
PENGEMBANGAN MODEL PENJADWALAN DINAMIS *FLEXIBLE FLOW SHOP* 3-STAGES UNTUK MEMINIMASI *WEIGHTED TARDINESS* DENGAN SISTEM LELANG**Muhammad Adha Ilhami**

Jurusan Teknik Industri, Universitas Sultan Ageng Tirtayasa
Jln. Jend. Sudirman Km. 03 Cilegon, Banten
Email: adha@untirta.ac.id, adha@ft-untirta.ac.id

Abstrak

Permasalahan penjadwalan pada mesin merupakan permasalahan yang terus berkembang dan bervariasi. Perkembangan penjadwalan mesin ini adalah karena tuntutan terhadap respon cepat dan tepat dalam pemenuhan kebutuhan konsumen yang berhubungan dengan sistem respon. Sementara variasi penjadwalan muncul karena banyaknya sistem produksi di perusahaan yang digunakan untuk memenuhi permintaan konsumen, baik terkait sistem produksi yang digunakan maupun kebijakan perusahaan terkait dalam proses produksi serta dengan memperhatikan kriteria performansi yang diharapkan/ditetapkan dari konsumen. Penelitian ini dilaksanakan untuk menjawab permasalahan *flexible flow shop* dengan 3 proses operasi pada job yang dikerjakan. Setiap job akan diproses pada 3 buah mesin dimana setiap tahap proses (operasi) memiliki pilihan mesin (mesin lebih dari 1 unit yang tersedia untuk proses yang sama). Permasalahan lainnya adalah adanya job yang datang pada saat jadwal sudah dibuat untuk job yang sudah ada sebelumnya, artinya permasalahan model penjadwalan ini adalah penjadwalan job dinamis. Model Penjadwalan Lelang dengan Routing Alternatif (2011) menjadi model referensi utama dalam penelitian ini. Model Lelang dengan Routing Alternatif (2011) membahas tentang penjadwalan *flexible flow shop* 2-stages dengan sistem lelang, namun masih merupakan penjadwalan statis. Job diketahui dari awal penjadwalan dan tidak ada job baru yang datang pada saat jadwal sudah dieksekusi. Sistem lelang dipilih karena menurut Kutanoglu (1999) bahwa sistem lelang adalah sistem penjadwalan terdesentralisasi (*decentralized scheduling*). Keunggulan penjadwalan terdesentralisasi adalah kemampuannya yang tangguh (*robust*) dan mampu beradaptasi terhadap perubahan baik perubahan dari job maupun perubahan dari mesin. Prinsip dinamisnya dikembangkan dari penelitian Liu et. al.(2007), Dewan P. et. al. (2002), dan Ilhami (2010) bahwa dengan pengambilan keputusan job mana yang akan diproduksi dilakukan pada saat terjadi perubahan status mesin. Sistem lelang menyerahkan pada mekanisme lelang untuk menentukan job mana yang akan dikerjakan kemudian dan keputusannya diambil pada saat waktu (t) secara periodik. Pengambilan keputusan dapat dilakukan kapan saja setelah adanya perubahan status mesin khususnya pada saat mesin tidak sedang digunakan. Model penjadwalan ini diujicobakan pada studi kasus sederhana untuk dilakukan analisa terhadap fleksibilitasnya dalam menghadapi dinamika sistem. Hasilnya didapati bahwa model penjadwalan ini memiliki kemampuan untuk merespon terhadap job baru yang masuk di tengah-tengah proses produksi sekaligus mampu memilih jadwal terbaik untuk menghasilkan kriteria performansi yang lebih baik pula.

Kata kunci: Penjadwalan Sistem Lelang, *Weighted Tardiness*, *Flexible Flow Shop*, List Scheduling, *Earliest Due Date* (EDD).

1. PENDAHULUAN

Penelitian ini merupakan pengembangan dari Model Penjadwalan Sistem Lelang 2-Stages (2013). Model penjadwalan tersebut belum dapat mengakomodir kondisi dinamis dalam sistem, yaitu kondisi dimana terjadi perubahan kondisi inisial terhadap perubahan waktu. Kondisi perubahan yang dimaksudkan dalam penelitian ini adalah kondisi adanya penambahan job baru pada sistem. Kondisi system juga berbeda dalam hal jumlah operasi yang harus dilalui oleh job. Pada penelitian ini jumlah operasi yang harus dilalui job adalah 3 operasi, setiap operasi memiliki 2 alternatif mesin yang dalam melaksanakan operasi tersebut (dapat memilih). Secara lengkap alternatif pengerjaan operasi dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1 Alternatif setiap job pengerjaan pipa dari mesin yang tersedia

Alternatif	Mesin		
	Operasi 1	Operasi 2	Operasi 3
1	Mesin A	Mesin C	Mesin E
2	Mesin A	Mesin D	Mesin E
3	Mesin B	Mesin C	Mesin E
4	Mesin B	Mesin D	Mesin E

Dari Tabel 1 di atas diketahui bahwa setiap job memiliki 4 alternatif pengerjaan, dimana pada operasi 1 terdapat 2 mesin yang dapat digunakan salah satunya, operasi 2 terdapat 2 mesin, dan di operasi 3 hanya ada 1 mesin. Untuk job didapati bahwa terdapat 3 job pada saat inisial dan pada $t = 5$ muncul 1 job baru. Munculnya job baru (job ke-4) ini yang menjadi permasalahan sendiri terhadap kondisi yang sudah diputuskan pada saat $t = 1$, yang pada saat $t = 1$ adanya job ke-4 belum dapat diketahui, sehingga pengambilan keputusan penjadwalan job ke-4 baru dapat dilakukan pada $t = 5$. Adapun informasi terkait job yang akan dijadwalkan dapat dilihat pada Tabel 2.

