APLIKASI SKEMA DISKRITISASI ORDER EMPAT DAN EKSTRAPOLASI RICHARDSON UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN KONVEKSI DIFUSI

Masduki

Program Studi Pendidikan Matematika FKIP
Universitas Muhammadiyah Surakarta
Jl. A. Yani Tromol Pos 1 Pabelan, Surakarta 57102

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk mencari algoritma yang akurat dan efisien dalam menyelesaikan persamaan Konveksi Difusi. Penggunaan skema diskritisasi order empat bertujuan agar penyelesaian yang dihasilkan lebih akurat. Penyelesaian persamaan Konveksi Difusi dengan menggunakan skema diskritisasi order empat menghasilkan sistem persamaan linear. Untuk sistem yang besar, penyelesaian secara iteratif memerlukan operasi aritmatika yang besar pula. Akibatnya penyelesaian dengan menggunakan metode iteratif menjadi tidak efisien. Pada penelitian ini untuk meningkatkan efisiensi penyelesaian secara iteratif digunakan teknik ekstrapolasi Richardson. Teknik ini digunakan untuk mendapatkan nilai awal yang "baik" bagi proses penyelesaian secara iterasi. Dari hasil eksperimen numerik diperoleh bahwa penyelesaian persamaan konveksi difusi dengan menggunakan skema diskritisasi order empat lebih akurat dan efisien. Untuk masalah yang didominasi difusi maupun masalah yang didominasi konveksi, algoritma multigrid ekstrapolasi Richardson dengan strategi pelabelan lexicography, simetri, *dan* zebra *memberikan hasil yang lebih akurat dibandingkan metode Jacobi. Hal ini ditunjukkan dengan error yang lebih kecil dibandingkan dengan error metode Jacobi. Selain itu untuk masalah yang didominasi oleh difusi dan masalah yang didominasi oleh konveksi, algoritma multigrid ekstrapolasi Richardson dengan strategi pelabelan* lexicography, simetri, *dan* zebra *memberikan hasil yang lebih efisien dibandingkan metode Jacobi. Hal ini ditunjukkan dengan unit work yang lebih kecil dibandingkan dengan unit work pada metode Jacobi. Lebih jauh, algoritma multigrid ekstrapolasi Rihardson yang digunakan memberikan efisiensi 95 – 96% untuk masalah yang didominasi oleh difusi dan 91 – 96.5% untuk masalah yang didominasi oleh konveksi.*

Kata Kunci: *skema diskritisasi order empat, ekstrapolasi Richardson, persamaan konveksi difusi*

ABSTRACT

This research addresses to find the accurate and efficient algorithm to solve convection diffusion equations. The fourth order discretization scheme used to get more accurate solution. If we solve convection diffusion equations with fourth order discretization scheme, we get the linear equations system. For large scale systems, the iteratif solution need much more arithmetic operation. Then, this method will be less efficient. In this research, we use full multigrid technique to improve the efficient solution. Richardson extrapolation used to get a good initial value in this iterative. Numerical experiments show that the solution of *convection diffusion equation more accurate and efficient than the Jacobi method. For diffusion dominated problem or convection dominated problem, multigrid algorithm with Richardson extrapolation by using lexicography, symmetric, and zebra ordering give more accurate solution than Jacobi method. it showed with the error iteration of multigrid algorithm with Richardson extrapolation less than Jacobi method. for diffusion dominated problem and convection dominated problem, multigrid algorithm with Richardson extrapolation also shows more efficient than Jacobi method. it showed with less unit work than Jacobi method. Ideed, multigrid algorithm with Richardson extrapolation give about 95 – 96% efficientcy for diffusion dominated problem and 91 – 96.5% efficientcy for convection dominated problem.*

Keywords: *fourth order discretization scheme, Richardson extrapolation, convection diffusion equation*

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial parsial (PDP) merupakan formulasi model matematika dari suatu fenomena alam. Fenomena aliran panas pada pelat besi, aliran air pada suatu pipa, perkembangan bakteri, bergetarnya senar pada gitar dan lain sebagainya merupakan fenomena-fenomena yang dapat diformulasikan secara matematika dalam bentuk persamaan diferensial. Untuk mendapatkan penyelesaian eksplisit dari PDP dapat dilakukan dengan metode pemisahan variabel, Sturm Liouville, D'Alembert, deret Fourier maupun transformasi Laplace. Tetapi hanya sedikit model PDP yang dapat dicari penyelesaian eksplisitnya. Oleh karena itu diperlukan penyelesaian secara numerik untuk mendapatkan penyelesaian pendekatan.

