

PENYELESAIAN PERSAMAAN INTEGRAL VOLTERRA LINEAR DENGAN METODE FUNGSI WALSH DAN FMV-CYCLE

THE SOLUTION OF VOLTERRA LINEAR INTEGRAL EQUATION USING WALSH FUNCTION METHOD AND FMV-CYCLE

Masduki

Jurusan Pendidikan Biologi FKIP
Universitas Muhammadiyah Surakarta

ABSTRAK

*P*enyelesaian persamaan integral Volterra linear secara numerik menggunakan fungsi Walsh telah dikembangkan. Masing-masing suku dari persamaan integralnya diekspansikan dalam deret Walsh berhingga untuk pemotongan m suku pertama. Dengan cara demikian dihasilkan bentuk sistem persamaan linear. Sistem persamaan linear yang diperoleh selanjutnya diselesaikan dengan menggunakan metode iterasi Picard. Untuk meningkatkan efisiensi penyelesaian yang dilakukan dengan metode iterasi Picard diterapkan skema multigrid, khususnya FMV-cycle. Dalam penelitian ini FMV-cycle diterapkan pada dua kasus yang telah diselesaikan dengan V-cycle oleh Widyaningsih dkk. Eksperimen numerik menunjukkan bahwa penerapan FMV-cycle mampu meningkatkan efisiensi penyelesaian persamaan integral Volterra linear.

Kata kunci: persamaan integral, metode fungsi Walsh, FMV-cycle

ABSTRACT

*T*he solution of Volterra linear integral equation using Walsh functions was developed. Each term of the integral equation was expanded as finite Walsh series for m truncation. The result in the usage of this method are linear equation systems. These systems are solved with Picard iteration method. In order to improve the efficiency of the solution with Picard iteration method is proposed multigrid schema, especially FMV-cycle. In this research, FMV-cycle schema is proposed in two cases that solved with V-cycle by Widyaningsih et. al. Numerical experiment shows that FMV-cycle does improve the efficiency of the solution of Volterra linear integral equation.

Keywords: integral equation, Walsh function method, FMV-cycle

PENDAHULUAN

Persamaan integral sering muncul dalam permasalahan di bidang fisika, teknik, ekonomi, biologi, matematika terapan dan lain sebagainya. Model seperti laju pertumbuhan penduduk, laju kelahiran, transfer radiasi, aerodinamika, proses penyaringan asap rokok, merupakan model-model yang disajikan dalam bentuk persamaan integral. Golberg (1978, 1-58) memberikan beberapa bentuk persamaan integral. Sedangkan Jerri (1985) mengklasifikasikan persamaan integral berdasarkan batas integrasinya kedalam dua bentuk yaitu persamaan integral Volterra dan Fredholm. Golberg (1978, 1-58) telah memberikan beberapa metode numerik untuk menyelesaikan persamaan integral, khususnya persamaan integral Fredholm, diantaranya metode pendekatan kernel, quadrature, galerkin, semianalitik, dan proyeksi.

Fungsi Walsh yang merupakan fungsi gelombang persegi yang lengkap orthonormal telah digunakan dalam bidang yang cukup luas diantaranya analisis sistem komunikasi, analisis spektral, sistem radar, spektroskop dan lain sebagainya (lihat Beauchamp, 1975). Tahun 1973, Corrington (1973, 470-476) menggunakan metode fungsi Walsh untuk menyelesaikan persamaan integral dan persamaan diferensial. Dari eksperimen numerik, Corrington menyimpulkan bahwa fungsi Walsh dapat digunakan untuk mendapatkan penyelesaian pendekatan dari persamaan integral, khususnya persamaan integral Volterra. Selanjutnya Chen dan Hsiao (1975, 265-280) serta Blyth dan Uljanov (1996, 621-628; 1996, 137-143) masing-masing menggunakan metode fungsi Walsh untuk menyelesaikan masalah variasional serta persamaan integral Fredholm. Dari kedua eksperimen yang dilakukan menunjukkan bahwa metode fungsi Walsh mampu memberikan galat yang lebih kecil dibandingkan apabila digunakan metode yang telah ada, seperti metode Galerkin ataupun *middle point method*.