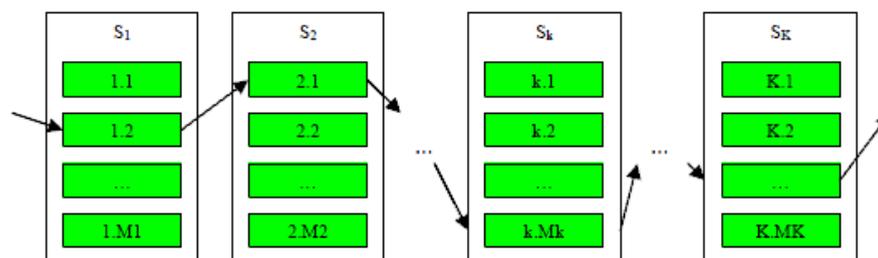
Tabel 2 Waktu operasi job

Job	Waktu (satuan)				
	Start Time	Operasi 1	Operasi 2	Operasi 3	Due date
1	1	3	4	2	15
2	1	2	2	5	12
3	1	5	1	2	11
4	5	3	3	1	18

2. LANDASAN TEORI

2.1. Flexible Flow Shop

Flexible flow shop pada dasarnya terdapat m mesin yang disusun secara seri dengan beberapa *stage* yang didalam *stage* tersebut terdapat sejumlah mesin identik yang disusun secara paralel. Masing-masing *job* akan diproses melewati *stage 1* kemudian *stage 2*, dan seterusnya. Pada masing-masing *stage*, *job* akan diproses oleh salah satu mesin identik. Adapun skema *flexible flow shop* tersaji dalam Gambar 1.

**Gambar 1. Skema FlexibleFlow Shop**

Sumber : Kulcsar, 2005

2.2. Konsep Dasar Relasi Job dan Mesin dalam Hubungan Matematika

Metode Relaksasi *Lagrangian* awalnya dirumuskan oleh Fisher, M. L. (1981) untuk menyelesaikan masalah *integer programming*. Konsep dasar dari *relaksasi lagrange* adalah mengoptimasi suatu permasalahan dengan cara menghilangkan beberapa pembatas yang digabungkan dengan fungsi tujuannya dengan masing-masing pembatas diberi faktor pengali

lagrange. Dalam penelitian Ilhami (2010), contoh permasalahan dasar untuk *relaksasi lagrange* adalah sebagai berikut:

$$v(P) = \text{Min } cx \quad (1)$$

Pembatas

$$Ax \geq b \quad (2)$$

$$x \in X \quad (3)$$

Dimana A merupakan matriks $m \times n$, dan c adalah vektor $1 \times n$, dan x adalah vektor $n \times 1$ sebagai variabel keputusan. Dengan menambahkan $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ dimana nilai λ bernilai non negatif, dan digunakan untuk mendualisasi pembatas $Ax \geq b$, maka diperoleh permasalahan *lagrange* (L_λ). Untuk $\lambda \geq 0$, diperoleh permasalahan *lagrange* sebagai berikut:

$$L(\lambda) = \min\{(c - \lambda A)x + \lambda b \mid x \in X\} \quad (4)$$

Permasalahan *lagrange* tersebut menjadi lebih mudah diselesaikan dibandingkan dengan permasalahan aslinya.

Hubungan penjadwalan sistem lelang dengan *relaksasi lagrange* berawal dari adanya dua permasalahan dari sistem, yaitu permasalahan *job* dan mesin. Untuk mempermudah mendapatkan penyelesaian masalah, maka dilakukan relaksasi pada pembatas mesin sehingga didapat hanya permasalahan *job* saja.

Pada penelitian Ilhami (2010), model penjadwalan yang digunakan adalah untuk meminimasi *weighted tardiness*.

Notasi yang digunakan adalah:

i : Indeks *job*, $i = 1, \dots, N$ dimana N adalah jumlah total *job*.

I : Set *job*, $I = \{i : i = 1, \dots, N\}$.

j : Indeks operasi, $j = 1, \dots, O_i$ dimana O_i adalah jumlah operasi pada *job*.

O_{iq} : Jumlah operasi dari *job* untuk *routing* alternatif q terpilih.

J_i : Set operasi untuk *job*, $J_i = \{j : j = 1, \dots, O_i\}$.