Spotz dan Carey (1995) telah menerapkan teknik diskritisasi order empat untuk menyelesaikan persamaan konveksi difusi dimensi satu dan Navier Stokes dimensi dua. Spotz dan Carey menerapkan teknik tersebut untuk diskritisasi dengan lebar grid yang sama maupun tidak sama. Selanjutnya, Spotz dan Carey (1996) memperluas teknik diskritisasi order tinggi untuk menyelesaikan persamaan Poisson dimensi tiga. Teknik diskritisasi order empat juga digunakan oleh Zhuang dan Sun (2001) untuk menghasilkan penyelesaian persamaan Poisson singular yang lebih efisien. Lebih jauh, teknik diskritisasi order empat juga telah digunakan untuk menyelesaikan masalah *time dependent* (Spotz dan Carey, 2000), *unsteady viscous incompressible flows* (Ming dan Tao, 2001), dan persamaan Navier Stokes serta *driven cavity flow* untuk bilangan Reynold, $\mathrm{Re} \geq 1000$ (Erturk dan Gokcol, 2005). Tetapi penelitian-penelitian tersebut diatas belum memanfaatkan teknik multigrid.

Untuk persamaan konveksi difusi, Gupta et. al. (1995) juga membandingkan (eksperimen numerik) teknik diskritisasi order empat dan order dua dikombinasikan dengan algoritma multigrid *W-cycle* apabila koefisien konveksi dan difusinya konstan. Hasil eksperimen numerik menunjukkan bahwa teknik diskritisasi order empat memberikan penyelesaian yang lebih akurat dan efisien dibandingkan apabila digunakan teknik diskritisasi order dua. Lebih jauh teknik diskritisasi order empat juga memberikan penyelesaian yang stabil, yaitu penyelesaiannya konvergen pada kasus dimana apabila digunakan diskritisasi order dua penyelesaian dengan teknik multigrid divergen.

Gupta et. al. (1997a) juga menggunakan algoritma multigrid *W-cycle* untuk menyelesaikan persamaan konveksi difusi dengan bilangan Reynold yang besar ( ). Hasil eksperimen numerik menunjukkan bahwa kecepatan konvergensi teknik multigrid konstan untuk . Hasil eksperimen numerik juga menunjukkan bahwa teknik multigrid dengan operator restriksi *full injection* akan efisien apabila digunakan teknik pelabelan *red-black* Gauss-Seidel.

Persamaan konveksi diffusi dimensi dua dengan koefisien konstan mempunyai bentuk umum sebagai berikut (Gupta et. al., 1995)

$$(x,y)\in\Omega, \quad (1)$$

$$u(x,y)=g(x,y), \qquad ,$$

dengan Ω adalah domain terbatas pada dengan batas domain persegi $\partial\Omega$, *p* dan *q* koefisien positif, dan *f* diasumsikan fungsi yang *smooth*. Persamaan (1) sering di gunakan untuk menggambarkan fenomena tranportasi seperti aliran cairan, penyebaran polutan, dan lain-lain. Perbandingan antara *p* dan *q* menunjukkan rasio antara konveksi dan diffusi.

Penyelesaian Persamaan (1) dibedakan menjadi dua tipe, yaitu masalah yang didominasi oleh diffusi (*diffusion dominated problem*) dan masalah yang didominasi oleh konveksi (*convection dominated problem*). Untuk membedakan dua permasalahan tersebut, misalkan

,

dan didefinisikan bilangan Reynold (bentuk diskrit) yaitu

dengan *h* adalah lebar grid pada arah *x* dan *y*. Jika $\mathrm{Re}\le 1$, Persamaan (1) disebut sebagai masalah yang didominasi oleh diffusi. Sebaliknya jika disebut masalah yang didominasi oleh konveksi.

