

**PENERAPAN METODE BEDA HINGGA ORDER EMPAT  
DAN FULL MULTIGRID UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN  
POISSON DAN LAPLACE**

**APPLICATION OF FOURTH ORDER FINITE DIFFERENCE METHOD  
AND FULL MULTIGRID TO SOLVE POISSON AND LAPLACE EQUATION**

Rita P Khotimah dan Masduki

Jurusan Pendidikan Matematika FKIP  
Universitas Muhammadiyah Surakarta  
Jl. A. Yani Tromol Pos I Pabelan Kartasura Surakarta  
Telp. (0271) 717417 ext 171

**ABSTRAK**

Penelitian ini bertujuan untuk mencari algoritma yang akurat dan efisien dalam menyelesaikan persamaan Poisson dan Laplace. Penggunaan metode beda hingga order empat bertujuan agar penyelesaian yang dihasilkan lebih akurat. Penyelesaian persamaan Poisson dan Laplace dengan menggunakan metode beda hingga menghasilkan sistem persamaan linear. Untuk menyelesaikan persamaan linear yang dihasilkan digunakan salah satu metode penyelesaian iteratif yaitu metode Jacobi. Untuk sistem yang besar, penyelesaian secara iteratif memerlukan operasi aritmatika yang besar pula. Akibatnya penyelesaian dengan menggunakan metode iteratif menjadi tidak efisien. Pada penelitian ini untuk meningkatkan efisiensi penyelesaian secara iteratif digunakan teknik Full Multigrid. Teknik full multigrid digunakan untuk mendapatkan nilai awal yang "baik" bagi proses penyelesaian secara iterasi. Dari hasil eksperimen numerik untuk lima kasus diperoleh bahwa penyelesaian persamaan Poisson dan Laplace dengan menggunakan metode beda hingga dan multigrid lebih akurat dan efisien. Pada kasus 1, efisiensi yang dihasilkan oleh metode beda hingga dan full multigrid untuk  $N=16$  dan  $N=32$  masing-masing 87% dan 97%. Pada Kasus 2, efisiensi yang dihasilkan oleh metode beda hingga dan full multigrid untuk  $N=16$  dan  $N=32$  masing-masing 86% dan 96%. Pada Kasus 3, efisiensi yang dihasilkan oleh metode beda hingga dan full multigrid untuk  $N=16$  dan  $N=32$  masing-masing 87% dan 96.5%. Pada Kasus 4, efisiensi yang dihasilkan oleh metode beda hingga dan full multigrid untuk  $N=16$  dan  $N=32$  masing-masing 85% dan 95.5%. Sedangkan pada Kasus 5, efisiensi yang dihasilkan oleh metode beda hingga dan full multigrid untuk  $N=16$  dan  $N=32$  masing-masing 98.7% dan 99.6%.

**Kata Kunci:** Metode beda hingga order empat, full multigrid, persamaan Poisson, dan persamaan Laplace.

**ABSTRACT**

*This research addresses to find the accurate and efficient algorithm to solve Poisson and Laplace equations. The fourth order finite difference method used to get more accurate solution. If we solve Poisson and Laplace equations with finite difference*

method, we get the linear equations system. Then, to solve linear equations system we used Jacobi method. For large scale systems, the iterative solution need much more arithmetic operation. Then, this method will be less efficient. In this research, we use full multigrid technique to improve the efficient solution. Full multigrid used to get a good initial value in this iterative. Numerical experiments show that the Solution of Poisson and Laplace equations more accurate and efficient than the Jacobi method. in first case, the efficiency of this method is about 87% and 97% for  $N=16$  and  $N=32$ . in second case, the efficiency of this method is about 86% and 96% for  $N=16$  and  $N=32$ . in third case, the efficiency of this method is about 87% and 96.5% for  $N=16$  and  $N=32$ . in fourth case, the efficiency of this method is about 85% and 96.5% for  $N=16$  and  $N=32$ . In fifth case, the efficiency of this method is about 98.7% and 99.6% for  $N=16$  and  $N=32$ .