Multigrid pada awalnya dikembangkan untuk menyelesaikan masalah syarat batas yang sering muncul dalam fisika terapan. Di sini, domain dari masalah syarat batas dibuat diskrit yaitu dengan membaginya menjadi grid-grid berhingga, sehingga diperoleh suatu sistem persamaan aljabar (*linear* maupun *non-linear*). Dengan cara demikian, penyelesaian masalah syarat batas dapat dilakukan dengan menyelesaikan sistem persamaan yang diperoleh.

Di dalam penelitian ini metode multigrid yang digunakan adalah *Full Multigrid V (FMV)-cycle* yang merupakan metode multigrid yang lengkap karena telah memanfaatkan secara bersama skema koreksi grid *coarse* dan iterasi tersarang (lihat Briggs (1988)). Hasilnya kemudian dibandingkan dengan penyelesaian persamaan integral Volterra linear apabila digunakan gabungan metode fungsi Walsh dan *V-cycle* yang telah dilakukan oleh Widyaningsih (2000, 155-161) dan Widyaningsih dkk. (2001) untuk mengetahui efisiensi kedua metode.

Persamaan Integral Volterra Linear

Bentuk umum persamaan integral, sebagaimana diberikan oleh Jerri (1985) adalah sebagai berikut.

$$h(x)y(x) = g(x) + \int_a^{b(x)} K(x,t, y(t))dt. \quad (1)$$

Apabila $b(x)=x$, maka persamaan (1) menjadi

$$h(x)y(x) = g(x) + \int_a^x K(x,t, y(t))dt, \quad (2)$$

dan disebut sebagai persamaan integral Volterra. Apabila $h(x)=1$, persamaan integral (2) menjadi

$$y(x) = g(x) + \int_a^x K(x,t, y(t))dt, \quad (3)$$

dan disebut sebagai persamaan integral Volterra tipe dua. Apabila y linear, maka persamaan (3) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$y(x) = g(x) + \int_a^x K(x,t)y(t)dt, \quad (4)$$

dan disebut sebagai persamaan integral Volterra linear tipe dua.

Penelitian ini hanya akan membahas persamaan integral Volterra linear tipe dua dengan $g(x)$ dan K diketahui serta y adalah fungsi linear yang akan ditentukan.

Fungsi Walsh

Tahun 1922, Rademacher (dalam Sloss dan Blyth, 1994, 273-283) mengembangkan himpunan fungsi gelombang persegi tidak lengkap ortonormal pada $[0,1]$. Selanjutnya, tahun 1923, Walsh (1923, 5-24) mengembangkan himpunan fungsi gelombang persegi yang lengkap ortonormal, yang selanjutnya disebut sebagai fungsi Walsh. Chen dan Hsiao (1975, 265-280) mendefinisikan fungsi Walsh sebagai berikut.