Untuk menyelesaikan Persamaan (1) digunakan skema diskritisasi order empat berikut:

$$\sum_{i=0}^{8}\alpha_i u_i = \frac{h^2}{2}\left[\frac{ph}{2}(f_1-f_3)+\frac{qh}{2}(f_2-f_4)+\right.$$
$$\left.(f_1+f_2+f_3+f_4+8f_0)\right] \qquad (2)$$

dengan koefisien adalah

$$\alpha_0 = -(20+p^2h^2+q^2h^2),$$
$$\alpha_1 = 4+2ph+\frac{p^2h^2}{2},$$
$$\alpha_2 = 4+2qh+\frac{q^2h^2}{2},$$
$$\alpha_3 = 4-2ph+\frac{p^2h^2}{2},$$
$$\alpha_4 = 4-2qh+\frac{q^2h^2}{2},$$
$$\alpha_5 = 1+\frac{ph}{2}+\frac{qh}{2}+\frac{pqh^2}{4},$$
$$\alpha_6 = 1-\frac{ph}{2}+\frac{qh}{2}-\frac{pqh^2}{4},$$
$$\alpha_7 = 1-\frac{ph}{2}-\frac{qh}{2}+\frac{pqh^2}{4},$$
$$\alpha_8 = 1+\frac{ph}{2}-\frac{qh}{2}-\frac{pqh^2}{4}.$$

Persamaan (2) selanjutnya disebut *skema diskritisasi order empat*.

Selanjutnya didefinisikan bilangan Reynold $\gamma := \frac{ph}{2}$ dan $\delta := \frac{qh}{2}$. Dengan demikian untuk setiap $(x_i, y_j)\in\Omega_h$ dapat dituliskan dalam bentuk *formula sembilan titik* yaitu

$$\begin{pmatrix}\alpha_6 & \alpha_2 & \alpha_5\\ \alpha_3 & \alpha_0 & \alpha_1\\ \alpha_7 & \alpha_4 & \alpha_8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\gamma+\delta-\delta\gamma & 4+4\delta+2\delta^2 & 1+\delta+\gamma+\delta\gamma\\ 4-4\gamma+2\gamma^2 & -(20+4\gamma^2+4\delta^2) & 4+4\gamma+2\gamma^2\\ 1-\gamma-\delta+\delta\gamma & 4-4\delta+2\delta^2 & 1+\gamma-\delta-\delta\gamma\end{pmatrix} \quad (3)$$

Ini berarti penyelesaian Persamaan (1) dengan skema diskritisasi order empat (2) ekivalen dengan penyelesaian sistem Persamaan linier

$$Au = b, \qquad (4)$$

dengan

$$u=[u_{11},u_{21},K,u_{m1},u_{12},u_{22},K,u_{m2},K,u_{1m},u_{2m},K,u_{mm}]^T,$$

$$b=[b_{11},b_{21},K,b_{m1},b_{12},b_{22},K,b_{m2},K,b_{1m},b_{2m},K,b_{mm}]^T$$

dan

$$\mathrm{A} =,\begin{bmatrix} A_D & A_U & O & \Lambda & \Lambda & O \\ A_L & A_D & A_U & \mathrm{O} & & \mathrm{M} \\ O & A_L & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{M} \\ \mathrm{M} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & A_U & O \\ \mathrm{M} & & \mathrm{O} & A_L & A_D & A_U \\ O & \Lambda & \Lambda & O & A_L & A_D \end{bmatrix} \quad (5)$$

berukuran $m^2 x m^2$ dengan O adalah matrik nol,

$$\mathrm{A_D} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & 0 & \mathrm{K} & \mathrm{K} & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_0 & \alpha_1 & 0 & & \mathrm{M} \\ 0 & \alpha_3 & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{M} \\ \mathrm{M} & 0 & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \alpha_1 & 0 \\ \mathrm{M} & & \mathrm{O} & \alpha_3 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ 0 & \Lambda & \Lambda & 0 & \alpha_3 & \alpha_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A_U} = \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_5 & 0 & \mathrm{K} & \mathrm{K} & 0 \\ \alpha_6 & \alpha_2 & \alpha_5 & 0 & & \mathrm{M} \\ 0 & \alpha_6 & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{M} \\ \mathrm{M} & 0 & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \alpha_5 & 0 \\ \mathrm{M} & & \mathrm{O} & \alpha_6 & \alpha_2 & \alpha_5 \\ 0 & \Lambda & \Lambda & 0 & \alpha_6 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{dan } \mathrm{A_L} = \begin{bmatrix} \alpha_4 & \alpha_8 & 0 & \mathrm{K} & \mathrm{K} & 0 \\ \alpha_7 & \alpha_4 & \alpha_8 & 0 & & \mathrm{M} \\ 0 & \alpha_7 & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{M} \\ \mathrm{M} & 0 & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \alpha_8 & 0 \\ \mathrm{M} & & \mathrm{O} & \alpha_7 & \alpha_4 & \alpha_8 \\ 0 & \Lambda & \Lambda & 0 & \alpha_7 & \alpha_4 \end{bmatrix}$$

masing-masing berukuran *m x m*.

