ekuilibrium E_0 berdasarkan nilai α, μ_T , dan N .

Teorema 3.5.

Diberikan titik ekuilibrium $E_0 = (0,0,0,0,0)$.

- i. Jika $\alpha < \mu_T$ dan $N \leq 1$, maka titik ekuilibrium E_0 stabil asimtotik global,
- ii. Jika $\alpha < \mu_T$ dan $N > 1$, maka titik ekuilibrium E_0 tidak stabil.

Titik ekuilibrium E_0 stabil asimtotik global untuk $N > 1$, artinya jika pada awalnya populasi nyamuk *Aedes aegypti* sangat sedikit, maka dengan bertambahnya waktu populasi nyamuk *Aedes aegypti* akan punah. Untuk $\alpha < \mu_T$ dan $N > 1$, titik ekuilibrium E_0 tidak stabil, artinya jika pada awalnya populasi nyamuk *Aedes aegypti* sangat sedikit, maka dengan bertambahnya waktu populasi nyamuk *Aedes aegypti* akan bertambah.

3.6.2. Kestabilan titik ekuilibrium E_1

Akan dicari kestabilan titik ekuilibrium E_1 berdasarkan nilai α, μ_T , dan N .

Teorema 3.6.

Diberikan titik ekuilibrium

$$E_1 = \left(\hat{A}, \frac{r\gamma}{\beta + \mu_1} \hat{A}, \frac{(\gamma + \mu_A)C}{\phi(C - \hat{A})} \hat{A}, \frac{(1-r)\gamma}{\mu_M} \hat{A}, 0 \right).$$

- i. Jika $\alpha < \mu_T$, $r < 1$ dan $N > 1$, maka titik ekuilibrium E_1 stabil asimtotik lokal.
- ii. Jika $\alpha \geq \mu_T$, $r < 1$ dan $N > 1$, maka titik ekuilibrium E_1 tidak stabil.

Titik ekuilibrium E_1 stabil untuk $\alpha < \mu_T$ dan $N > 1$, artinya adalah jika pada awalnya populasi nyamuk *Aedes aegypti* sebelum dewasa dekat dengan \hat{A}_1 , jumlah populasi nyamuk *Aedes aegypti* betina pada tahap dewasa dekat dengan \hat{I}_1 , jumlah populasi nyamuk *Aedes aegypti* betina subur dekat dengan \hat{F}_1 , jumlah populasi nyamuk *Aedes aegypti* jantan alami dekat dengan \hat{M}_1 , dan jumlah populasi nyamuk *Aedes aegypti* jantan steril sangat sedikit, maka dengan bertambahnya waktu, jumlah populasi nyamuk *Aedes aegypti* pada setiap kelas selain nyamuk jantan steril menuju pada jumlah populasi awal, dan populasi nyamuk *Aedes aegypti* jantan steril akan punah.

Titik ekuilibrium E_1 tidak stabil untuk $\alpha > \mu_T$ artinya adalah jika pada awalnya populasi nyamuk *Aedes aegypti* sebelum dewasa dekat dengan \hat{A}_1 , populasi nyamuk *Aedes aegypti* betina pada tahap dewasa dekat dengan \hat{I}_1 , populasi nyamuk *Aedes aegypti* betina subur dekat dengan \hat{F}_1 , populasi nyamuk *Aedes aegypti* jantan alami dekat dengan \hat{M}_1 , dan populasi nyamuk *Aedes aegypti* jantan steril sangat sedikit, maka dengan bertambahnya waktu, jumlah populasi nyamuk *Aedes aegypti* pada setiap kelas menjauhi jumlah populasi awal.

3.6.3. Kestabilan Titik Ekuilibrium E_2

Akan dicari kestabilan titik Ekuilibrium E_2 berdasarkan nilai α, μ_T , dan N .

Teorema 3.7.