$$W_0(x) = 1$$

$$W_1(x) = r_1(x)$$

$$W_2(x) = [r_2(x)]^1 [r_1(x)]^0$$

⋮

$$W_n(x) = [r_q(x)]^{b_q} [r_{q-1}(x)]^{b_{q-1}} \dots [r_1(x)]^{b_1}$$

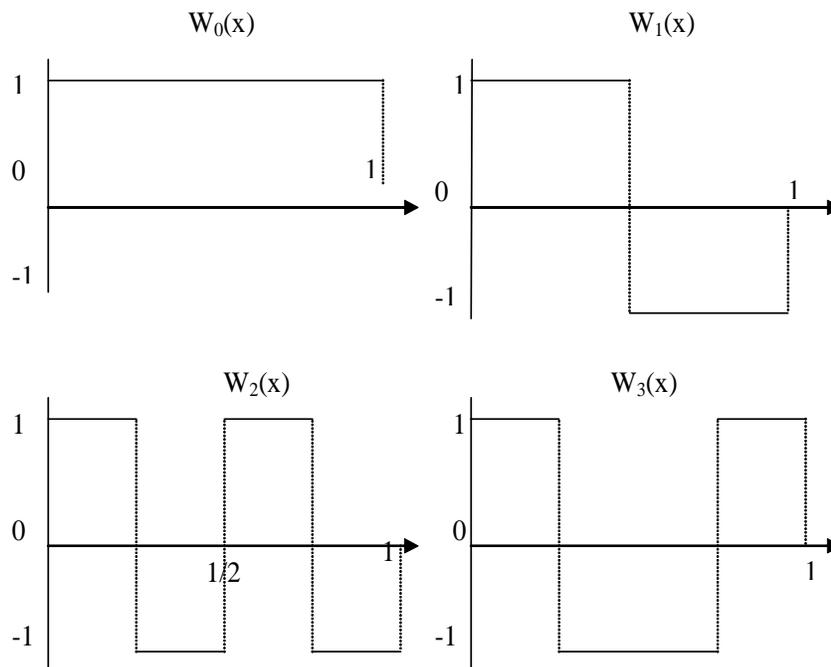
dengan

$$q = \lceil \log_2(n) \rceil + 1$$

$$n = b_q \cdot 2^{q-1} + b_{q-1} \cdot 2^{q-2} + \dots + b_1 \cdot 2^0$$

dan $b_q, b_{q-1}, b_{q-2}, \dots, b_1$ adalah bilangan biner.

Grafik empat fungsi Walsh yang pertama ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Empat Fungsi Walsh Pertama

Sifat Integral Fungsi Walsh

Menurut Corrington (1973, 470-476), setiap integral fungsi Walsh dapat disajikan sebagai deret fungsi Walsh

(8)

dengan $n=0,1,2,\dots$ dan d_i merupakan koefisien deret fungsi Walsh ke- i .

Blyth (1997, 166-172) menuliskan pendekatan integral fungsi Walsh sebagai deret dengan koefisien dapat ditentukan dengan menggunakan matrik operasional \mathbf{P}_m yang telah diberikan oleh Chen dan Hsiao. Apabila

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i W_i(x), \quad \int_0^x f(t) dt = \sum_{i=0}^{m-1} b_i W_i(x) \quad (9)$$

maka

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{m-1} \end{bmatrix} = \mathbf{P}_m^T \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{m-1} \end{bmatrix}$$

dengan

$$\mathbf{P}_m^T = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{P}_{m/2}^T & \frac{1}{2m} \mathbf{I}_{m/2} \\ \hline -\frac{1}{2m} \mathbf{I}_{m/2} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad \text{dan} \quad \mathbf{P}_2^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\int_0^x W_n(x) dx = \sum_{i=0}^{\infty} d_i W_i(x)$$

Selanjutnya untuk menuliskan deret semacam (9) digunakan konvensi penjumlahan Einstein dengan i adalah bilangan biner antara 0 hingga $m-1$.

Metode Multigrid

Masing-masing suku dari persamaan integral Volterra (4) dapat diekspansikan ke dalam deret fungsi Walsh berhingga (m suku). Ekspansi dengan menggunakan deret fungsi Walsh menghasilkan sistem persamaan linear.

$$\mathbf{c}_m = \mathbf{g}_m + \mathbf{K}_m \mathbf{c}_m \quad \text{atau} \quad \mathbf{A}_m \mathbf{c}_m = \mathbf{g}_m, \quad (10)$$

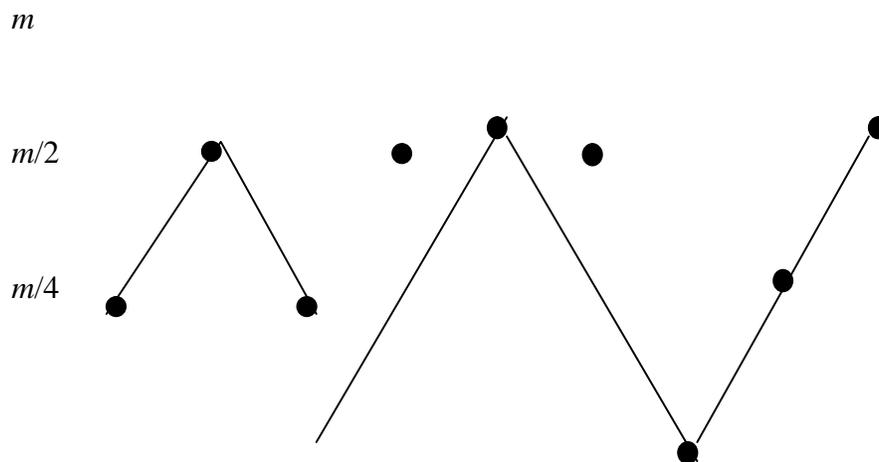
dengan $\mathbf{A}_m = \mathbf{I}_m - \mathbf{K}_m$, dan \mathbf{I}_m adalah matriks identitas serta \mathbf{K}_m adalah matriks orde m dari \mathbf{K} . Dengan demikian menyelesaikan persamaan (10) identik dengan menyelesaikan persamaan (4) dengan menggunakan metode fungsi Walsh.