Q : Indeks *routing* alternatif *job*, $q = 1, \dots, Q$ dimana Q adalah jumlah *routing* alternatif suatu *job* i , q bernilai 1 jika q^* terpilih adalah 1, bernilai 2 jika q^* terpilih adalah 2, dan seterusnya.

t : Periode waktu, $t = 1, \dots, TC$ dimana TC adalah total horizon waktu.

TH : Set waktu, $TH = \{k : k = 1, \dots, TC\}$.

m : Indeks mesin, $m = 1, \dots, M$ dimana M adalah jumlah mesin.

TM : Set mesin, $TM = \{m : m = 1, \dots, M\}$.

p_{ijq} : Waktu proses untuk operasi j dari *job* alternatif *routing* q .

d_i : *Due date* *job*.

ε_i : *Earliness penalty* per unit waktu untuk *job*.

τ_i : *Lateness penalty* per unit waktu untuk *job*.

λ_{mt} : *Multiplier lagrange* untuk periode waktu t pada mesin m .

UB : *Upper bound* untuk biaya.

LB : *Lower bound* untuk biaya.

α_r : *Sub gradient* yang digunakan pada setiap iterasi r pada langkah perhitungan ukuran.

Y_{ijqm} : Indeks $\{0, 1\}$, bernilai 1 jika operasi *job* alternatif *routing* q dikerjakan pada mesin m , bernilai 0 jika tidak.

X_{ijqt} : merupakan variabel keputusan yang bernilai $\{0, 1\}$, bernilai 1 jika operasi *job* alternatif *routing* q selesai di slot waktu t , dan bernilai 0 jika tidak.

Fungsi tujuan sistem minimasi *weighted tardiness* (*earliness* dan *tardiness*) adalah sebagai berikut:

$$\min \sum_i^N L_i \left[\max \left(\sum_{t=1}^{TC} tX_{i,O_i,q^*,t} - d_i, 0 \right) \right] + \sum_i^N E_i \left[\max \left(d_i - \sum_{t=1}^{TC} tX_{i,O_i,q^*,t}, 0 \right) \right] \quad (5)$$

Dengan pembatas:

$$\sum_{t=1}^{TC} X_{ijqt} = 1, \forall i, j, q \quad (6)$$

$$\sum_{t=1}^{TC} tX_{ijqt} + p_{i,j+1,q} \leq \sum_{t=1}^{TC} tX_{i,j+1,q,t}, \forall i, j, q \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{O_{iq}} X_{ijqt} Y_{ijqm} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^{O_{iq}} \sum_{t'=t+1}^{\min\{TC, t+p_{ijq-1}\}} X_{ijqt} Y_{ijqm} \leq 1, \forall m, t \quad (8)$$

$$\sum_{t=1}^{TC} tX_{i1qt} \geq p_{i1q} + a_2, \forall i \quad (9)$$

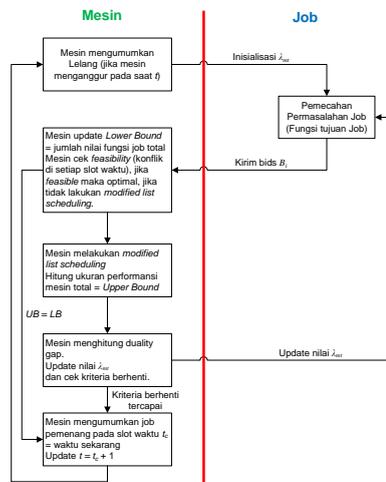
$$O_{i,q^*} = \begin{cases} O_{iq^*} = O_{i1} & \text{jika } q^* = 1 \\ O_{iq^*} = O_{iq} & \text{jika } q^* = q \end{cases} \quad \forall i \quad (10)$$

$$X_{ijqt} \in \{0, 1\}, \forall i, j, q, t \quad (11)$$

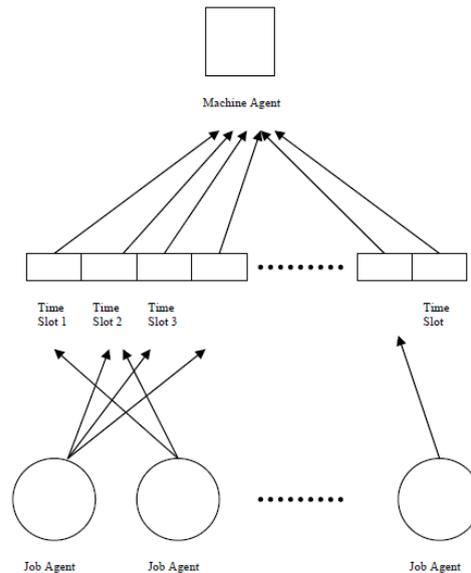
Untuk mendapatkan permasalahan (fungsi) dari job dan mesin, persamaan (5) sampai (11) dilakukan relaksasi *lagrange*.