Diberikan titik ekuilibrium

$$E_2 = \left(0, 0, 0, 0, \frac{(\alpha - \mu_T)K}{\alpha} \right).$$

Jika $\alpha > \mu_T$, maka titik ekuilibrium E_2 stabil asimtotik lokal.

Titik ekuilibrium E_2 stabil asimtotik lokal artinya adalah jika pada awalnya jumlah populasi nyamuk *Aedes aegypti* selain nyamuk jantan steril sangat sedikit, dan jumlah populasi nyamuk *Aedes aegypti* jantan steril dekat dengan $\frac{K(\alpha - \mu_T)}{\alpha}$, maka dengan bertambahnya waktu jumlah populasi nyamuk *Aedes aegypti* selain nyamuk jantan steril akan punah, dan jumlah populasi nyamuk *Aedes aegypti* jantan steril akan menuju $\frac{K(\alpha - \mu_T)}{\alpha}$.

3.6.4. Kestabilan di titik non trivial E_{3+} dan E_{3-}

Akan digunakan beberapa identitas untuk menentukan kestabilan di titik ekuilibrium E_{3+} dan E_{3-} .

Teorema 3.8.

Jika $N > 1$ dan $\frac{(N - 1)^2}{4NH} > 1$, maka E_{3+} stabil asimtotik lokal

dan E_{3-} tidak stabil.

Titik ekuilibrium $E_{3-} = \left(\hat{A}_{3-}, \hat{I}_{3-}, \hat{F}_{3-}, \hat{M}_{3-}, \frac{K(\alpha - \mu_T)}{\alpha} \right)$ tidak stabil artinya adalah jika pada awalnya populasi nyamuk *Aedes aegypti* sebelum dewasa dekat dengan \hat{A}_{3-} , populasi nyamuk *Aedes aegypti* betina pada tahap dewasa dekat dengan \hat{I}_{3-} , populasi nyamuk *Aedes aegypti* betina subur dekat dengan \hat{F}_{3-} , populasi nyamuk *Aedes aegypti* jantan alami dekat dengan \hat{M}_{3-} , dan populasi nyamuk *Aedes aegypti* jantan steril dekat dengan $\frac{K(\alpha - \mu_T)}{\alpha}$, maka dengan bertambahnya waktu, populasi nyamuk *Aedes aegypti* pada masing-masing kelas jumlahnya menjauhi populasi awal

Titik ekuilibrium $E_{3+} = \left(\hat{A}_{3+}, \hat{I}_{3+}, \hat{F}_{3+}, \hat{M}_{3+}, \frac{K(\alpha - \mu_T)}{\alpha} \right)$ stabil asimtotik lokal artinya adalah jika pada awalnya populasi nyamuk *Aedes aegypti* sebelum dewasa dekat dengan \hat{A}_{3+} , populasi nyamuk *Aedes aegypti* betina pada tahap dewasa dekat dengan \hat{I}_{3+} , populasi nyamuk *Aedes aegypti* betina subur dekat dengan \hat{F}_{3+} , populasi nyamuk *Aedes aegypti* jantan alami dekat dengan \hat{M}_{3+} , dan populasi nyamuk *Aedes aegypti* jantan steril dekat dengan $\frac{K(\alpha - \mu_T)}{\alpha}$, maka dengan bertambahnya waktu, populasi nyamuk *Aedes aegypti* dari tiap kelas jumlahnya mendekati jumlah populasi awal.

Pada saat $N = N^*$ terjadi perubahan jenis kestabilan sehingga $N = N^*$ merupakan nilai bifurkasi, dengan $N^* = (1 + 2H) \left[1 + \sqrt{1 - \frac{1}{(1+2H)^2}} \right]$, dan pada Sistem (3.4.1) terjadi bifurkasi *saddle node*.

3.7. Simulasi Model

Berikut diberikan simulasi model dari Sistem (3.1) untuk titik ekuilibrium $E_0 = (0,0,0,0,0)$.