Selanjutnya didefinisikan W_m sebagai grid berukuran m , yaitu domain pada $[0,1]$ pada fungsi Walsh dibagi menjadi m subinterval dengan masing-masing berukuran $1/m$. Grid W_m selanjutnya disebut dengan grid level m . Notasi \mathbf{c} dan \mathbf{v} menunjukkan penyelesaian “eksak” dan pendekatan. Huruf tebal, \mathbf{v} misalnya, dipakai untuk menyajikan vektor. Penyelesaian pendekatan \mathbf{v} pada grid level tertentu, misal pada grid level m , ditulis dengan \mathbf{v}_m . Sedangkan elemen ke- i dari vektor tersebut ditulis dengan $v_{m,i}$.

Dalam penelitian ini digunakan galat dan residual, yang dinotasikan dengan \mathbf{e} dan \mathbf{r} , untuk mengetahui “kebaikan” dari penyelesaian pendekatan. Galat dan residual pada grid level m didefinisikan dengan $\mathbf{e}_m = \mathbf{c}_m - \mathbf{v}_m$ dan $\mathbf{r}_m = \mathbf{g}_m - A_m \mathbf{v}_m$. Dengan demikian, penyelesaian $A_m \mathbf{v}_m = \mathbf{g}_m$ dengan pendekatan awal \mathbf{c}_m ekuivalen dengan penyelesaian $A_m \mathbf{c}_m = \mathbf{r}_m$ dengan pendekatan awal $\mathbf{c}_m = 0$.

Full Multigrid V (FMV)-cycle

Pada *V-cycle* hanya digunakan koreksi grid *coarse* untuk mendapatkan penyelesaian pendekatan. Sedangkan ide iterasi tersarang belum dimanfaatkan. Iterasi tersarang digunakan untuk mendapatkan nilai awal yang baik bagi grid *fine*. Pada algoritma *Full Multigrid V-cycle*, koreksi grid *coarse* dan ide iterasi tersarang digunakan secara bersama-sama. Dengan demikian penyelesaian yang diperoleh akan lebih efisien. *Skema Full Multigrid V-cycle* tiga level ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2: Skema *Full Multigrid V-cycle* tiga level

Briggs (1988) menyajikan algoritma *FMV-cycle* sebagai berikut.

- Algoritma *FMV-cycle*

$$\mathbf{v}_m \leftarrow FMV(\mathbf{v}_m, \mathbf{g}_m)$$

Step 1: Apabila W_m grid *coarsest*, lanjutkan step 3

$$\text{Jika tidak} \quad \mathbf{g}_{m/2} \leftarrow \mathbf{I}_m^{m/2} (\mathbf{g}_m - A_m \mathbf{v}_m)$$

$$\mathbf{v}_{m/2} \leftarrow 0$$

$$\mathbf{v}_{m/2} \leftarrow FMV(\mathbf{v}_{m/2}, \mathbf{g}_{m/2})$$

Step 2: Lakukan $\mathbf{v}_m \leftarrow \mathbf{v}_m + \mathbf{I}_{m/2}^m \mathbf{v}_{m/2}$

Step 3: Lakukan $\mathbf{v}_m \leftarrow MV_m(\mathbf{v}_m, \mathbf{g}_m) l_0$ kali.

Unit Work Algoritma *FMV-cycle*

Diperhatikan grid dimensi satu yang terdiri dari $m=2^n$ titik dengan n adalah bilangan bulat positif. Diasumsikan untuk melakukan sekali *sweep* untuk menyelesaikan sistem persamaan linear pada grid *finest* (berorde $m \times m$), misal m , memerlukan m^2 operasi aritmetik. Briggs (1988) menyatakan satuan untuk melakukan m^2 operasi aritmetik dengan *unit work* (UW). Selanjutnya, pada $W_{m/2}$ dengan matriks orde $m/2 \times m/2$, untuk melakukan sekali *sweep* diperlukan $m^2/4$ operasi aritmetik yang ekuivalen dengan $1/4$ UW. Demikian seterusnya, sehingga operasi aritmetik yang diperlukan pada grid level tertentu adalah $1/4$ operasi aritmetik dari grid level sebelumnya.