2.3. Struktur Pemecahan Masalah Penjadwalan Sistem Lelang.

Penjadwalan dengan sistem lelang merupakan pengembangan dari algoritma penjadwalan *relaksasi lagrange*. Dalam penjadwalan ini akan terjadi komunikasi antar entitas mesin dengan entitas *job*, hal ini dikarenakan penjadwalan ini menggunakan sistem terdistribusi yang berarti baik mesin maupun *job* akan memiliki peran yang sama dalam proses pengambilan keputusan (penjadwalan). Struktur pemecahan masalah penjadwalan dengan sistem lelang dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 2 Struktur Pemecahan Masalah Penjadwalan dengan Sistem Lelang



Gambar 3 Ilustrasi Mesin, Slot Waktu dan *Job* dalam Sistem Lelang
Sumber: Zarifoglu, 2005

3. PENGEMBANGAN SISTEM LEANG DAN PEMBAHASAN

3.1. Perumusan Bids oleh Job

Perumusan bids oleh job merupakan langkah awal mekanisme penjadwalan dengan sistem lelang ini. Dimana tujuannya adalah mencari alternatif termurah dalam sudut pandang job dalam hal pemilihan waktu (slot waktu) dan mesin untuk memproduksi job tersebut. Persamaan yang dijadikan dasar dalam merumuskan bids adalah sebagai berikut.

$$WT_i + \sum_t^{TC} \lambda_{mt} (X_{it} Y_{im}) \quad (12)$$

Dengan:

WT_i = *Weighted tardiness job i*

λ_{mt} = *Multiplier lagrange* untuk periode waktu t pada mesin m

Y_{im} = Indeks {0, 1}, bernilai 1 jika *jobi* dikerjakan pada mesin m , bernilai 0 jika tidak

X_{it} = Merupakan variabel keputusan yang bernilai {0, 1}, bernilai 1 jika *jobi* dikerjakan di slot waktu t , dan bernilai 0 jika tidak

lakukan oleh job, maka diperlukan mekanisme pemilihan alternatif routing mesin berdasarkan bid yang mungkin dilakukan oleh job. Sederhananya pemilihan alternatif routing didasarkan pada bid dengan nilai yang paling minimum, namun jika ada beberapa alternatif routing dengan nilai bid yang sama, maka dipilih alternatif routing dengan *start time* paling kecil, dan bila *start time* sama, maka dipilih alternatif dengan mesin prioritas.

3.2. Mekanisme Peningkatan Harga λ (harga slot waktu)

Pada saat job menawar (melakukan *bidding*) ke slot waktu yang diinginkan, maka dimungkinkan terjadi beberapa job menginginkan slot waktu yang sama. Dengan adanya peminat slot waktu (yang dimiliki mesin) lebih dari 1 job, maka mesin berkepentingan untuk menaikkan harga slot waktu tersebut (dalam upaya untuk menggeser salah satu job yang berminat untuk mem-bidding slot waktu lain dan dalam rangka meningkatkan/maksimasi pendapatan total dari penawaran job terhadap slot waktu yang dimiliki mesin. Perubahan harga lamda (λ) ini dengan menggunakan algoritma *sub gradient* (Dewan dan Joshi, 2002 dan Ilhami, 2010).

Sub gradient secara sederhana adalah kenaikan harga yang dihitung untuk meng-update perubahan harga lamda λ dengan rumus:

$$S_r = \frac{\alpha^r (UB^r - LB^r)}{\left[\sum_{i=1}^{TC} (SG_{mt}^r)^2 \right] \times 2} \quad (13)$$

Dengan:

α^r = nilai *alpha* pada iterasi r

UB^r = *Upper bound* pada iterasi r

LB^r = *Lower bound* pada iterasi r

$Adapun SG_{mt}^r$ adalah konflik (jumlah job yang menginginkan slot waktu yang sama) yang terjadi pada suatu slot waktu tertentu pada mesin m di iterasi r , konflik ini terjadi jika terdapat beberapa job yang menginginkan slot waktu tertentu pada suatu mesin.

$$SG_{mt}^r = \left(\sum_{i=1}^N X_{it} - 1 \right) \forall t > \text{waktu sekarang} \quad (14)$$

Harga lamda (λ) yang baru akan bergantung dari nilai *sub gradient*-nya dengan persamaan:

$$(F_s) \lambda_{mt}^{r+1} = \max \{ 0, \lambda_{mt} + S^r SG_{mt}^r \} \quad (15)$$

Dengan:

λ_{mt} = *Multiplier lagrange* (harga lamda) untuk periode waktu t pada mesin m untuk iterasi $r+1$

3.3. Perumusan Jadwal *Feasible*

Pada saat job mengirimkan bid (pilihan terbaiknya), maka dimungkinkan terjadi jadwal yang tidak *feasible*. Jadwal yang tidak *feasible* ini dimungkinkan utamanya karena adanya slot waktu yang diinginkan lebih dari satu job. Perumusan jadwal *feasible* adalah merupakan kepentingan dari mesin, dimana mesin tidak akan dapat memproduksi sesuai jadwal, jika jadwal yang dihasilkan tidak *feasible*.