- a. Jika diberikan nilai-nilai parameter diberikan sebagai berikut :

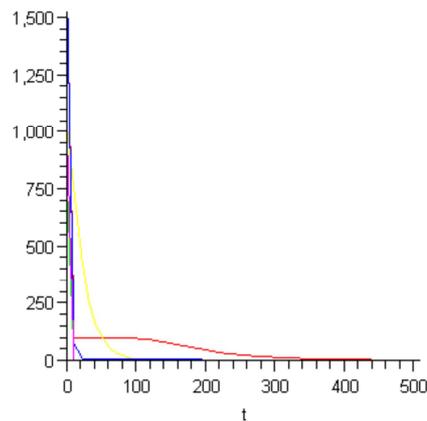
$\phi = 10, \gamma = 0,02, \beta = 0,5, \mu_I = 0.7, \beta_T = 0.5, \mu_A = 0.01, \mu_F = 0.05, r = 0.01,$

$\mu_T = 0.7, \alpha = 0.1, \mu_M = 0.3, K = 100, C = 100$ dan juga diberikan nilai awal

$A(0) = 10, I(0) = 25, F(0) = 7, M(0) = 5, M_T = 10$, maka diperoleh

$$N = \frac{\beta\phi r\gamma}{(\mu_I + \beta)(\gamma + \mu_A)\mu_F} = 0.55 < 1.$$

Karena $\alpha < \mu_T$ dan $N \leq 1$,, maka titik ekuilibrium E_0 stabil asimtotik global, dan dapat ditunjukkan seperti pada gambar berikut:



Gambar 2. Warna merah menyatakan $A(t)$, warna hijau menyatakan $I(t)$, warna kuning menyatakan $F(t)$, warna biru menyatakan $M(t)$, dan warna ungu menyatakan $M_T(t)$.

Pada Gambar 2 terlihat jika diberikan nilai awal

$A(0) = 1500, I(0) = 700, F(0) = 1000, M(0) = 1500, M_T = 900$, pada saat $t \geq 0$, semua grafik mendekati titik ekuilibrium $E_0 = (0,0,0,0,0)$.

b. Jika diberikan nilai-nilai parameter diberikan sebagai berikut :

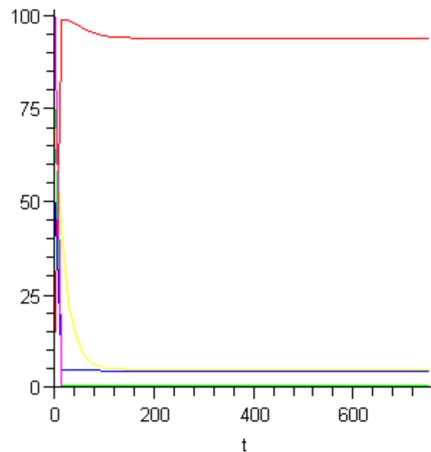
$\phi = 10, \gamma = 0,02, \beta = 0,5, \mu_I = 0.7, \beta_T = 0.5, \mu_A = 0.01, \mu_F = 0.05, r = 0.3,$

$\mu_T = 0.7, \alpha = 0.1, \mu_M = 0.3, K = 100, C = 100$, dan diberikan nilai awal

$A(0) = 15, I(0) = 75, F(0) = 70, M(0) = 50, M_T = 100$, maka diperoleh

$$N = \frac{\beta\phi r\gamma}{(\mu_I + \beta)(\gamma + \mu_A)\mu_F} = 16.66 > 1.$$

Karena $\alpha < \mu_T$ dan $N > 1$,, maka titik ekuilibrium E_0 tidak stabil, dan dapat ditunjukkan seperti pada gambar berikut:



Gambar 3. Warna merah menyatakan $A(t)$, warna hijau menyatakan $I(t)$, warna kuning menyatakan $F(t)$, warna biru menyatakan $M(t)$, dan warna ungu menyatakan $M_T(t)$.

