

## PENGEMBANGAN MODEL INTEGRASI PRODUKSI-PERSEDIAAN *SINGLE VENDOR SINGLE BUYER* KONDISI PROBABILISTIK DENGAN ADANYA *LOSSING FLEXIBILITY COSTS*

Utaminingsih Linarti\*

Jurusan Teknik Industri, Fakultas Teknologi Industri, Universitas Ahmad Dahlan  
Jl. Prof. Dr. Soepomo, Janturan, Yogyakarta 55164

\*Email: utaminingsih.linarti@ie.uad.ac.id

### Abstrak

Pengendalian sistem persediaan dengan integrasi proses produksi dapat meningkatkan performansi rantai pasok antara penjual dan pembeli. Tulisan ini menjelaskan pengembangan model integrasi produksi-persediaan untuk permasalahan penjual tunggal dan pembeli tunggal dalam lingkungan *Just In Time (JIT)*. Tujuan pengembangan model adalah menghitung total biaya persediaan gabungan atau tingkat pemesanan produk yang optimal (*Joint Economic Lot Size*). Sistem persediaan bersifat probabilistik, *lead time* konstan dan *fully backorder*. Kondisi probabilistik dapat berpengaruh pada perubahan order pembeli ke penjual secara tiba-tiba yang memberikan beban total biaya persediaan tinggi. Hal tersebut dapat direduksi dengan adanya kebijakan *lossing flexibility cost*. *Lossing flexibility cost* merupakan kebijakan dimana terdapat biaya fleksibilitas kehilangan yang dibebankan pada pembeli berdasarkan kesepakatan penjual untuk pembelian yang besar dalam jumlah pengiriman yang banyak. Perhitungan numerik data hipotetik disajikan dalam tulisan ini untuk memahami konsep pengembangan model.

**Kata kunci:** *Single Vendor-Single Buyer, Just in Time, Probabilistik, Fully Backorder, Lossing Flexibility Costs*

### 1. PENDAHULUAN

Integrasi persediaan gabungan atau konsep *Joint Economic Lot Size (JELS)* pertama kali diperkenalkan oleh Goyal (1976) yang kemudian diperkuat oleh Monahan (1984), Lee and Rosenblatt (1986) dan Banerjee (1986.a,b). Adanya konsep JELS mampu mereduksi total biaya persediaan secara keseluruhan (*joint inventory cost*) maupun tingkat pemesanan baik antara penjual-pembeli maupun penjual-pembeli. Perhitungan total biaya keseluruhan ataupun tingkat pemesanan tidak lagi dilihat berdasarkan sudut pandang masing-masing penjual-pembeli maupun penjual-pembeli. Model integrasi persediaan telah banyak dikembangkan dengan melakukan perubahan beberapa asumsi maupun dengan melakukan penyesuaian kondisi interaksi yang terjadi.

Banerjee (1986.a) memperkenalkan model persediaan gabungan *buyer-supplier* dengan adanya kebijakan produksi lot for lot, dimana penjual akan memproduksi tiap pengiriman ke pembeli dalam batch yang terpisah. Goyal (1988) mengkritisi model Banerjee (1986a) dengan melakukan relaksasi kebijakan produksi lot for lot menjadi sejumlah kelipatan integer dari lot pemesanan pembeli atau dikenal sebagai kebijakan *equal size shipment*. Hill (1997) melakukan generalisasi dua kebijakan yang ditentukan oleh Banerjee (1986.a) dan Goyal (1988) menjadi model *generalized policy*. Model yang telah dikembangkan diatas juga dikenal dengan model integrasi produksi-persediaan.

Glock (2012) melakukan review terhadap penelitian yang berkaitan dengan model integrasi persediaan gabungan (JELS). Model persediaan di kelompokkan berdasarkan analisis tematik, yaitu *basic integrated inventory models* dan *extended integrated inventory models*. *Basic integrated inventory models* terdiri dari *two stage models* dan *multi-stage models*. Sedangkan *extended integrated inventory models* dilakukan dengan melakukan perubahan asumsi baik permintaan maupun *lead time* bersifat stokastik, mempertimbangkan adanya *order/setup cost reduction* dan atau *lead time reduction*, mempertimbangkan kualitas produk, mempertimbangkan jenis *perishable goods* dan mempertimbangkan kajian.

Kondisi kompetisi saat ini, membutuhkan hubungan (*partnership*) yang mampu berjalan secara terus menerus dan dalam jangka panjang. Terlebih adanya adopsi konsep *just in time* yang digunakan akan mampu meningkatkan efisiensi dan efektifitas produksi yang mendorong tingkat kompetitif suatu perusahaan. Yang dkk (2007) menjelaskan kebijakan integrasi sistem persediaan

*vendor-buyer* untuk meminimasi total biaya persediaan gabungan. Asumsi yang digunakan dalam model ini adalah laju produksi dan permintaan yang konstan. Total biaya persediaan keseluruhan dapat direduksi antara pemesanan pembeli dan pengiriman barang oleh penjual terutama dalam situasi *just in time* (JIT). Selain menjelaskan model integrasi persediaan *vendor-buyer*, penelitian ini juga memodifikasi model Goyal (1988) untuk menghasilkan pendekatan pengurangan biaya yang signifikan. Pada lingkungan *just in time* (JIT), pertanyaan yang sangat penting adalah bagaimana mereduksi persediaan yang tidak seharusnya dan menghilangkan adanya *delay* pada operasi? karena hal tersebut sesuai dengan karakteristik JIT yaitu konsisten terhadap kualitas, ukuran lot size kecil, seringnya pengiriman, *lead time* yang pendek dan kedekatan antara *partnership*. Banerjee dan Kim (1995) melakukan investigasi terhadap integrasi model persediaan untuk kondisi *just in time* (JIT). David dan Chaime (2003) menjelaskan mengenai hubungan antara pembeli dan penjual dalam lingkungan JIT. Penelitian ini mengidentifikasi derajat kebebasan dan level fleksibilitas antara *lot sizing* dan jadwal pengiriman untuk pembeli tunggal dan penjual tunggal. Kebijakan produksi *lot for lot* untuk penjual JIT sangatlah tidak kentara ekonomisnya. Di sisi lain, pengiriman dari permintaan dapat disesuaikan tanpa adanya intervensi dalam proses operasi penjual.