Oleh karena itu perlu ada mekanisme yang membuat jadwal *infeasible* tersebut menjadi jadwal *feasible* yaitu dengan *list scheduling*. Pada penelitian ini dilakukan modifikasi *list scheduling* dari penelitian Ilhami (2010) sebagai berikut:

1. Jika terjadi konflik pada suatu slot t , job dengan *start time* terkecil dipindah ke mesin lain yang tersedia.
2. Jitelah dipindah masih terjadi konflik dengan job lain, maka job dengan *start time* yang lebih besardigeser ke kanan 1 slot demi slot sampai tidak konflik.
3. Jika *start time* sama, maka pilih operasi job dengan *processing time* (waktu proses) terbesar untuk digeser ke kanan 1 slot demi slot sampai tidak konflik.
4. Jika waktu proses sama, maka melihat prioritas :
 - a. *Due date* terkecil
 - b. Jikadue date sama, pilih sembarang.

Berdasarkan perumusan-perumusan di atas, maka mekanisme penjadwalan dengan sistem lelang dapat disusun dengan tahapan-tahapan tertentu sebagai berikut.

3.4. Mekanisme Penjadwalan dengan Sistem Lelang

Mekanisme penjadwalan sistem lelang yang digunakan pada penelitian ini menjadi:

Langkah 1 Mesin Menginisiasi Parameter.

Mesin menginisiasi parameter yang diperlukan, dimana:

t = Waktu sekarang

r = Ronde lelang

λ_{mt} = *Multiplier lagrange* untuk periode waktu t pada mesin (harga sebuah slot waktu), untuk $r = 1$ nilai $\lambda_{mt} = 0$

LBr = Lower bond, untuk $r = 1$ nilai $LBr = 0$
 UBr = Upper bond, untuk $r = 1$ nilai $UBr = \infty$
 α = alpha, untuk $r = 1$ nilai $\alpha = 2$
 Mesin mengirimkan informasi lamda (λ) ke job.

Langkah 2 Job Membuat Bids (Penawaran).

Setiap job membuat bid dari informasi lamda (λ) yang dikirim oleh mesin dari semua slot waktu yang mungkin untuk semua alternatif pada masing-masing job. Pemilihan bid yang menjadi solusi terbaik dengan aturan sebagai berikut:

- Slot waktu terpilih mempunyai nilai bid paling kecil.
- Jika alternatif nilai bid sama, maka dipilih bid dengan start time yang paling awal.

Langkah 3 Mesin Mengumpulkan Seluruh Bid dan Membentuk Jadwal Inisial.

Mesin membuat jadwal inisial dan menghitung lower bond (LB) adalah maksimal dari $\{LBr_{-1}$, nilai dari $LR(\lambda r)\}$. Dimana $LR(\lambda r)$ dapat ditulis dengan rumus (Ilhami, 2010)

$$LR(\lambda) = \max \sum_{i=1}^{TC} WT_i + \sum_{m=1}^M \lambda mt (X_{it} Y_{im}) \quad (16)$$

Jika jadwal inisial sudah feasible maka iterasi lelang berhenti, jika jadwal belum feasible lanjutkan ke langkah 4.

Langkah 4 Membuat Jadwal Feasible dan Menghitung Harga Lamda (λ) Baru.

Jadwal yang dibuat pada langkah 3 belum tentu akan feasible oleh karena itu dilakukan mekanisme list scheduling sesuai aturan mekanisme pembuatan jadwal feasible untuk membuat jadwal belum feasible menjadi feasible. Jadwal yang tidak feasible ini terjadi karena adanya beberapa konflik yang menyebabkan mesin (juru lelang) harus memilih salah satu job.

Menghitung upper bond (UB) adalah minimal dari $\{UBr_{-1}$, nilai dari $LD(\lambda r)\}$. Dimana $LD(\lambda r)$ dapat ditulis dengan rumus (Ilhami, 2010)

$$LD(\lambda r) = \min \left[\sum_{i=1}^{TC} WT_i + \sum_{m=1}^M \lambda mt (X_{it} Y_{im}) - \sum_{m=1}^M \sum_{t=1}^{TC} \lambda_{mt} \right] \quad (17)$$

Menghitung konflik dan kuadrat konflik slot waktu pada jadwal inisial untuk setiap mesin. Sub gradient dihitung untuk meng-update perubahan harga lamda λ .

Mengecek gap dari sub gradient yang didapat, dengan rumus:

$$\text{Gap} = S_r - S_{r-1} \quad (18)$$

$$\text{Gap} \geq 0.17 \rightarrow \alpha_{r+1} = \alpha_r, \text{ jika tidak maka } \alpha_{r+1} = \frac{\alpha_r}{2}$$

Langkah 5 Mesin memeriksa stopping criteria.

Modifikasi stopping criteria pada penelitian ini menjadi:

Sub gradient < 0.001

Alpha $\alpha < 0.3$

Iterasi $r > 30$

Jika salah satu kriteria pada stopping criteria terpenuhi maka iterasi berhenti, jika tidak maka dilanjutkan ke iterasi berikutnya.