Untuk menyelesaikan Persamaan (5) digunakan metode iterasi Jacobi dan multigrid ekstrapolasi Richardson.

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalalah studi pustaka dengan dukungan implementasi program komputasi. Dengan studi pustaka diharapkan diperoleh berbagai informasi yang berhubungan dengan Persamaan Konveksi Diffusi, Metode Beda Hingga, Ekstrapolasi Richardson dan berbagai algoritma dalam metode multigrid. Penggunaan program komputasi dimaksudkan untuk mengetahui efisiensi dan akurasi algoritma baru yang diturunkan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Diberikan persamaan konveksi diffusi linier homogen dengan syarat batas tipe Dirichlet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + p\frac{\partial u}{\partial x} + q\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (x,y) \in \Omega, \qquad (6)$$

$$u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \partial\Omega.$$

Persamaan (6) mempunyai penyelesaian eksak $u = 0$. Pada penelitian ini digunakan domain $\Omega = (0,1)x(0,1)$ dan ukuran grid N=16. Nilai awal yang digunakan pada proses iterasi adalah $u(x,y) = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin((N-1)(x+y))\right)$.

Proses iterasi dihentikan jika $\frac{\left\|e^{[n]}\right\|_\infty}{\left\|e^{[0]}\right\|_\infty} < 10^{-5}$

dengan $e^{[n]} = u - u_h^{[n]}$ dan $e^{[0]} = u - u_h^{[0]}$. Eksperimen numerik untuk menyelesaikan Persamaan (6) dilakukan untuk dua permasalahan yaitu masalah yang didominasi oleh difusi dan masalah yang didominasi oleh konveksi. Hasil eksperimen numerik disajikan sebagai berikut.

Masalah yang didominasi oleh difusi

Untuk masalah yang didominasi oleh difusi perbandingan *error* dan *unit work* untuk kasus dan disajikan pada Tabel 1, 2, 3, dan 4.

Tabel 1. Perbandingan *Error* untuk pada Masalah yang Didominasi Difusi

N	$\gamma = \delta$	*Multigrid Ekstrapolasi Richardson*			**Jacobi**
		L	**Z**	**S**	
16	0.1	9.6518×10^{-6}	8.9057×10^{-6}	9.5551×10^{-6}	9.8192×10^{-6}
	0.01	7.2219×10^{-6}	9.8076×10^{-6}	7.7481×10^{-6}	9.9145×10^{-6}
	0.001	7.8357×10^{-6}	9.9039×10^{-6}	7.8380×10^{-6}	9.8677×10^{-6}

Tabel 2. Perbandingan *Unit Work* untuk Masalah yang Didominasi Difusi

N	$\gamma = \delta$	*Multigrid Ekstrapolasi Richardson*			**Jacobi**
		L	**Z**	**S**	
16	0.1	15 (19.98)	15 (19.98)	14 (18.65)	395
	0.01	16 (21.31)	15 (19.98)	16 (21.31)	476
	0.001	16 (21.31)	15 (19.98)	16 (21.31)	477

Tabel 3. Perbandingan *error* untuk pada masalah yang didominasi difusi

N	δ	*Multigrid Ekstrapolasi Richardson*			**Jacobi**
		L	**Z**	**S**	
16	0.1	8.0724×10^{-6}	7.0202×10^{-6}	8.7126×10^{-6}	9.9529×10^{-6}
	0.01	7.7813×10^{-6}	9.8341×10^{-6}	7.8075×10^{-6}	9.7736×10^{-6}
	0.001	7.8383×10^{-6}	9.9029×10^{-6}	7.8406×10^{-6}	9.8644×10^{-6}