**Keywords:** Fourth order finite difference method, full multigrid, Poisson equation, and Laplace equation.

## PENDAHULUAN

Persamaan diferensial parsial (PDP) merupakan formulasi model matematika dari suatu fenomena alam. Fenomena aliran panas pada pelat besi, aliran air pada suatu pipa, perkembangan bakteri, bergemanya senar pada gitar dan lain sebagainya merupakan fenomena-fenomena yang dapat diformulasikan secara matematika dalam bentuk persamaan diferensial. Untuk mendapatkan penyelesaian eksplisit dari PDP dapat dilakukan dengan metode pemisahan variabel, Sturm Liouville, D'Alembert, deret Fourier maupun transformasi Laplace. Tetapi hanya sedikit model PDP yang dapat dicari penyelesaian eksplisitnya. Oleh karena itu diperlukan penyelesaian secara numerik untuk mendapatkan penyelesaian pendekatan.

Spotz dan Carey (1996, 235-243) menggunakan metode beda hingga order tinggi untuk menyelesaikan Persamaan Poisson dimensi tiga. Spotz dan Carey menurunkan skema metode beda hingga order empat dan order enam untuk menyelesaikan Persamaan Poisson dimensi

tiga. Spotz dan Carey membandingkan hasil penyelesaian secara numerik dengan metode beda hingga standar yaitu order dua. Dari eksperimen numerik diperoleh bahwa penyelesaian dengan metode beda hingga order tinggi memberikan penyelesaian yang lebih akurat dibandingkan dengan metode beda hingga standar order dua. Selain itu Zhuang dan Sun (2001, 79-94) juga menggunakan metode beda hingga order empat untuk menyelesaikan Persamaan Poisson Singular. Dari eksperimen numerik diperoleh bahwa penggunaan metode beda hingga order empat lebih akurat dibandingkan metode beda hingga order dua. Tetapi sejauh ini teknik iterasi multigrid belum dimanfaatkan.

Gupta et. al. (1997, 226-232) menggunakan algoritma multigrid *V-cycle* untuk menyelesaikan Persamaan Poisson. Gupta et. al. menggunakan metode beda hingga order dua dan order empat sebagai metode diskritisasi persamaan diferensialnya. Dalam eksperimennya, Gupta et. al. menggunakan beberapa variasi tehnik ordering dan operator restriksi. Tehnik ordering yang digunakan adalah *red-black*, *four color*, dan *lexicography*. Sedangkan operator

restriksi yang digunakan adalah *full weighting* dan *full injection*. Hasil eksperimen numerik menunjukkan bahwa penggunaan metode beda hingga order empat yang dikombinasikan dengan operator restriksi *full weighting* lebih akurat daripada metode beda hingga order dua. Zhang (1998, 449-461) memperluas penggunaan metode beda hingga order empat untuk menyelesaikan Persamaan Poisson dimensi tiga. Zhang juga menggunakan algoritma multigrid *V-cycle* untuk menyelesaikan Persamaan Poisson dimensi tiga.

Power (1987) memberikan bentuk umum Persamaan Poisson dan Laplace dimensi dua sebagai berikut

$$\text{Persamaan Poisson } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (1)$$

$$\text{Persamaan Laplace } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (2)$$

$$\text{dengan } u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega,$$

dimana  $\Omega$  adalah domain persegi, dan adalah batas dari domain. Diasumsikan  $f$  fungsi yang *smooth*. Persamaan (1) dan (2) sering digunakan untuk menggambarkan fenomena gravitasi, potensial elektrostatik, aliran cairan, dan distribusi suhu.