*Lead time* merupakan komponen yang sangat penting. *Lead time* selalu di asumsikan sebagai parameter yang diketahui (Ravichandran, 1995) ataupun mengikuti distribusi tertentu (Foote dkk, 1988). Kenyataannya, *lead time* merupakan parameter yang dapat disesuaikan ataupun dapat sebagai variabel keputusan. Ben-Daya dan Hariga (2004) merelaksasi asumsi model persediaan integrasi *buyer-vendor* dengan permintaan stokastik dan menambahkan *lead time* sebagai variabel keputusan. Hasil penelitian ini menyatakan bahwa *lead time* bergantung terhadap lot size dan adanya keterlambatan seperti waktu transportasi. Kontrol yang baik terhadap *lead time* dapat menunjang suksesnya performa konsep JIT. Salah satu cara untuk melakukan kontrol adalah dengan mereduksi *lead time*. Reduksi *lead time* dapat menggunakan konsep *crashing cost*, untuk meningkatkan *service level* pelanggan ataupun mengurangi persediaan pengaman (*safety stock*). Reduksi *lead time* ini sering disebut juga sebagai *controllable lead time*. Komponen *crashing cost* meliputi persiapan pesanan, transit pesanan, *lead time* penjual, dan waktu pengiriman (Tersine, 1982).

Model integrasi persediaan dengan adanya *lead time* yang dikendalikan (*controllable lead time*) dijelaskan oleh Pan dan Yang (2002) dimana asumsi yang digunakan adalah produksi terbatas pada laju  $P$ , permintaan mengikuti distribusi normal dan kebijakan persediaan adalah *continuous reviewed*. Hal tersebut didasarkan pada karakteristik yang diinginkan oleh konsep JIT, yaitu *short lead time*. Ouyang dkk (2004,2006), Chang dkk (2006) melakukan pengembangan model Pan and Yang (2002) dengan permintaan probabilistik dan adanya *controllable lead time*. Siajadi dkk (2006) membuat model *Joint Total Relevant Cost (JTRC) single vendor multiple buyer*, hasilnya adalah membandingkan dengan model Banerjee (1986.a) dengan *multiple shipment* didapatkan biaya total persediaan yang lebih kecil dibandingkan kebijakan lot for lot untuk multi buyer. Hsu dan Lee (2009) mengembangkan model Ouyang dkk (2004) untuk *Single Vendor Multi Buyer* dengan *controllable lead time*. Faktor pengaruh persediaan telah melibatkan adanya *shortage*, yaitu *backorder*. Chen dan Hsiao (2011) melakukan pengembangan model dengan mempertimbangkan adanya *controllable lead time* pada permasalahan permintaan yang stokastik. Semua model integrasi *vendor-buyer* yang telah disebutkan diatas merupakan model dengan kebijakan persediaan pembeli dengan *continuous review* dan memperhitungkan adanya *lead time controllable*. Kebijakan faktor (frekuensi) pengiriman dinyatakan dalam satu kali pengiriman ( $n = 1$ ) atau kebijakan faktor (frekuensi) pengiriman dinyatakan sama dengan kebijakan faktor (frekuensi) produksi ( $n = m$ ). Pujawan dan Kingsman (2002) mengembangkan model persediaan penjual-pembeli untuk suatu horison waktu yang tak terbatas. Jauhari dkk (2011) merelaksasi asumsi dasar yang digunakan dalam model Nyoman dan Kingsman (2002), yaitu permintaan deterministik diubah menjadi permintaan probabilistik. Kedua model tersebut diasumsikan kebijakan persediaan pembeli adalah *periodic review* dan belum melibatkan adanya reduksi terhadap *lead time*.

Selain kriteria kebijakan *lead time* yang sangat berpengaruh pada lingkungan JIT, perusahaan perlu mempertimbangkan cara agar tidak terjadi *delay* dalam sistem operasi produksi. Kebijakan terhadap setup merupakan bagian sistem operasi produksi yang sangat penting terlebih

untuk lingkungan JIT. Penurunan besarnya setup *cost* (setup *cost reduction*) juga dapat menurunkan besarnya total biaya gabungan. Penurunan setup *cost* dapat dilakukan dengan menambahkan komponen biaya fleksibilitas kehilangan (*losing flexibility cost*) pada total biaya persediaan pembeli. Adanya biaya fleksibilitas kehilangan yang menjadi parameter dalam biaya pembeli memberikan keleluasaan bagi pembeli jika terdapat perubahan pesanan dari konsumen kepada penjual. Besarnya biaya fleksibilitas kehilangan tergantung oleh ketentuan yang telah disepakati oleh pembeli. Hal ini menjelaskan bahwa pembeli memiliki dominasi negosiasi dalam hubungan antara pembeli dan penjual. Beberapa penelitian telah dilakukan dengan mempertimbangkan adanya *losing flexibility cost*. Kelle dkk (2003) memaparkan mengenai hubungan dan negosiasi terhadap pemesanan gabungan yang optimal untuk lingkungan JIT. Penelitian tersebut menjelaskan adanya dominasi negosiasi baik penjual maupun pembeli dalam hubungan keduanya. Penelitian tersebut belum mempertimbangkan *fully backorder* dan permintaan tidak bersifat probabilistik.