Pada metode *Full Multigrid V-cycle*, setiap level dikunjungi sebanyak $2n$ untuk $n \hat{=} N$. Dengan demikian biaya perhitungan untuk melakukan sekali *sweep* *Full Multigrid V-cycle* dengan masing-masing level diperlukan sekali iterasi adalah

$$m^2 \left(2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + 6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots \right) \approx \frac{7}{2} UW.$$

METODE PENELITIAN

Metode penelitian ini adalah eksperimen secara numerik, artinya algoritma yang telah diturunkan selanjutnya diterapkan dalam kasus-kasus persamaan

integral Volterra linear yang telah dipilih. Dalam penelitian ini dipilih kasus yang penyelesaian eksaknya telah tersedia, khususnya kasus-kasus yang telah diselesaikan dengan metode *V-cycle*. Selanjutnya hasil numerik dari metode *FMV-cycle* dibandingkan dengan hasil numerik dari *V-cycle*. Dengan demikian keefisienan metode yang baru dikembangkan dapat ditunjukkan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam penelitian ini skema *FMV-cycle* diterapkan pada dua kasus persamaan integral Volterra linear yang telah diselesaikan oleh Widyaningsih dkk. (2001) dengan menggunakan skema *V-cycle*. Selanjutnya akan dibandingkan keefisienan kedua skema multigrid tersebut. Untuk menyelesaikan kedua kasus dengan menggunakan *software Matlab*.

Kasus 1.

Diberikan persamaan integral Volterra linear yang merupakan persamaan tipe convolution yang diambil dari Jerri (1985)

$$y(x) = x - \int_0^x (x-t)y(t)dt \quad (11)$$

yang mempunyai penyelesaian eksak $y(x) = \sin x$. Persamaan (12) dapat ditulis dalam bentuk

$$y(x) = x - x \int_0^x y(t)dt + \int_0^x ty(t)dt \quad (12)$$

Dengan mengekspansikan masing-masing suku dari persamaan (12) dengan deret Walsh

$$y(x) \approx \sum_{i=0}^{m-1} c_i W_i(x), \quad x \approx \sum_{i=0}^{m-1} h_i W_i(x)$$

persamaan (12) dapat disajikan dalam bentuk

$$c_i W_i(x) = h_i W_i(x) - h_i W_i(x) \int_0^x c_j W_j(t)dt + \int_0^x h_i W_i(t) c_j W_j(t)dt$$

Dengan menggunakan sifat perkalian fungsi Walsh dan pendekatan integral dari Blyth (1997, 166-172), persamaan (12) dapat dituliskan sebagai berikut

$$c_i W_i(x) = h_i W_i(x) - h_{i \oplus k} [p_{kj}^T] c_j W_k(x) + [p_{sr}^T] h_{r \oplus j} c_j W_s(x) \quad (13)$$

Persamaan (13) membentuk sistem persamaan linear

$$c_m = h_m - H_m P_m^T c_m + P_m^T H_m c_m \quad (14)$$

dengan $H_m = [h_{ij}] = [h_{i \oplus j}]$ dimana $i, j = 0, 1, \dots, m-1$ ditulis sebagai bilangan biner dengan \oplus adalah operasi penjumlahan modulo 2. Untuk menyelesaikan persamaan (16) digunakan metode iterasi Picard

$$c_m^{[i+1]} = h_m - (H_m P_m^T - P_m^T H_m) c_m^{[i]}$$

dengan nilai awal $c_m^{[0]} = [1, \underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_{m-1}]$.

Selanjutnya diterapkan skema *FMV-cycle* untuk memperbaiki penyelesaian dari metode iterasi Picard. Dalam penelitian ini digunakan level tertinggi $m = 64$. Unit work dan galat iterasi dari penyelesaian persamaan (14) disajikan dalam tabel 1.