Untuk menyelesaikan Persamaan (1) digunakan skema diskritisasi order empat berikut:

$$(3)$$

dengan koefisien  $\alpha_i, i = 0, 1, 2, \dots, 8$  adalah

$$\begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_2 & \alpha_5 \\ \alpha_3 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_7 & \alpha_4 & \alpha_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -20 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots (4)$$

Ini berarti penyelesaian Persamaan (1.1) dengan skema diskritisasi order empat (1.3) ekuivalen dengan penyelesaian sistem Persamaan linier

$$Au = b, \quad (5)$$

dengan

$$u = [u_{11}, u_{21}, \dots, u_{m1}, u_{12}, u_{22}, \dots, u_{m2}, \dots, u_{1m}, u_{2m}, \dots, u_{mm}]^T,$$

$$b = [b_{11}, b_{21}, \dots, b_{m1}, b_{12}, b_{22}, \dots, b_{m2}, \dots, b_{1m}, b_{2m}, \dots, b_{mm}]^T,$$

dan

$$A = \begin{bmatrix} A_D & A_U & O & \dots & \dots & O \\ A_L & A_D & A_U & \ddots & & \vdots \\ O & A_L & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & A_U & O \\ \vdots & & \ddots & A_L & A_D & A_U \\ O & \dots & \dots & O & A_L & A_D \end{bmatrix}, \quad (6)$$

berukuran  $m^2 \times m^2$  dengan  $O$  adalah matrik nol,

$$A_D = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_0 & \alpha_1 & 0 & & \vdots \\ 0 & \alpha_3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \alpha_1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \alpha_3 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_3 & \alpha_0 \end{bmatrix},$$

$$A_U = \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_5 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \alpha_6 & \alpha_2 & \alpha_5 & 0 & & \vdots \\ 0 & \alpha_6 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \alpha_5 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \alpha_6 & \alpha_2 & \alpha_5 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_6 & \alpha_2 \end{bmatrix},$$

$$\text{dan } A_L = \begin{bmatrix} \alpha_4 & \alpha_8 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \alpha_7 & \alpha_4 & \alpha_8 & 0 & & \vdots \\ 0 & \alpha_7 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \alpha_8 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \alpha_7 & \alpha_4 & \alpha_8 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_7 & \alpha_4 \end{bmatrix},$$

masing-masing berukuran  $m \times m$ .

## METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka dengan dukungan implementasi program komputasi. Dengan studi pustaka diharapkan diperoleh berbagai informasi yang berhubungan dengan Persamaan Poisson dan Laplace, Metode Beda Hingga, Full Multigrid dan berbagai algoritma dalam metode multigrid. Penggunaan program komputasi dimaksudkan untuk mengetahui efisiensi dan akurasi algoritma baru yang diturunkan.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### Kasus 1.

Diberikan persamaan Poisson (7) dengan syarat batas tipe Dirichlet (dalam Smith, 1971)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (7)$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega.$$

Pada penelitian ini digunakan domain dan ukuran grid  $N=16$  dan  $N=32$ .

Nilai awal yang digunakan pada proses iterasi adalah  $u(x, y) = 0$ . Proses iterasi dihentikan jika  $\|u^{[n+1]} - u^{[n]}\|_\infty < 10^{-5}$ . Hasil eksperimen numerik disajikan pada Tabel 1.

Pada Tabel 1. disajikan banyaknya iterasi, unit work, serta error yang dihasilkan. Bilangan di dalam kurung menunjukkan banyaknya unit work yang diperlukan pada tiap metode untuk masing-masing level. Untuk  $N=16$ , penyelesaian Persamaan (7) dengan menggunakan Full Multigrid memberikan error iterasi lebih kecil dibandingkan dengan penyelesaian dengan metode iterasi Jacobi. Dengan demikian penyelesaian Persamaan (7) dengan Full Multigrid lebih akurat dibandingkan menggunakan metode iterasi Jacobi. Selanjutnya dari Tabel 1 juga tampak bahwa unit work penyelesaian Persamaan (7) dengan menggunakan Full Multigrid lebih kecil dibandingkan penyelesaian dengan iterasi Jacobi. Penyelesaian dengan Full Multigrid memberikan efisiensi sebesar 87%.