Konsep JIT menjelaskan bahwa kebijakan pembeli adalah ingin besarnya ukuran pemesanan yang kecil dan pengiriman yang sering. Namun apabila terdapat permintaan yang tiba-tiba dari konsumen, maka tentu saja akan memperbesar ukuran pemesanan dan banyaknya pengiriman akan berpengaruh pada besarnya total biaya persediaan pembeli. Penelitian ini bermaksud untuk mengembangkan model Jauhari dkk (2011) dengan mempertimbangkan adanya biaya fleksibilitas kehilangan (*losing flexibility cost*).

## 2. METODOLOGI

### 2.1 Asumsi Dan Notasi

#### 2.1.1 Asumsi

Asumsi yang digunakan dalam penelitian ini adalah

1. Penjual-Pembeli setuju untuk saling berpartisipasi dalam kerjasama.
2. Permintaan ( $D$ ) pembeli bersifat probabilistik dan variasi permintaan diketahui oleh penjual berdistribusi normal.
3. Tingkat produksi pada penjual tetap sebesar  $P$ , dimana tingkat produksi lebih besar dari tingkat permintaan ( $P > D$ ).
4. Kebijakan persediaan pembeli secara *periodic review*
5. *Lead time* konstan
6. Kekurangan (*shortage*) diijinkan dari sisi pembeli, dengan *fully backorder*

#### 2.1.2 Notasi

Notasi yang digunakan dalam penelitian ini adalah

##### Parameter

$D$	=	Permintaan tahunan
$\sigma$	=	Standar deviasi permintaan
$P$	=	Kecepatan produksi tahunan
$CB$	=	Harga jual
$K$	=	Biaya setup produksi
$A$	=	Biaya pemesanan pembeli
$F$	=	Biaya pengiriman
$H_b$	=	Biaya penyimpanan produk pada pembeli
$H_v$	=	Biaya penyimpanan produk pada penjual
$\pi$	=	Biaya <i>backorder</i>
$l$	=	Biaya fleksibilitas kehilangan
$f(\cdot)$	=	<i>Probability density function</i> dari distribusi normal standar
$F(\cdot)$	=	<i>Cumulative distribution function</i> dari distribusi normal standar

##### Variabel

$SS$	=	<i>Safety stock</i> pada pembeli
$ES$	=	Ekspektasi jumlah <i>backorder</i>

##### Decision Variabel

- $k$  = Faktor pengaman
- $q$  = Ukuran lot produksi
- $m$  = Faktor (frekuensi) *lot size* produksi
- $L$  = *Lead time*
- $n$  = Faktor (frekuensi) pengiriman

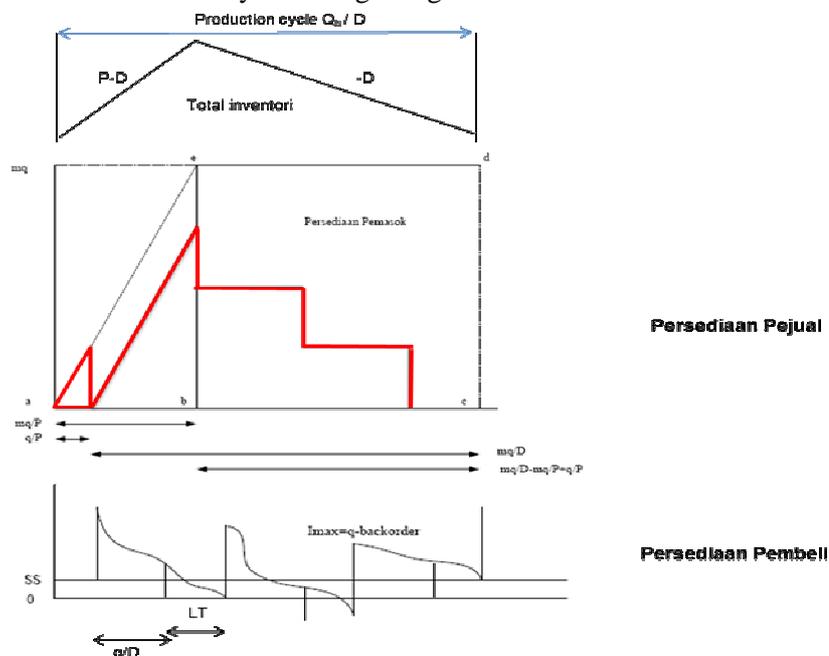
**Kriteria Performansi**

- $I_B$  = Inventori pada level pembeli (*Buyer*)
- $I_V$  = Inventori pada level penjual (*Vendor*)
- $I_{gab}$  = Inventori gabungan (*Joint*)
- $TC_b$  = Total biaya pembeli (*Buyer*)
- $TC_v$  = Total biaya penjual (*Vendor*)
- $TC_{gab}$  = Total biaya gabungan (*Joint*)

**2.2 Formulasi Model**

Pada model ini pembeli menginginkan pengiriman dilakukan sebanyak  $n$  kali, sedangkan produksi yang dilakukan oleh penjual adalah sebanyak  $m$  kali. Jika pengiriman dilakukan dalam jumlah  $q$ , maka ukuran pesan dari pembeli ( $Q_b$ ) adalah  $n.q$  dan ukuran produksi penjual ( $Q_s$ ) adalah  $m.q$ . Hasil penelitian ini adalah (i) jika keputusan dilakukan masing-masing pihak dan (ii) jika keputusan dilakukan bersama-sama. Solusi yang didapatkan menunjukkan bahwa sinkronisasi yang baik antara penjual dan pembeli dalam menentukan frekuensi pengiriman dan waktu produksi akan menghasilkan penghematan terhadap total biaya persediaan yang cukup signifikan. Hal tersebut sama dengan model yang dikembangkan oleh Pujawan dan Kingsman (2002) dan Jauhari dkk (2011). Posisi persediaan antara penjual dan pembeli dapat dilihat pada gambar 1.