Tabel 1. Unit Work dan Galat Iterasi Penyelesaian Persamaan (14)

Metode	Unit Work	Galat Iterasi
FMV-cycle 5 level	3.5	1.4819×10^{-13}
FMV-cycle 4 level	3.44	8.0915×10^{-13}
FMV-cycle 3 level	3.1875	3.1365×10^{-13}
FMV-cycle 2 level	2.5	7.2484×10^{-13}
Iterasi Picard	6.0	7.6710×10^{-13}

Tabel 1 menunjukkan bahwa *unit work* yang diperlukan *FMV-cycle* untuk mencapai galat toleransi sebesar 10^{-13} lebih kecil dibandingkan apabila digunakan metode iterasi Picard. Tampak pula bahwa *FMV-cycle 2 level* memberikan *unit work* terkecil apabila dibandingkan dengan *FMV-cycle 5 level*, *4 level* maupun *3 level*, akan tetapi perbedaan *unit work*nya tersebut tidak terlalu besar. Dengan demikian *FMV-cycle 2 level* merupakan pilihan yang cukup baik untuk menyelesaikan persamaan (14).

Unit work yang diperlukan oleh metode Iterasi Picard pada $m = 64$ sebesar 6.0. Sedangkan pada *FMV-cycle* diperlukan sebesar 2.5. Dengan demikian skema *FMV-cycle* mampu meningkatkan efisiensi sebesar 3.5 UW.

Berdasarkan *unit work* yang dihasilkan oleh masing-masing metode pada kasus 1, *FMV-cycle* lebih efisien dibandingkan metode iterasi Picard. Dengan demikian *FMV-cycle* merupakan pilihan terbaik untuk menyelesaikan persamaan integral (12) dibandingkan metode iterasi Picard.

Selanjutnya penyelesaian yang dilakukan dengan *FMV-cycle* dibandingkan dengan penyelesaian *V-cycle* yang telah dilakukan oleh Widyaningsih dkk. (2001) untuk mengetahui keefisienan kedua skema multigrid tersebut. Perbandingan *unit work* kedua skema multigrid untuk mencapai galat toleransi 10^{-13} ditunjukkan pada tabel 2.

Tabel 2. Unit Work Skema *FMV-cycle* dan *V-cycle*

Level	Unit Work	
	<i>V-cycle</i>	<i>FMV-cycle</i>
5	2.7	3.5
4	2.66	3.44
3	2.56	3.2
2	4.5	2.5

Tabel 2 menunjukkan bahwa pada level 3, 4, dan 5 skema *V-cycle* menunjukkan tingkat efisiensi yang lebih baik dibandingkan *FMV-cycle*, akan tetapi perbedaan *unit work* kedua skema tersebut kecil. Sedangkan pada level 2 skema *FMV-cycle* menunjukkan tingkat efisiensi yang lebih baik dibandingkan *V-cycle* dengan perbedaan *unit work* yang cukup signifikan yaitu sebesar 2 UW. Apabila digunakan pilihan 2 level untuk menyelesaikan persamaan integral (14) maka *FMV-cycle* menunjukkan tingkat efisiensi yang lebih baik dibandingkan *V-cycle*. Dengan kata lain, penggunaan skema *FMV-cycle* lebih akurat dibandingkan *V-cycle*.

Kasus 2.

Diberikan persamaan integral Volterra linear yang diambil dari Jerri (1985)

$$y(x) = \sin x + 2 \int_0^x \cos(x-t) y(t) dt \quad (15)$$

yang mempunyai penyelesaian eksak $y(x) = xe^x$. Persamaan (15) dapat ditulis dalam bentuk

$$y(x) = \sin x + 2 \cos x \int_0^x \cos t y(t) dt + 2 \sin x \int_0^x \sin t y(t) dt \quad (16)$$

Dengan mengekspansikan masing-masing suku dari persamaan (16) dengan deret Walsh

$$y(x) \approx \sum_{i=0}^{m-1} c_i W_i(x), \quad \sin x \approx \sum_{i=0}^{m-1} q_i W_i(x), \quad \cos x \approx \sum_{i=0}^{m-1} l_i W_i(x)$$

menghasilkan sistem persamaan linear

$$c_m = q_m + (2L_m P_m^T L_m + 2Q_m P_m^T Q_m) c_m \quad (17)$$

dengan $L_m = [l_{ij}] = [l_{i \oplus j}]$ dan $Q_m = [q_{ij}] = [q_{i \oplus j}]$ dimana $i, j = 0, 1, \dots, m-1$ ditulis sebagai bilangan biner dengan \oplus adalah operasi penjumlahan modulo 2. Unit work dan galat iterasi dari penyelesaian persamaan (17) disajikan dalam tabel 3.