Pada Gambar 3 terlihat bahwa jika diberikan nilai awal $A(0) = 15$,

$I(0) = 75, F(0) = 70, M(0) = 50, M_T = 100$, maka terdapat beberapa grafik yang tidak mendekati titik ekuilibrium $E_0 = (0,0,0,0,0)$.

4. Penutup

4.1. Kesimpulan

Diberikan model pemberantasan nyamuk *Aedes aegypti* menggunakan teknik serangga steril dengan model logistik seperti pada Sistem (3.1). Dari uraian pada bab-bab sebelumnya dapat diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Jika $\alpha < \mu_T$ dan $N < 1$, maka titik ekuilibrium $E_0 = (0,0,0,0,0)$ stabil asimtotik global. Titik ekuilibrium $E_0 = (0,0,0,0,0)$ stabil asimtotik global jika pada awalnya populasi nyamuk *Aedes aegypti* sangat sedikit, maka dengan bertambahnya waktu, populasi nyamuk *Aedes aegypti* akan punah.
2. Jika $\alpha < \mu_T$ dan $N < 1$, maka titik ekuilibrium $E_1 = (\hat{A}_1, \hat{I}_1, \hat{F}_1, \hat{M}_1, 0)$ stabil. Titik ekuilibrium $E_1 = (\hat{A}_1, \hat{I}_1, \hat{F}_1, \hat{M}_1, 0)$ stabil jika pada awalnya populasi nyamuk *Aedes aegypti* sebelum dewasa mendekati \hat{A}_1 , populasi nyamuk *Aedes aegypti* betina pada tahap dewasa mendekati \hat{I}_1 , populasi nyamuk *Aedes aegypti* betina subur mendekati \hat{F}_1 , populasi nyamuk *Aedes aegypti* jantan alami mendekati \hat{M}_1 , dan populasi nyamuk *Aedes aegypti* jantan steril sangat sedikit, maka dengan bertambahnya waktu, jumlah populasi nyamuk *Aedes aegypti* pada setiap kelas selain nyamuk jantan steril menuju pada jumlah populasi awal, dan populasi nyamuk *Aedes aegypti* jantan steril akan punah.
3. Jika $\alpha > \mu_T$ dan $N < N^*$, maka titik ekuilibrium $E_2 = (0,0,0,0, \frac{K(\alpha - \mu_T)}{\alpha})$ stabil.

Titik ekuilibrium $E_2 = \left(0, 0, 0, 0, \frac{K(\alpha - \mu_T)}{\alpha}\right)$ stabil jika pada awalnya populasi nyamuk *Aedes aegypti* selain nyamuk jantan steril sangat sedikit, dan populasi nyamuk *Aedes aegypti* jantan steril mendekati $\frac{K(\alpha - \mu_T)}{\alpha}$, maka dengan bertambahnya waktu populasi nyamuk *Aedes aegypti* selain nyamuk jantan steril akan punah, dan populasi nyamuk *Aedes aegypti* jantan steril akan menuju $\frac{K(\alpha - \mu_T)}{\alpha}$.

4. Jika $\alpha > \mu_T$ dan $N > N^*$, maka titik ekuilibrium $E_{3-} = \left(\hat{A}_{3-}, \hat{I}_{3-}, \hat{F}_{3-}, \hat{M}_{3-}, \frac{K(\alpha - \mu_T)}{\alpha}\right)$ tidak stabil. Titik ekuilibrium $E_{3-} = \left(\hat{A}_{3-}, \hat{I}_{3-}, \hat{F}_{3-}, \hat{M}_{3-}, \frac{K(\alpha - \mu_T)}{\alpha}\right)$ tidak stabil jika pada awalnya populasi nyamuk *Aedes aegypti* sebelum dewasa mendekati \hat{A}_{3-} , populasi nyamuk *Aedes aegypti* betina pada tahap dewasa mendekati \hat{I}_{3-} , populasi nyamuk *Aedes aegypti* betina subur mendekati \hat{F}_{3-} , populasi nyamuk *Aedes aegypti* jantan alami mendekati \hat{M}_{3-} , dan populasi nyamuk *Aedes aegypti* jantan steril mendekati $\frac{K(\alpha - \mu_T)}{\alpha}$,

maka dengan bertambahnya waktu, populasi nyamuk *Aedes aegypti* pada masing-masing kelas tidak semuanya hamper sama dengan jumlah populasi awal.