Kelle et al (2003) mengembangkan model persediaan yang menjelaskan tentang adanya  $n$  pengiriman yang dikehendaki oleh buyer ( $Q_B$ ) dengan lot pengiriman sebesar  $q$ , sedangkan penjual memiliki lot produksi sebesar  $Q_s$ , dimana  $Q_s$  merupakan  $m.q$ . Besarnya parameter jumlah pengiriman ( $n$ ) dan batch produksi ( $m$ ) memiliki aturan  $m = n$  maupun  $m \neq n$ . Hasil dari pengembangan model diketahui bahwa dengan melakukan  $n$  pengiriman dan  $m$  batch produksi terdapat penghematan untuk total biaya secara gabungan.



**Gambar 1. Posisi persediaan antara penjual dan pembeli**

**2.3 Persediaan**

**2.3.1 Persediaan Pembeli**

Persediaan pada level pembeli dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$I_B = \frac{1}{2} \cdot q + SS \tag{1}$$

Dimana :  $SS = k \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{q}{D} + L}$

Pembeli memperbolehkan adanya kekurangan (*shortage*) sehingga nilai ekspektasi permintaan pada akhir periode  $q/D$  mengikuti formulasi berikut :

$$ES = \sigma \cdot \sqrt{\frac{q}{D}} \cdot \psi(k) \tag{2}$$

Dimana :  $\psi(k) = [f_s(k) - k[1 - F_s(k)]]$

$f_s(k)$  merupakan fungsi probabilitas distribusi normal standar (*probability distribution function*) dan  $F_s(k)$  merupakan fungsi kumulatif distribusi normal standar.

**2.3.2 Persediaan Penjual**

Pada level penjual, ukuran produksi adalah  $m \cdot q$  Selama periode produksi, maka suplier akan memproduksi sejumlah  $q$ , sesuai dengan ukuran pengiriman pembeli. Berdasarkan gambar 2, maka dapat dilihat bahwa posisi persediaan pada level penjual tergambar pada daerah *a-c-d-e* dimana terbagi menjadi 2 area, yaitu *a-b-e* dan *b-c-d-e*. Area *a-b-e* menyatakan kondisi produksi penjual sedangkan area *b-c-d-e* menyatakan kondisi pengiriman penjual ke pembeli. Persediaan pada level penjual merupakan daerah yang terbatas garis tebal, yang merupakan representasi kumulatif pengiriman dan kumulatif produksi dari satu siklus produksi.

Kumulatif pengiriman dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$q \cdot \frac{q}{D} + 2 \cdot q \cdot \frac{q}{D} + 3 \cdot q \cdot \frac{q}{D} + \dots + m \cdot q \cdot \frac{q}{D} = \frac{m(m+1) \cdot q^2}{2D} \tag{3}$$

Kumulatif produksi dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot q \cdot \frac{m \cdot q}{P} = \frac{m^2 \cdot q^2}{2P} \tag{4}$$

Dan,

$$m \cdot q \cdot \left( \frac{m \cdot q}{D} - \frac{m \cdot q}{P} - \frac{q}{P} \right) \tag{5}$$

Sehingga kumulatif keseluruhan produksi adalah menjumlahkan antara persamaan 3 dan 4, sebagai berikut :

$$\frac{m^2 \cdot q^2}{2P} + m \cdot q \cdot \left( \frac{m \cdot q}{D} - \frac{m \cdot q}{P} - \frac{q}{P} \right) = m \cdot q \cdot \left( \frac{m \cdot q}{D} - \frac{(m-2) \cdot q}{2P} \right) \tag{6}$$

Persediaan pada level penjual dapat dinyatakan sebagai kumulatif produksi dikurangi kumulatif pengiriman sebagai berikut :

$$I_V = m \cdot q \cdot \left( \left( \frac{m \cdot q}{D} - \frac{(m-2) \cdot q}{2P} \right) - \frac{m(m+1) \cdot q^2}{2D} \right) \cdot \frac{D}{m \cdot q}$$

$$I_v = m \cdot q \left( \frac{(m-1)q}{2D} - \frac{(m-2)q}{2F} \right) \cdot \frac{D}{m \cdot q}$$

$$I_v = \frac{q}{2} \cdot \left( (m-1) - (m-2) \frac{D}{F} \right) \tag{7}$$

**2.3.3 Persediaan Gabungan**

Persediaan gabungan merupakan level persediaan untuk kedua pihak, baik pembeli dan penjual. Persediaan gabungan = persediaan pembeli + persediaan penjual

$$I_{gab} = \frac{1}{2} \cdot q + SS + \frac{q}{2} \cdot \left( (m-1) - (m-2) \frac{D}{F} \right) \tag{8}$$

**2.4 Total Biaya**

**2.4.1 Total Biaya Pembeli**

Pembeli dalam JIT menginginkan ukuran pesan kecil dengan pengiriman yg sering. Diasumsikan bahwa ukuran pemesanan pembeli ( $Q_B$ ) yang dikirim sebanyak  $n$  kali dengan ukuran pengiriman  $q = \frac{Q_B}{n}$ . Total biaya pembeli ( $TC_B$ ) dapat dinyatakan sebagai total biaya yang meliputi biaya pesan, biaya transportasi, biaya simpan, biaya *backorder* dan biaya fleksibilitas kehilangan (*losing flexibility cost*). Secara matematis dapat dilihat sebagai berikut :

$$TC_B = \frac{D}{n \cdot q} (A + F \cdot n) + h_B \left( \frac{1}{2} \cdot q + k \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{q}{D} + L} \right) + \frac{D}{q} \cdot \pi \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{q}{D}} \cdot \psi(k) + n \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot q + k \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{q}{D} + L} \right) \cdot l \cdot C_B \tag{9}$$

**2.4.2 Total Biaya Penjual**

Berdasarkan level persediaan pada penjual dengan ukuran produksi ( $Q_s$ ) =  $m \cdot q$  maka jumlah set-up produksi adalah  $\frac{D}{m \cdot q}$ . Total biaya penjual ( $TC_v$ ) dapat dinyatakan sebagai total biaya simpan dan biaya set-up produksi. Secara matematis dapat dilihat sebagai berikut :

$$TC_v = \frac{1}{2} \cdot q \cdot h_v \left( (m-1) - (m-2) \cdot \frac{D}{F} \right) + \frac{D}{m \cdot q} \cdot K \tag{10}$$