Selanjutnya untuk  $N=32$ , penyelesaian Persamaan (7) dengan menggu-

Tabel 1. Error Iterasi, Jumlah Iterasi, dan Unit Work Penyelesaian Persamaan (7)

N	Iterasi Jacobi		Full Multigrid	
	Error iterasi	Iterasi (UW)	Error iterasi	Iterasi (UW)
16	$9.9096 \times 10^{-6}$	418 (418)	$3.7542 \times 10^{-6}$	23 (52.3)
32	$9.9869 \times 10^{-6}$	1675 (1675)	$7.0657 \times 10^{-7}$	24 (54.6)

nakan Full Multigrid juga memberikan error iterasi lebih kecil dibandingkan dengan penyelesaian dengan metode iterasi Jacobi. Dengan demikian penyelesaian Persamaan (7) dengan Full Multigrid lebih akurat dibandingkan dengan menggunakan metode iterasi Jacobi. Selanjutnya dari Tabel 1 juga tampak bahwa unit work penyelesaian Persamaan (7) dengan menggunakan Full Multigrid lebih kecil dibandingkan penyelesaian dengan iterasi Jacobi. Penyelesaian dengan Full Multigrid memberikan efisiensi sebesar 97%. Dengan demikian penyelesaian Persamaan (7) dengan menggunakan full multigrid lebih akurat dan efisien dibandingkan dengan metode iterasi Jacobi.

### Kasus 2.

Diberikan persamaan Poisson (8) dengan syarat batas tipe Dirichlet (dalam Nakamura, 1991)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (8)$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega.$$

Nilai awal yang digunakan pada proses iterasi adalah  $u(x, y) = 0$ . Hasil eksperimen numerik disajikan pada Tabel 2.

Untuk  $N=16$ , penyelesaian Persamaan (3.2) dengan menggunakan Full Multigrid memberikan error iterasi lebih kecil dibandingkan penyelesaian dengan metode iterasi Jacobi. Dengan demikian penyelesaian Persamaan (8) dengan Full Multigrid lebih akurat dibandingkan dengan menggunakan metode iterasi Jacobi. Selanjutnya dari Tabel 2 juga tampak bahwa unit work penyelesaian Persamaan (8) dengan menggunakan Full Multigrid lebih kecil dibandingkan penyelesaian dengan iterasi Jacobi. Penyelesaian dengan Full Multigrid memberikan efisiensi sebesar 86%.

Selanjutnya untuk  $N=32$ , penyelesaian Persamaan (8) dengan menggunakan Full Multigrid juga memberikan error iterasi lebih kecil dibandingkan dengan penyelesaian dengan metode iterasi Jacobi. Dengan demikian penyelesaian Persamaan (8) dengan Full Multigrid lebih akurat dibandingkan dengan menggunakan metode iterasi Jacobi. Selanjutnya dari Tabel 2 juga tampak bahwa unit work penyelesaian Persamaan (8) dengan menggunakan Full Multigrid lebih kecil dibandingkan penyelesaian dengan iterasi Jacobi. Penyelesaian dengan Full Multigrid memberikan efisiensi sebesar 96%. Dengan demikian penyelesaian Persamaan (8) dengan menggunakan full multigrid lebih akurat dan efisien dibandingkan dengan metode iterasi Jacobi.

Tabel 2. Error iterasi, jumlah iterasi, dan unit work penyelesaian Persamaan (8)

N	Iterasi Jacobi		Full Multigrid	
	Error iterasi	Iterasi (UW)	Error iterasi	Iterasi (UW)
16	$9.9534 \times 10^{-6}$	388 (388)	$6.7702 \times 10^{-6}$	23 (52.3)
32	$9.9462 \times 10^{-6}$	1556 (1556)	$3.5328 \times 10^{-7}$	24 (54.6)

Tabel 3. Error iterasi, jumlah iterasi, dan unit work penyelesaian Persamaan (9)

N	Iterasi Jacobi		Full Multigrid	
	Error iterasi	Iterasi (UW)	Error iterasi	Iterasi (UW)
16	$9.7722 \times 10^{-6}$	378 (378)	$5.2955 \times 10^{-6}$	22 (50.1)
32	$9.9899 \times 10^{-6}$	1512 (1512)	$8.022 \times 10^{-7}$	23 (52.3)