Tabel 4. Perbandingan *Unit Work* untuk Masalah yang Didominasi Difusi

N	δ	*Multigrid Ekstrapolasi Richardson*			**Jacobi**
		L	**Z**	**S**	
16	0.1	15 (19.98)	15 (19.98)	15 (19.98)	431
	0.01	16 (21.31)	15 (19.98)	16 (21.31)	477
	0.001	16 (21.31)	15 (19.98)	16 (21.31)	477

Bilangan diluar kurung adalah banyak iterasi yang diperlukan sedangkan bilangan di dalam kurung menyatakan unit work yang diperlukan. Pada Tabel 1 dan 3 tampak *error* Algoritma multigrid ekstrapolasi Richardson dengan ketiga teknik pelabelan relatif lebih kecil dibandingkan error metode Jacobi. Ini berarti metode multigrid dengan ketiga teknik pelabelan lebih akurat dibandingkan metode Jacobi. Selanjutnya pada Tabel 2 dan 4 tampak unit work yang diperlukan algoritma multigrid ekstra-polasoi Richardson untuk mencapai error toleransi $< 10^{-5}$ lebih sedikit dibandingkan dengan unit work pada metode iterasi Jacobi. Ini berarti penyelesaian persamaan (1) dengan algoritma multigrid ekstrapolasi Richardson lebih efisien dibandingkan penyelesian dengan metode Jacobi.

Untuk kasus , efisiensi yang diberikan oleh algoritma multigrid ekstrapolasi Rihcardson sebesar 95 – 96%. ini berarti penyelesaian dengan algoritma multigrid ekstrapolasi Richardson memberikan efisiensi yang sangat signifikan. Selanjutnya untuk kasus , efisiensi yang diberikan oleh algoritma multigrid ekstrapolasi Rihcardson sebesar 95%. ini berarti penyelesaian dengan algoritma multigrid ekstrapolasi Richardson memberikan efisiensi yang sangat signifikan.

Masalah yang didominasi konveksi

Untuk masalah yang didominasi oleh konveksi perbandingan *error* dan *unit work* untuk kasus dan disajikan pada Tabel 5, 6, 7, dan 8.

Tabel 5. Perbandingan *Error* untuk Masalah yang Didominasi Konveksi

N	$\gamma = \delta$	*Multigrid Ekstrapolasi Richardson*			**Jacobi**
		L	**Z**	**S**	
16	10	7.8318×10^{-6}	6.9795×10^{-6}	7.5392×10^{-6}	9.8497×10^{-6}
	100	9.8856×10^{-6}	7.6758×10^{-6}	8.5740×10^{-6}	9.8830×10^{-6}
	1000	7.8157×10^{-6}	8.1187×10^{-6}	9.1142×10^{-6}	9.9041×10^{-6}

Tabel 6. Perbandingan *Unit Work* untuk Masalah yang Didominasi Konveksi

N	$\gamma = \delta$	*Multigrid Ekstrapolasi Richardson*			**Jacobi**
		L	**Z**	**S**	
16	10	16 (21.31)	16 (21.31)	16 (21.31)	345
	100	21 (27.97)	21 (27.97)	21 (27.97)	801
	1000	21 (27.97)	21 (27.97)	21 (27.97)	812

Tabel 7. Perbandingan *Error* untuk pada Masalah yang Didominasi Difusi

N	δ	*Multigrid Ekstrapolasi Richardson*			**Jacobi**
		L	**Z**	**S**	
16	10	5.6181×10^{-6}	5.5162×10^{-6}	5.3657×10^{-6}	9.7909×10^{-6}
	100	7.6211×10^{-6}	7.5192×10^{-6}	8.1165×10^{-6}	9.7271×10^{-6}
	1000	8.3783×10^{-6}	8.3773×10^{-6}	8.7266×10^{-6}	9.9018×10^{-6}

Tabel 8. Perbandingan *Unit Work* untuk Masalah yang Didominasi Difusi

N	δ	*Multigrid Ekstrapolasi Richardson*			**Jacobi**
		L	**Z**	**S**	
16	10	13 (17.32)	13 (17.32)	13 (17.32)	200
	100	18 (23.98)	18 (23.98)	19 (25.31)	557
	1000	18 (23.98)	18 (23.98)	19 (25.31)	568

Pada Tabel 5 dan 7 tampak *error* Algoritma multigrid ekstrapolasi Richardson dengan ketiga teknik pelabelan relatif lebih kecil dibandingkan error metode Jacobi. Ini berarti metode multigrid dengan ketiga teknik pelabelan lebih akurat dibandingkan metode Jacobi. Selanjutnya pada Tabel 6 dan 8 tampak unit work yang diperlukan algoritma multigrid ekstrapolasoi Richardson untuk mencapai error toleransi $< 10^{-5}$ lebih sedikit dibandingkan dengan unit work pada metode iterasi Jacobi. Ini berarti penyelesaian persamaan (1) dengan algoritma multigrid ekstrapolasi Richardson lebih efisien dibandingkan penyelesian dengan metode Jacobi.