3.5. Penyelesaian Permasalahan Penjadwalan Penelitian Ini

Penelitian ini mengembangkan penelitian sebelumnya yakni Penjadwalan Flow Shop 2 – stage untuk meminimasi weighted tardiness. Pada penelitian ini pengembangan penjadwalan sistem lelang pada flow shop 3 – stages dan kondisi dinamis. Dengan mekanisme yang sudah disusun di atas dilakukan penyelesaian masalah pada studi kasus seperti pada Tabel 2.

Untuk permasalahan dinamis, setelah dilakukan percobaan perhitungan, maka dapat disimpulkan kondisi dinamis pada dasarnya dengan menggunakan sistem lelang ini adalah dengan

melakukan perhitungan pada tiap slot waktu kritis. Yang dimaksudkan dengan slot waktu kritis adalah dengan melakukan perhitungan ulang pada slot waktu yang terjadi perubahan (kritis) kondisi, misalnya datangnya job baru ke dalam sistem penjadwalan. Kondisi pada Tabel 2, dimana terjadi job 4 baru masuk ke dalam sistem penjadwalan pada slot 5 (*start time* = 5) adalah salah satu ciri kondisi dinamis.

Untuk permasalahan tersebut sistem lelang meresponnya dengan 2 kali perhitungan, yaitu perhitungan pada slot waktu, $t = 1$, dan perhitungan pada slot waktu, $t = 5$. Khusus pada slot $t = 5$, job yang sudah dijadwalkan dan sedang diproses tidak dapat diubah atau dihentikan (*non pre emptive*).

3.6. Hasil Penjadwalan dengan Sistem Lelang

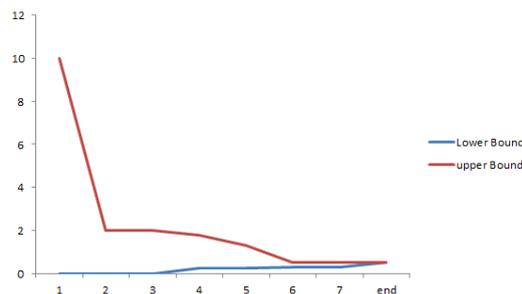
Setelah dilakukan perhitungan, maka diperoleh hasil dari 2 (dua) kali perhitungan. Yaitu perhitungan pada saat $t = 1$, dan perhitungan pada saat $t = 5$. Pada $t = 1$ adalah kondisi awal proses, pada $t = 1$ ini akan dibuat jadwal sementara, dimana jika tidak ada perubahan kondisi pada sistem, jadwal ini tidak akan berubah.

Perhitungan pada saat $t = 5$, dilakukan perhitungan karena adanya dinamika dalam sistem (adanya perubahan). Perubahan yang dimaksud adalah masukkan job 4 pada sistem penjadwalan. Untuk itu sistem perlu merespon kondisi tersebut dan memperhitungkan jadwal idealnya berdasarkan kondisi atau situasi pada saat $t = 5$. Hasil perhitungan pada saat $t = 1$ dapat dilihat pada Tabel 3 di bawah ini.

Tabel 3 Hasil Perhitungan Penjadwalan dengan Sistem Lelang

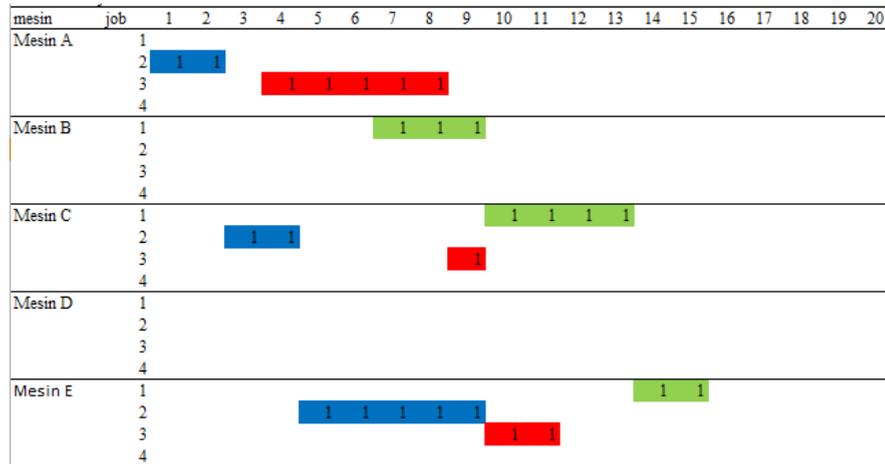
Iterasi	Lower Bound	upper Bound	Alpha	Tardiness	Weighted Tardiness	Sub Gradient
1	0	10	8	4	2	0.113
2	0	2	8	4	2	0.117
3	0	2	8	4	2	0.087
4	0.22695	1.759797	8	4	2	0.063
5	0.22695	1.305896	8	5	1.9	0.013
6	0.298095	0.525045	4	4	2	0.007
7	0.298095	0.525045	2	3	0.9	-0.005
end	0.525045	0.525045	1	3	0.9	-0.005

Dari Tabel 3 terlihat bahwa penjadwalan mendekati optimal pada iterasi 7 dan 8 yang memberikan nilai *weighted tardiness* sebesar terkecil yaitu 0,9 dan dibuktikan dengan jarak (selisih) *Upper Bound* dan *Lower Bound* terpendek.