Tabel 3. Unit Work dan Galat Iterasi Penyelesaian Persamaan (17)

Metode	Unit Work	Galat Iterasi
FMV-cycle 5 level	3.5	4.0211×10^{-8}
FMV-cycle 4 level	3.44	6.7576×10^{-8}
FMV-cycle 3 level	3.1875	1.6669×10^{-7}
FMV-cycle 2 level	2.5	4.3217×10^{-8}
Iterasi Picard	5.0	6.6565×10^{-7}

Tabel 3 menunjukkan bahwa *unit work* yang diperlukan FMV-cycle untuk mencapai galat toleransi sebesar 10^{-7} lebih kecil dibandingkan apabila digunakan metode iterasi Picard. Tampak pula bahwa FMV-cycle 2 level memberikan *unit work* terkecil apabila dibandingkan dengan FMV-cycle 5 level, 4 level maupun 3 level, akan tetapi perbedaan *unit work*nya tersebut tidak terlalu besar. Dengan demikian FMV-cycle 2 level merupakan pilihan yang cukup baik untuk menyelesaikan persamaan (17).

Unit work yang diperlukan oleh metode Iterasi Picard pada $m = 64$ sebesar 5.0. dengan galat iterasi 6.6565×10^{-7} . Sedangkan pada FMV-cycle hanya diperlukan sebesar 2.5 UW untuk mendapatkan galat iterasi sebesar 4.3217×10^{-8} . Dengan demikian skema FMV-cycle mampu meningkatkan efisiensi sebesar 2.5 UW.

Berdasarkan *unit work* yang dihasilkan oleh masing-masing metode pada kasus 1, *FMV-cycle* lebih efisien dibandingkan metode iterasi Picard. Dengan demikian *FMV-cycle* merupakan pilihan terbaik untuk menyelesaikan persamaan integral (17) dibandingkan metode iterasi Picard.

Selanjutnya penyelesaian yang dilakukan dengan *FMV-cycle* dibandingkan dengan penyelesaian *V-cycle* yang telah dilakukan oleh Widyarningsih dkk. (2001) untuk mengetahui tingkat efisiensi kedua skema multigrid tersebut. Perbandingan *unit work* kedua skema multigrid untuk mencapai galat toleransi 10^{-7} disajikan dalam tabel 4.

Tabel 4: Unit Work Skema *FMV-cycle* dan *V-cycle*

Level	Unit Work	
	<i>V-cycle</i>	<i>FMV-cycle</i>
2	2.66	2.44
3	1.925	2.5
4	0.8	0.25

SIMPULAN DAN SARAN

Ekspirimen numerik menunjukkan bahwa penggabungan fungsi Walsh dan skema multigrid khususnya *FMV-cycle* mampu meningkatkan efisiensi penyelesaian persamaan integral Volterra linear dibandingkan apabila digunakan

metode iterasi Picard. Lebih jauh, penggunaan skema FMV-cycle pada level tertentu (level 2 pada kasus 1 dan level 3 pada kasus 2) memberikan tingkat efisiensi yang lebih baik dibandingkan skema V-cycle.

Penelitian lanjutan yang dapat disarankan adalah pengembangan algoritma penyelesaian persamaan integral Volterra yang lebih efektif dan efisien. Penelitian tentang kestabilan metode multigrid juga merupakan bidang yang masih terbuka luas. Selain itu perluasan kasus persamaan integral Volterra yang diselesaikan akan memberikan kesimpulan yang lebih luas.

UCAPAN TERIMAKASIH

Peneliti ucapkan terimakasih khususnya kepada Lembaga Penelitian Univ. Muhammadiyah Surakarta yang telah membiayai penelitian ini. Selanjutnya kepada Drs. Budi Murtiyasa, M.Kom yang telah bersedia menjadi konsultan untuk pembuatan program dengan matlab. Kepada para dosen senior dan teman sejawat yang telah memberikan masukan-masukan dalam seminar penelitian saya ucapkan banyak terimakasih.