Untuk kasus , efisiensi yang diberikan oleh algoritma multigrid ekstrapolasi

Rihcardson sebesar 94 – 96.5%. ini berarti penyelesaian dengan algoritma multigrid ekstrapolasi Richardson memberikan efisiensi yang sangat signifikan. Selanjutnya untuk kasus , efisiensi yang diberikan oleh algoritma multigrid ekstrapolasi Rihcardson sebesar 91 – 95.7%. ini berarti penyelesaian dengan algoritma multigrid ekstrapolasi Richardson memberikan efisiensi yang sangat signifikan.

SIMPULAN DAN SARAN

Dari hasil eksperimen numerik dapat disimpulkan bahwa penyelesaian persamaan konveksi difusi dengan skema diskritisasi order empat dan ekstrapolasi Richardson lebih akurat dan efisien dibandingkan penyelesaian dengan metode Jacobi. Lebih jauh, algoritma multigrid ekstrapolasi Rihardson memberikan efisiensi 95 – 96% untuk masalah yang didominasi oleh difusi dan 91 – 96.5% untuk masalah yang didominasi oleh konveksi.

Pada penelitian ini baru terbatas untuk eksperimen numerik penyelesaian persamaan konveksi difusi untuk nilai tertentu. Diperlukan analisis konvergensi secara analitik sehingga diperoleh kesimpulan yang lebih luas. Selanjutnya untuk kasus diperlukan penelitian lebih lanjut untuk menentukan strategi multigrid yang tepat sehingga Algoritma multigrid lebih efisien dibandingkan metode Jacobi.

UCAPAN TERIMAKASIH

Ucapan terimakasih peneliti sampaikan kepada DP3M Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Departemen Pendidikan Nasional yang telah membiayai penelitian ini. Lembaga penelitian UMS yang telah memberikan informasi dan pengadministrasian penelitian ini. Selain itu kepada para dosen sejawat yang telah memberikan masukan peneliti ucapkan terimakasih.

DAFTAR PUSTAKA

Erturk, E., and Gokcol, G., 2005, Fourth Order Compact Formulation of Navier Stokes Equations and Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers, Submitted for *International Journal for Numerical Methods in Fluids*.

Gupta, M. M., Kouatchou, J., Zhang, J., 1995, *An Accurate and Stable Multigrid Method for Convection Diffusion Equations*, Preprint, Department of Mathematic, George Washington University.

——, 1997a, A Compact Multigrid Solver for Convection Diffusion Equation, *Journal of Computational Physics*, **132**, p. 123-129.

——, 1997b, Comparison of 2nd and 4th Order Discretizations for Multigrid Poisson Solver, *Journal of Computational Physics*, **132**, p. 226-232.

Li, Ming., and Tang, Tao., 2001, A Compact Fourth Order Finite Difference Scheme for Unsteady Viscous Incompressible Flows, *Journal of Scientific Computing*, Vol. 16, No. 1, p. 9-45.

Spotz, W. F., and Carey, G. F., 1995, High Order Compact Finite Difference Method, *Proceedings of the Third International Conference on Spectral and High Order Methods*.

———, 1996, A High Order Compact Formulation for the 3D Poisson Equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **12**, p. 235-243.

———, 2000, Extension of High Order Compact Schemes to Time Dependent Problems, Submitted to *Numerical Methods for Partial Differential Equations*.

Zhang, J., 1996, Multigrid Solution of the Convection Diffusion Equations with High Reynolds Number, *Proceedings of the Copper Mountain Conference on Iterative Methods*.

Zhuang, Y., and Sun, X. H., 2001, A High Order Fast Direct Solver for Singular Poisson Equations, *Journal of Computational Physics*, **171**, p. 79-94.