**2.4.3 Total Biaya Gabungan**

Total biaya gabungan ( $TC_{gab}$ ) merupakan representasi dari integrasi persediaan penjual-pembeli. Dinyatakan sebagai total keseluruhan total biaya pembeli dan total biaya penjual. Secara matematis dapat dilihat sebagai berikut :

$$TC_{gab} = \frac{D}{n \cdot q} (A + F \cdot n) + h_B \left( \frac{1}{2} \cdot q + k \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{q}{D} + L} \right) + \frac{D}{q} \cdot \pi \cdot \sigma \cdot \psi(k) \sqrt{\frac{q}{D}} + n \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot q + k \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{q}{D} + L} \right) \cdot l \cdot C_B + \frac{1}{2} \cdot q \cdot h_v \left( (m-1) - (m-2) \cdot \frac{D}{F} \right) + \frac{D}{m \cdot q} \cdot K \tag{11}$$

**2.5 Variabel Keputusan**

**2.5.1 Independent**

Dari sisi pembeli :

Untuk mencari nilai  $q$  optimal untuk pembeli maka dilakukan dengan mencari turunan pertama formulasi perhitungan total biaya pembeli ( $TC_B$ ) terhadap  $q$  dengan persamaan sama dengan nol sebagai berikut :

$$\frac{\partial TC_B(m, q)}{\partial q} = 0$$

$$q^* = \sqrt{\frac{2D \left[ \left( \frac{A}{n} + F \right) + \pi \cdot \sigma \cdot \psi(k) \sqrt{\frac{q}{D} + L} \right]}{\frac{\sigma}{D \sqrt{\frac{q}{D} + L}} \left[ h_B + \frac{\psi(k) \cdot h_B}{1 - F_S(k)} + k \cdot L \cdot C_B \right] + [h_B - n \cdot L \cdot C_B]}} \quad (12)$$

Kemudian selanjutnya mencari nilai  $n$  optimal untuk pembeli, dapat dilakukan dengan mencari turunan pertama total biaya pembeli ( $TC_B$ ) terhadap  $n$  dengan persamaan sama dengan nol, sebagai berikut :

$$\frac{\partial TC_B(n,q)}{\partial n} = 0$$

$$n = \sqrt{\frac{D \cdot A}{L \cdot C_B \left( \frac{1}{2} \left( \frac{(1 - F_S(k)) \cdot D \cdot \pi}{h_B} \right)^2 + \frac{(1 - F_S(k)) \cdot D \cdot \pi}{h_B} \cdot k \cdot \sigma \sqrt{\frac{(1 - F_S(k)) \cdot \pi}{h_B} + L} \right)}} \quad (13)$$

**Dari sisi penjual**

Untuk mencari nilai  $q$  optimal maka dilakukan dengan mencari turunan pertama total biaya penjual ( $TC_V$ ) terhadap  $q$  dengan persamaan sama dengan nol, sebagai berikut :

$$\frac{\partial TC_V(m,q)}{\partial q} = 0$$

$$q = \sqrt{\frac{D \cdot K}{m \cdot \left( \frac{h_V}{2} (m-1) - \frac{h_V}{2} (m-2) \cdot \frac{D}{P} \right)}} \quad (14)$$

Kemudian selanjutnya mencari nilai  $m$  optimal untuk pembeli dapat dilakukan dengan melakukan turunan pertama total biaya penjual ( $TC_V$ ) terhadap  $m$  dengan persamaan sama dengan nol sebagai berikut :

$$\frac{\partial TC_V(m,q)}{\partial m} = 0$$

$$m = \frac{1}{\frac{(1 - F_S(k)) \cdot D \cdot \pi}{h_B}} \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot K}{h_V \left( 1 - \frac{D}{P} \right)}} \quad (15)$$

**2.5.2 Integrasi (Joint)**

Nilai optimal dari  $k$  dapat diformulasikan dengan melakukan turunan pertama dari  $TC_{gab}(q,m,n,k)$  terhadap  $k$  dengan persamaan sama dengan nol, sebagai berikut :

$$\frac{\partial TC_{gab}(q,m,n,k)}{\partial k} = 0$$

$$F(k) = \frac{D \cdot \pi - h_B \cdot q}{D \cdot \pi} = 1 - \frac{h_B \cdot q}{D \cdot \pi} \quad (16)$$

Selanjutnya menghitung nilai  $q$  optimal dengan melakukan turunan pertama dari  $TC_{gab}(q,n,m,k)$  terhadap  $q$  dengan persamaan sama dengan nol, sebagai berikut :

$$\frac{\partial TC_{gab}(q,m,n,k)}{\partial q} = 0$$

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot \left[ \left( \frac{A}{n} + F \right) + \pi \cdot \sigma \sqrt{\frac{q}{D} + L + \frac{K}{m}} \right]}{\frac{\sigma}{D \cdot \sqrt{\frac{q}{D} + L}} \left( \frac{\psi(k) \cdot h_B}{(1 - F_2(k))} + k \cdot h_B + k \cdot L \cdot C_B \right) + \left( h_B + h_V \left[ (m-1) - (m-2) \cdot \frac{D}{P} \right] - n \cdot L \cdot C_B \right)}} \quad (17)$$

Pencarian solusi terhadap nilai  $m^*$ ,  $n^*$ ,  $q^*$ , dan  $k^*$  yang dapat meminimumkan total biaya persediaan gabungan dilakukan dengan menggunakan suatu algoritma. Algoritma yang dibuat mengacu pada ide dasar algoritma yang telah dikembangkan oleh Ben-daya dan Hariga (2004). Pencarian nilai konvergen  $(q,k)$  dilakukan sesuai dengan algoritma yang telah dikembangkan oleh Ouyang dkk (2004). Algoritma baru yang dikembangkan untuk menyelesaikan model penelitian, dirumuskan sebagai berikut:

- Langkah 0 : Tetapkan  $m = 1$  dengan  $TC(q^{*m-1}, k^{*m-1}, m-1) = \infty$
- Langkah 1 : Mulai dengan besarnya lot pengiriman
- Langkah 2 : Gunakan nilai  $q$  untuk mendapatkan nilai  $k$  dengan persamaan

$$\frac{\partial TC_{gab}(m, q, k)}{\partial k} = 0$$

- Langkah 3 : Hitung nilai  $q$  dengan persamaan :

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot \left[ \left( \frac{A}{n} + F \right) + \pi \cdot \sigma \sqrt{\frac{q}{D} + L + \frac{K}{m}} \right]}{\frac{\sigma}{D \cdot \sqrt{\frac{q}{D} + L}} \left( \frac{\psi(k) \cdot h_B}{(1 - F_2(k))} + k \cdot h_B + k \cdot L \cdot C_B \right) + \left( h_B + h_V \left[ (m-1) - (m-2) \cdot \frac{D}{P} \right] - n \cdot L \cdot C_B \right)}}$$

- Langkah 4 : Ulangi langkah 2 sampai 3 hingga nilai  $q$  dan  $k$  tidak berubah
- Langkah 5 : Tetapkan bahwa  $q_m^* = q$  dan  $k_m^* = k$  dan hitung  $TC(q_m^*, k_m^*, m)$  dengan persamaan :

$$TC_{gab} = \frac{D}{n \cdot q} (A + F \cdot n) + h_B \left( \frac{1}{2} \cdot q + k \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{q}{D} + L} \right) + \frac{D}{q} \cdot \pi \cdot \sigma \cdot \psi(k) \sqrt{\frac{q}{D}} + n \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot q + k \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{q}{D} + L} \right) \cdot L \cdot C_B + \frac{1}{2} \cdot q \cdot h_V \left( (m-1) - (m-2) \cdot \frac{D}{P} \right) + \frac{D}{m \cdot q} \cdot K$$

- Langkah 6 : Jika  $TC(q_m, k_m, m) \leq TC(q_{m-1}^*, k_{m-1}^*, m-1)$  ulangi langkah 1-5 dengan  $m = m+1$ , tetapi jika sebaliknya lanjutkan ke langkah 7
- Langkah 7 : Hitung  $TC(q^*, k^*, m^*) = TC(q_{m-1}^*, k_{m-1}^*, m-1)$  sehingga didapatkan nilai  $q^*$ ,  $k^*$ , dan  $m^*$
- Langkah 8 : Tetapkan  $m^*$  terpilih sebagai acuan untuk menentukan nilai  $n^*$
- Langkah 9 : Jika  $TC(q_{(m,n)}, k_{(m,n)}, m, n) \leq TC(q_{(m,(n-1))}^*, k_{(m,(n-1))}^*, m^*, n-1)$  ulangi langkah 1-5 dengan  $n = n+1$ , tetapi jika sebaliknya lanjutkan ke langkah 10
- Langkah 10 : Hitung  $TC(q^*, k^*, m^*, n^*) = TC(q_{(m,(n-1))}^*, k_{(m,(n-1))}^*, m^*, n-1)$  sehingga didapatkan nilai  $q^*$ ,  $k^*$ ,  $m^*$ , dan  $n^*$ . Solusi optimal.

### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

#### 3.1 Solusi Model

##### 3.1.1 Studi Kasus

Parameter yang digunakan dalam studi kasus menggunakan contoh numerik dari penelitian Ouyang dkk (2004) ditambah dengan beberapa parameter yang dibutuhkan.

- Permintaan per tahun ( $D$ ) = 600 unit/tahun  
 Standar deviasi permintaan ( $\sigma$ ) = 7 unit/tahun

Laju produksi ( $P$ )	=	2000 unit/tahun
Biaya pesan ( $A$ )	=	200/ pesan
Biaya set-up ( $K$ )	=	1500/set-up
Biaya simpan pembeli ( $h_B$ )	=	20/ unit/simpan
Biaya simpan penjual ( $h_V$ )	=	15/ unit/simpan
Biaya pengiriman ( $F$ )	=	25 / pengiriman
Biaya <i>Backorder</i> ( $\pi$ )	=	50/ unit
Biaya fleksibilitas ( $l$ )	=	0,03
Harga jual produk ( $C_B$ )	=	200/unit
Lead time ( $L$ )	=	2 minggu

Hasil perhitungan total biaya dan variabel keputusan untuk kondisi independen dan integrasi dengan mempertimbangkan adanya konsep *lossing flexibility cost* dengan *lead time* konstan dapat dilihat pada tabel 1.

**Tabel 1. Perbandingan total biaya persediaan dengan kebijakan *lossing flexibility cost***

Model	$n$	$m$	$q$	TC		Total Cost
				Pembeli	Penjual	
Independen <i>lossing flexibility cost</i>	2,58	9,86	43	4091,82	4219,64	8311,46
<i>Integrated lossing flexibility cost</i>	1	3	143	3257,86	3921,15	7172,37

Berdasarkan hasil perbandingan kedua model pada tabel 1, terlihat reduksi besarnya total biaya persediaan antara kondisi independen dengan kondisi integrasi dengan asumsi *lead time* yang ditetapkan adalah konstan. Besarnya selisih total biaya persediaan sebesar 1132,5 atau sebesar 13,63%. Secara terpisah dapat dilihat bahwa total biaya pada pembeli mengalami penurunan sebesar 20,38% sedangkan total biaya pada penjual mengalami penurunan sebesar 7,07%. Perbandingan besarnya biaya yang terlibat dari kondisi independen dan *integrated* untuk *lossing flexibility cost* model pada kondisi optimal dapat dilihat pada tabel 2.