DAFTAR PUSTAKA

- Beauchamp, K. G., 1975, *Walsh Function and Their Applications*, Academic Press, London.
- Blyth, W. F., 1997, *Efficient and Accurate Parameter Estimation for linear, Bilinear and Nonlinear Systems using Walsh Function*, Proceeding of Workshop on Scientific Computing Hong Kong 1997, editor G. H. Golub, S. H. Lui, F. T. Luk, dan R. J. Plemmons, Springer, Hal: 166-172.
- Blyth, W. F., May, R. L., and Widyaningsih, P., 1997, *The Solution of Integral Equations using Walsh Function and A Multigrid Approach*, Computational Techniques and Applications: CTAC97 Proceedings of Eight Biennial Conference, editor J. Noye, M. Tuebner, and A. Gill, Computational Mathematics Group, World Scientific Publishing Co, Hal: 99-106.
- Blyth, W. F. and Uljanov, V., 1996, *Numerical Solution of Weakly Singular Fredholm Integral Equations using Walsh Functions*, Computational Techniques and Applications: CTAC95, Hal: 137-143.
- Briggs, B. L., 1988, *A Multigrid Tutorial*, Second ed., Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.

- Chen, C. F. and Hsiao, C. H., 1975, *A Walsh Series Direct Method for Solving Variational Problems*, Journal of The Franklin Institute, Vol: 4, No: 300, Hal: 265-280.
- Corrington, M. S., 1973, *Solution of Differential Equations with Walsh Function*, IEEE Transactions on Circuit Theory, No: 5, Hal: 470-476.
- Golberg, M. A., 1978, *Solution Methods for Integral Equations: A Survey of Numerical Methods for Integral Equations*, Plenum Press, New York, Hal: 1-58.
- Jerri, A. J., 1985, *Introduction to Integral Equations with Applications*, Marcel Dekker Inc., New York.
- Paley, R. E. A., 1932, *A Remarkable Series of Orthogonal Functions*, Proceeding London Mathematics Society, Vol: 34, Hal: 241-279.
- Sloss, B. G., and Blyth, W. F., 1984, *A-priori Error Estimates for Corrington's Walsh Function Method*, Journal of Franklin Institute, Vol: 331B, No: 3, Hal: 273-283.
- Uljanov, V., and Blyth, W. F., 1996, *Numerical Solution of Urysohn Integral Equation using Walsh Function*, The Role of Mathematics in Modern Engineering: first Biennial Engineering Mathematics Conference: AEMC94 (Alan K. Easton and Joseph M. Steiner, eds), The Engineering Mathematics Group (EMG), Australian and New Zealand Industrial and Applied Mathematics (ANZIAM), Australian Mathematics Society and Student Litterature, Hal: 621-628.
- Walsh, J. L., 1923, *A Closed Set of Normal Orthogonal Functions*, American Journal of Mathematics, No: 45, Hal: 5-24.
- Widyaningsih, P., 2000, *Penyelesaian Persamaan Integral Volterra Linear dengan Metode Fungsi Walsh dan Ekstrapolasi Richardson*, Makalah dipresentasikan pada Seminar Nasional Matematika yang diselenggarakan oleh HAMPPS UGM Yogyakarta, September.
- Widyaningsih, P., 2000, *Efficiency of Walsh Function Method in Solving Linear Volterra Integral Equations using V-cycle*, MIHMI, Vol: 6, No: 3, Hal: 155-161.
- Widyaningsih, P., 2001, *Penyelesaian Persamaan Integral Volterra Nonlinear dengan Fungsi Walsh dan Ekstrapolasi Richardson*, Makalah disampaikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Konferda Matematika VII HimMi Jateng-DIY di UII Yogyakarta, Februari.

- Widyaningsih, P. dan Masduki., 2001, *Penerapan Metode Fungsi Walsh dan Ekstrapolasi Richardson untuk Menyelesaikan Persamaan Integral Volterra Nonlinear*, Makalah disampaikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Konferda Matematika VII HimMi Jateng-DIY di UII Yogyakarta, Februari.
- Widyaningsih, P., Sutrima, dan Pratiwi, H., 2001, *Penyelesaian Persamaan Integral Volterra dengan Metode Fungsi Walsh dan Pendekatan Multigrid*, Technical Report Jurusan Matematika FMIPA UNS Surakarta.