5. Jika $\alpha > \mu_T$ dan $N > N^*$, maka titik ekuilibrium $E_{3+} = \left(\hat{A}_{3+}, \hat{I}_{3+}, \hat{F}_{3+}, \hat{M}_{3+}, \frac{K(\alpha - \mu_T)}{\alpha}\right)$ stabil asimtotik lokal. Titik ekuilibrium $E_{3+} = \left(\hat{A}_{3+}, \hat{I}_{3+}, \hat{F}_{3+}, \hat{M}_{3+}, \frac{K(\alpha - \mu_T)}{\alpha}\right)$ stabil asimtotik lokal jika pada awalnya populasi nyamuk *Aedes aegypti* sebelum dewasa mendekati \hat{A}_{3+} , populasi nyamuk *Aedes aegypti* betina pada tahap dewasa mendekati \hat{I}_{3+} , populasi nyamuk *Aedes aegypti* betina subur mendekati \hat{F}_{3+} , populasi nyamuk *Aedes aegypti* jantan alami mendekati \hat{M}_{3+} , dan populasi nyamuk *Aedes aegypti* jantan steril mendekati $\frac{K(\alpha - \mu_T)}{\alpha}$, maka dengan bertambahnya waktu, populasi nyamuk *Aedes aegypti* dari tiap kelas jumlahnya mendekati jumlah populasi awal.
6. Pemberantasan nyamuk *Aedes aegypti* menggunakan teknik serangga steril dengan model logistik dikatakan berhasil jika populasi nyamuk *Aedes aegypti* sebelum dewasa mengecil, rata-rata jumlah kelahiran nyamuk *Aedes aegypti* betina mengecil, dan jumlah maksimal perkawinan antara nyamuk *Aedes aegypti* betina dengan nyamuk jantan steril meningkat.

4.2. Saran

Penulis menyadari dalam tulisan ini mungkin terdapat kekurangan. Dalam kajian selanjutnya dapat dianalisa mengenai teknik serangga steril dengan model logistik jika terjadi perpindahan populasi nyamuk jantan maupun nyamuk betina.

Referensi

- [1] BATAN, 2004, http://www.batan.go.id/ptkmr/Alara/BulAlara%20Vol%206_1%20Ags%2004/BAlara2004_06108_001.pdf .
- [2] Esteva, L., and H. Mo Yang, 2005, Mathematical Model to Assess the Control of Aedes Aegypti Mosquitoes by Steril Insect Technique, *Mathematical Biosciences*. Vol. 198, Issue 2, pp. 132-147.
- [3] Esteva, L., and H. Mo Yang, 2006, Control of Dengue Vector by the Sterile Insect Technique Considering Logistic Recruitment, *Tendencias em Matematica Aplicada e Computacional*. Vol. 7, Issue 2, pp. 259-268.
- [4] Hahn, W, 1967, *Stability of Motion*, Springer-Verlag, New York.
- [5] Knipling, 1955, Possibilities of Insect Control or Eradication Through the Use of Sexually Sterile Males, *J. Econ. Entomol*, pp. 459.
- [6] Luenberger, D.G., 1979, *Introduction to Dynamics Systems Theory, Models & Applications*, John Wiley & Sons, Inc, Canada.
- [7] Perko, L., 1991, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York.
- [8] Soegijanto, S., 2004, *Demam Berdarah Dengue*, Airlangga University Press, Surabaya.
- [9] Verhulst, F, 1996, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, 2nd Edition*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.