Gambar 4 Grafik pergerakan nilai UBr dan LBr dalam 4 iterasi lelang yang terjadi

Dari Gambar 4 terlihat bahwa nilai UBr dan LBr semakin dekat dari iterasi 1 sampai dengan iterasi 7 dan pada akhir iterasi 7 didapati UBr dan LBr sudah menyatu. Hal ini mengindikasikan bahwa mekanisme yang dibuat mampu mengkonstruksikan solusi yang konvergen. Adapun hasil perhitungan menghasilkan jadwal sebagai berikut.



Gambar 5 Jadwal *feasible* setelah iterasi 7.

Kondisi statis terjadi mulai dari $t = 1$ hingga $t = 4$, namun pada $t = 5$ terjadi perubahan yakni masuknya job 4 ke dalam sistem. Pada saat $t = 5$, job 2 operasi 1 dan operasi 2 telah selesai diproses, Job 1 belum sama sekali di proses, sementara job 3 operasi 1 sedang diproses di mesin A. Kondisi pada saat $t = 5$ dapat digambarkan seperti pada Gambar 6.



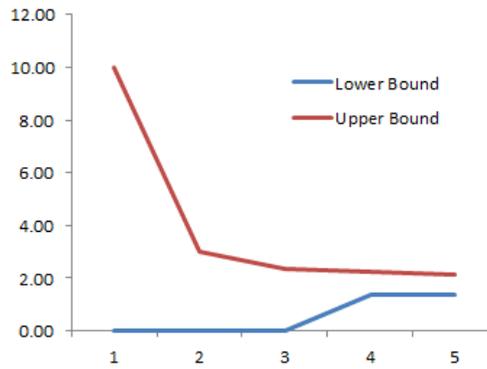
Gambar 6 Kondisi Mesin pada $t = 5$

Dari Gambar 6 dapat disimpulkan bahwa Mesin A sedang bekerja dan baru bisa digunakan lagi pada $t = 9$, sementara Mesin B hingga Mesin E statusnya tersedia. Perhitungan dilakukan dengan titik mulai adalah pada slot waktu $t = 5$. Lima kali iterasi terjadi sebelum kondisi stop tercipta, adapun hasilnya secara lengkap dapat dilihat pada Tabel 4 di bawah ini.

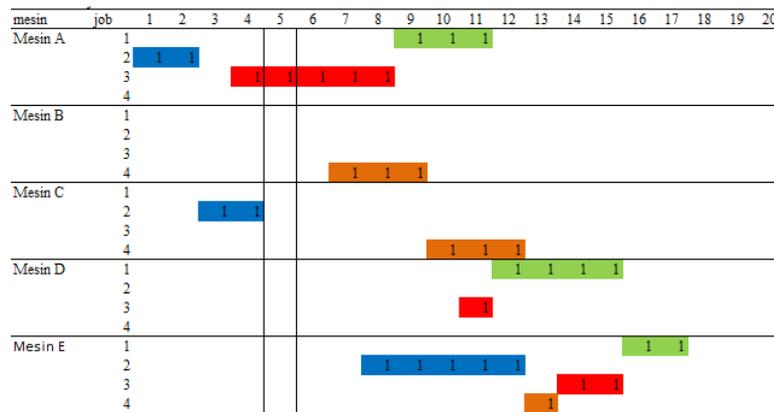
Tabel 4 Hasil Perhitungan Penjadwalan dengan Sistem Lelang

Iterasi	Lower Bound	upper Bound	Alpha	Tardiness	Weighted Tardiness	Sub Gradient
1	0.00	10.00	8	6	3.0	0.375
2	0.00	3.00	8	7	3.5	0.328
3	0.00	2.38	8	6	3.0	0.123
4	1.36	2.25	8	7	3.5	0.092
5	1.36	2.14	8	6	3.0	-0.161

Grafik pergerakan *Upper Bound* dan *Lower Bound* yang semakin konvergen dapat dilihat pada Gambar 7 berikut. Adapun jadwal akhir setelah seluruh proses iterasi berlangsung dapat dilihat pada Gambar 8.



Gambar 7 Pergerakan *upper bound* dan *lower bound* selama iterasi terjadi



Gambar 8 Jadwal Akhir hasil penjadwalan

4. ANALISA DAN KESIMPULAN

Penjadwalan dengan menggunakan mekanisme sistem lelang terbukti mampu menghasilkan jadwal yang tidak hanya terbukti konvergen dalam pencarian solusi terbaiknya, namun juga dapat secara fleksibel merespon perubahan sistem dalam hal ini adanya job baru yang masuk ke sistem penjadwalan. Penjadwalan merespon perubahan pada titik – titik waktu (slot) yang terjadi perubahan dinamika sistem. Sementara jika tidak ada perubahan maka jadwal yang dihasilkan tetap digunakan.