### Kasus 3.

Diberikan persamaan Poisson (9) dengan syarat batas tipe Dirichlet (dalam Nakamura, 1991)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{-0.05 \sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$(x, y) \in \Omega, \quad (9)$$

$$u(x, y) = 0,$$

$$(x, y) \in \partial\Omega.$$

Nilai awal yang digunakan pada proses iterasi adalah  $u(x, y) = 0$ . Hasil eksperimen numerik disajikan pada Tabel 3 berikut:

Untuk  $N=16$ , penyelesaian Persamaan (9) dengan menggunakan Full Multigrid memberikan error iterasi lebih kecil dibandingkan penyelesaian dengan metode iterasi Jacobi. Dengan demikian penyelesaian Persamaan (9) dengan Full Multigrid lebih akurat dibandingkan dengan menggunakan metode iterasi Jacobi. Selanjutnya dari Tabel 3.3 juga tampak bahwa unit work penyelesaian Persamaan (9) dengan menggunakan Full Multigrid lebih kecil dibandingkan penyelesaian dengan iterasi Jacobi. Penyelesaian dengan Full Multigrid memberikan efisiensi sebesar 87%.

Selanjutnya untuk  $N=32$ , penyelesaian Persamaan (9) dengan menggunakan Full Multigrid juga memberikan error iterasi lebih kecil dibandingkan dengan penyelesaian dengan metode iterasi Jacobi. Dengan demikian penyelesaian Persamaan (9) dengan Full Multigrid lebih akurat dibandingkan dengan menggunakan metode iterasi Jacobi. Selanjutnya dari Tabel 3 juga tampak bahwa unit work penyelesaian Persamaan (9) dengan menggunakan Full Multigrid lebih kecil dibandingkan penyelesaian dengan iterasi Jacobi. Penyelesaian dengan Full Multigrid memberikan efisiensi sebesar 96.5%. Dengan demikian penyelesaian Persamaan (9) dengan menggunakan full multigrid lebih akurat dan efisien dibandingkan dengan metode iterasi Jacobi.

### SIMPULAN

Dari hasil eksperimen numerik dapat disimpulkan bahwa penyelesaian persamaan Poisson dan Laplace dengan metode beda hingga order empat dan full multigrid lebih akurat dan efisien dibandingkan penyelesaian dengan metode Jacobi. Lebih jauh, algoritma multigrid memberikan efisiensi 87% untuk  $N=16$  dan 96 - 97% untuk  $N=32$ .

## DAFTAR PUSTAKA

- Erturk, E., and Gokcol, G. 2005. *Fourth Order Compact Formulation of Navier Stokes Equations and Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers*. Submitted for International Journal for Numerical Methods in Fluids.
- Gupta, M. M., Kouatchou, J., Zhang, J. 1997. Comparison of 2<sup>nd</sup> and 4<sup>th</sup> Order Discretizations for Multigrid Poisson Solver. *Journal of Computational Physics*, 132, p. 226-232.
- Li, Ming., and Tang, Tao. 2001. A Compact Fourth Order Finite Difference Scheme for Unsteady Viscous Incompressible Flows. *Journal of Scientific Computing*. Vol. 16, No. 1, p. 9-45.
- Nakamura, S. 1991. *Applied Numerical Methods with Software*. Prentice Hall International Editions. New Jersey.
- Power, D., 1987, *Boundary Value Problems*, third edition, Harcourt Brace Jovanovich, New York.
- Spotz, W. F., and Carey, G. F. 1996. A High Order Compact Formulation for the 3D Poisson Equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 12, pp. 235-243.
- . 2000. *Extension of High Order Compact Schemes to Time Dependent Problems*. Submitted to Numerical Methods for Partial Differential Equations.
- Zhuang, Y., and Sun, X. H. 2001. A High Order Fast Direct Solver for Singular Poisson Equations, *Journal of Computational Physics*, 171, p. 79-94.