**Tabel 2. Perbandingan komponen biaya persediaan kondisi independen dan *integrated***

Komponen Biaya	Independen <i>lossing flexibility cost</i> Model	<i>Integrated lossing flexibility cost</i> Model	Saving (%)
Biaya Pesan	1279,06	944,06	- 26,19
Biaya Simpan Pembeli	693,97	1704,39	+145,60
Biaya Simpan Penjual	2096,89	1823,25	- 13,05
Biaya Kekurangan	1494,20	98,10	- 93,43
Biaya Fleksibilitas Kehilangan	624,57	511,32	- 18,13
Biaya Produksi	2122,74	2097,90	- 1,17
<b>Total Cost</b>	<b>8311,46</b>	<b>7179,01</b>	

Adanya kebijakan *lossing flexibility cost* memberikan kontribusi untuk permintaan bersifat probabilistik dan mempertimbangkan adanya *backorder* terhadap total biaya persediaan pada pembeli maupun pada penjual. Jika dilihat dari besarnya masing-masing komponen biaya baik yang terdapat pada penjual maupun pembeli, maka hasil perbandingan menunjukkan terdapat *trade off* antara biaya simpan pada pembeli dan biaya kekurangan. Biaya simpan pembeli dengan model integrasi naik hampir sebesar 150% dari biaya simpan dengan model independen. Biaya kekurangan (*backorder*) dengan model integrasi turun sebesar 100% dari biaya simpan dengan model independen. Komponen biaya persediaan lain yaitu biaya pesan, biaya simpan penjual dan biaya fleksibilitas kehilangan mengalami penurunan yang cukup signifikan dari model integrasi dengan model independen. Sedangkan biaya produksi tidak signifikan mengalami penurunan dari model integrasi dengan model independen.

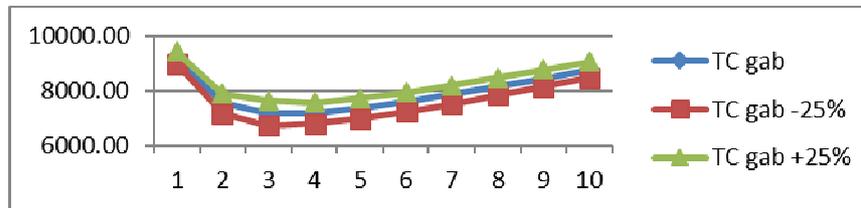
### 3.2 Analisis Sensitivitas

Analisis sensitivitas dilakukan untuk memperoleh adanya perubahan yang berarti melalui parameter yang terkait dengan total biaya persediaan. Analisis sensitivitas ditunjukkan untuk

parameter biaya simpan dan biaya kekurangan. Hal ini dilakukan untuk melihat perubahan parameter-parameter yang berpengaruh dalam kedua biaya tersebut.

**3.2.1 Perubahan Terhadap Parameter Biaya Simpan Pembeli ( $h_B$ )**

Perubahan yang dilakukan untuk parameter  $h_B$  dilakukan dengan perubahan sebesar -25% dan +25% dari kondisi awal. Hasil total biaya persediaan untuk kondisi integrasi (*joint*) dengan perubahan parameter  $h_B$  dapat dilihat pada gambar 1.



**Gambar 1. Kondisi optimal biaya persediaan untuk perubahan parameter  $h_B$  sebesar -25% dan +25%**

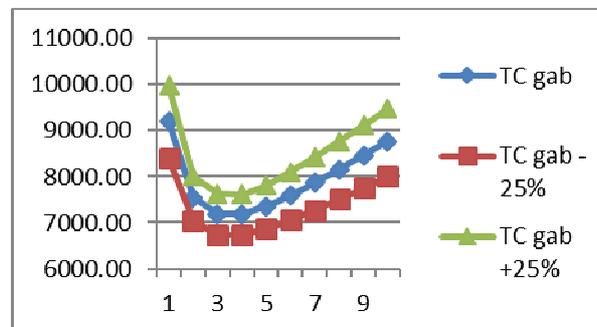
Perubahan parameter  $h_B$  memberi dampak yang tidak berarti terhadap total biaya persediaan untuk kondisi integrasi dari kondisi awal baik biaya simpan pembeli sebesar -25%. Sedangkan untuk perubahan biaya simpan pembeli sebesar +25% memberi dampak yang berarti sehingga merubah optimalitas total biaya persediaan kondisi integrasi. Perubahan terhadap biaya simpan sebesar +25% merubah nilai variabel keputusan dari kondisi *existing* untuk parameter  $k$  dan  $q$ . Perbandingan masing-masing komponen biaya pada kondisi optimal dapat dilihat pada tabel 3.

**Tabel 3. Perbandingan komponen biaya persediaan kondisi integrasi untuk perubahan parameter  $h_B$  sebesar -25% dan +25%**

Komponen Ongkos	Existing	-25%	Perubahan (%)	+25%	Perubahan (%)
Ongkos Pesan	944,06	944,06	0	1172,06	+24,2
Ongkos Simpan Buyer	1704,39	1278,29	-25	1777,82	+4,3
Ongkos Simpan Vendor	1823,25	1823,25	0	1468,56	-19,45
Ongkos Kekurangan	98,10	73,77	-24,8	120,84	+2,32
Ongkos Fleksibilitas Kehilangan	511,32	511,32	0	426,68	-16,55
Ongkos Produksi	2097,90	2097,90	0	2097,90	0
<b>Total Cost</b>	<b>7179,01</b>	<b>6728,59</b>		<b>7570,55</b>	

**3.2.2 Perubahan Terhadap Parameter Biaya simpan Penjual ( $h_V$ )**

Perubahan yang dilakukan untuk parameter  $h_V$  dilakukan dengan perubahan sebesar -25% dan +25% dari kondisi awal. Hasil total biaya persediaan untuk kondisi integrasi (*joint*) dengan perubahan parameter  $h_V$  dapat dilihat pada gambar 2.