Keutamaan dari mekanisme lelang ini adalah adanya kebebasan bagi job dalam melakukan *bidding* (pemilihan) slot waktu untuk proses produksi pada mesin yang diinginkan. Kebebasan ini tentu menyebabkan adanya penumpukan (konflik) target *bidding* pada slot yang sama di antara job yang melakukan *bidding*. Mesin merespon ini dengan cara menaikkan harga slot waktu (λ) sehingga memaksa job untuk memilih slot waktu yang lain sehingga konflik dapat diminimasi dan dihasilkan jadwal yang *feasible*. Hal ini dapat dibuktikan dengan melihat hasil perhitungan seperti pada Tabel 3. Sebagai informasi *upper bound* itu adalah total pendapatan yang diinginkan oleh Mesin (sebagai pelelang slot waktu), sementara *lower bound* adalah total *bidding* yang diinginkan oleh Job. Kondisinya dari iterasi ke iterasi berikutnya dihasilkan nilai *upper bound* dan *lower bound* yang makin lama semakin mendekati (gap semakin kecil). Hal ini mengindikasikan mekanisme lelang berhasil menghasilkan jadwal yang semakin mendekati keinginan dari Job dan Mesin.

Respon terhadap dinamika sistem dibuktikan dengan baik seperti terlihat pada Tabel 4. Pergerakan nilai *upper bound* dan *lower bound* yang saling mendekati menunjukkan mekanisme lelang selain memiliki respon yang baik terhadap perubahan yang ada juga mampu menghasilkan jadwal yang diinginkan oleh job dan mesin.

DAFTAR PUSTAKA

- Dewan, P., et. al. 2002. *Auction-Based Distributed Scheduling in a Dynamic Job Shop Environment*. *International Journal of Production System*. vol. 40. no.5.
- Fisher, M.L. 1981. "Lagrangian Relaxation Method for Solving Integer Programming Problem", *Management Science*, Vol. 27, 1 – 18.
- Ilhami, M. A., 2010. *Pengembangan Model Penjadwalan Job Shop Dinamis yang Mempertimbangkan Routing Alternatif dengan Menggunakan Sistem Lelang*. Tesis. Teknik dan Manajemen Industri. Institut Teknologi Bandung. Bandung.
- Ilhami, M. A., 2010. *Auction-Based Dynamic Job Shop Scheduling for Job with Alternative Routing*. Proceeding of The 11th Asia Pacific Industrial Engineering and Management Systems Conference, Malaka, 7 – 10 December 2010.
- Julaeha, Eha. 2011. *Penjadwalan Mesin Paralel dengan Sistem Lelang untuk Meminimasi Weighted Tardiness*. Skripsi. Cilegon: FT. Untirta.
- Kulcsar, Gyula. 2005. *Modeling and Solving of The Extended Flexible Flow Shop Scheduling Problem*. Production System and Information Engineering Volume 3. Department of Information Engineering. University of Miskolc. Hungary.
- Kutanoglu, E., dan Wu, S.D. 1999. *On Combinatorial Auction and Lagrangean Relaxation for Distributed Resource Scheduling*. *IEE Trans.*, Vol 31, No 9.
- Laha, Dipak. 2008. *Heuristics and Metaheuristics for Solving Scheduling Problems*. India : Jadavpur University.
- Lin, S., Goodman, E., Punch, W., 1997. *A Genetic algorithm approach to dynamic job shop scheduling problems*, dalam Back, T., editor, Proceedings of the Seventh International Conference on Genetic Algorithms, 481 – 489, Morgan Kaufmann.
- Liu, N., et. al. 2007. *A Complete Framework For Robust And Adaptable Dynamic Job Shop Scheduling*. *IEEE Transactions on Systems, Man, dan Cybernatics*. vol. 37. No. 5. ISSN: 1094-697.
- Palit, H.C., et. al., *Penjadwalan Produksi Flexible Flow Shop Dengan Sequence-Dependent Setup Times Menggunakan Metode Relaksasi Lagrangian*(Studi Kasus Pada PT. Cahaya Angkasa Abadi). <http://puslit.petra.ac.id/journals/pdf.php?PublishedID=IND03050205>. Diakses pada tanggal 13 Januari 2012.
- Pinedo, M., 2004. *Planning dan Scheduling in Manufacturing dan Services*. Springer. New York.
- Ponnambalam, S.G.; Aravindan, P.; Chandrasekaran, S. 2001. *Constructive and Improvement Flow Shop Scheduling heuristics : an extensive evaluation*. *Production Planning & Control Journal*, Vol.12, No.4, 335-344.
- Satriawan, Nedi, et. al. *Penjadwalan Produksi Flow Shop Menggunakan Algoritma Genetika dan Neh*. Bandung : FPMIPA UPI. http://abstrak.digilib.upi.edu/Direktori/SKRIPSI/FPMIPA/ILMU_KOMPUTER/PENJADWALAN_PRODUKSI_FLOW_SHOP_MENGGUNAKAN.pdf. Diakses pada tanggal 12 Januari 2012.
- Zarifoglu., E. 2005. *Auction Based Scheduling for Distributed Systems*. Tesis. Department Of Industrial Engineering. The Institute Of Engineering And Science Of Bilkent University.