**Gambar 2. Kondisi optimal biaya persediaan untuk perubahan parameter  $h_V$  sebesar -25% dan +25%**

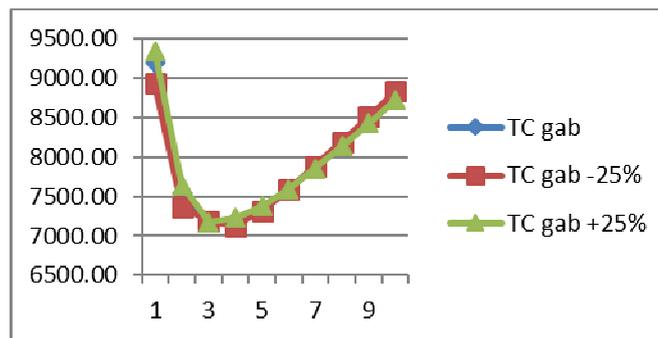
Perubahan parameter  $h_v$  memberi dampak yang tidak berarti terhadap total biaya persediaan untuk kondisi integrasi dari kondisi awal baik biaya simpan penjual sebesar -25%. Sedangkan untuk perubahan biaya simpan penjual sebesar +25% memberi dampak yang berarti sehingga merubah optimalitas total biaya persediaan kondisi integrasi. Perubahan terhadap biaya simpan sebesar +25% merubah nilai variabel keputusan dari kondisi *existing* untuk parameter  $k$  dan  $q$ . Perbandingan masing-masing komponen biaya pada kondisi optimal dapat dilihat pada tabel 4.

**Tabel 4. Perbandingan komponen biaya persediaan kondisi integrasi untuk perubahan parameter  $h_v$  sebesar -25% dan +25%**

Komponen Ongkos	Existing	-25%	Perubahan (%)	+25%	Perubahan (%)
Ongkos Pesan	944,06	944,06	0	1215,89	+28,79
Ongkos Simpan Buyer	1704,39	1704,39	0	1409,64	-17,29
Ongkos Simpan Vendor	1823,25	1367,44	-26,74	1769,54	-2,94
Ongkos Kekurangan	98,10	106,94	+9,01	91,72	-6,50
Ongkos Fleksibilitas Kehilangan	511,32	511,32	0	422,92	-17,28
Ongkos Produksi	2097,90	2097,90	0	2701,98	+28,79
<b>Total Cost</b>	<b>7179,01</b>	<b>6732,04</b>		<b>7611,65</b>	

**3.2.3 Perubahan Terhadap Parameter Biaya Kekurangan (*Backorder*)**

Perubahan yang dilakukan untuk parameter  $\pi$  dilakukan dengan perubahan sebesar -25% dan +25% dari kondisi awal. Hasil total biaya persediaan untuk kondisi integrasi (*joint*) dengan perubahan parameter  $\pi$  dapat dilihat pada gambar 3.



**Gambar 3. Kondisi optimal ongkos persediaan perubahan parameter  $\pi$  sebesar -25% dan +25%**

Perubahan parameter  $\pi$  memberi dampak yang berarti terhadap total biaya persediaan untuk kondisi integrasi dari kondisi awal menjadi penurunan biaya *backorder* sebesar -25% dan +25%. Perubahan terhadap biaya kekurangan sebesar -25% memberikan perubahan optimalitas total biaya persediaan kondisi integrasi. Optimalitas total biaya persediaan akan merubah variabel keputusan  $k$  dan  $q$ , dimana besarnya  $k = 1,41$  dan  $q = 119$ . Berbeda dengan perubahan biaya *backorder* +25%, tidak memberikan perubahan optimalitas total biaya persediaan kondisi integrasi. Sehingga nilai variabel keputusan adalah sama dengan kondisi *existing*. Perbandingan masing-masing komponen biaya pada kondisi optimal dapat dilihat pada tabel 5.

**Tabel 5. Perbandingan komponen biaya persediaan kondisi integrasi untuk perubahan parameter  $\pi$  sebesar -25% dan +25%**

Komponen Ongkos	Existing	-25%	Perubahan (%)	+25%	Perubahan (%)
Ongkos Pesan	944,06	1167,28	+23,64	944,06	0
Ongkos Simpan Buyer	1704,39	1367,70	-19,75	1704,39	0
Ongkos Simpan Vendor	1823,25	1474,58	-19,12	1823,25	0
Ongkos Kekurangan	98,10	108,05	+10,14	92,34	5,8
Ongkos Fleksibilitas Kehilangan	511,32	410,31	-19,75	511,32	0

Ongkos Produksi	2097,90	2593,95	+23,64	2097,90	0
<b>Total Cost</b>	<b>7179,01</b>	<b>7121,87</b>		<b>7173,25</b>	

#### 4. KESIMPULAN

Total persediaan gabungan untuk penjual tunggal dan pembeli tunggal dapat diturunkan dengan mempertimbangkan adanya reduksi biaya setup. Reduksi biaya setup dapat menggunakan penambahan biaya fleksibilitas kehilangan pada pembeli. Hal ini dapat dijelaskan bahwa kebijakan pembeli yang melakukan pemesanan ke pada penjual dalam jumlah besar dan sering bisa mengakibatkan perbedaan kondisi banyaknya jumlah pengiriman ( $n$ ) dan banyaknya set lot produksi ( $m$ ). Dari sisi penjual maka akan diupayakan untuk menurunkan waktu setup produksi supaya tidak membebankan pada total biaya persediaan. Oleh karena itu, adanya kebijakan dari penjual tersebut maka dari sisi pembeli perlu dimunculkan adanya biaya fleksibilitas terhadap hal tersebut. Sehingga akan muncul penambahan biaya kehilangan sebagai dispensasi fleksibilitas kebijakan setup yang dilakukan oleh penjual. Jumlah pemesanan pembeli yang besar akan menimbulkan besarnya biaya simpan pada pembeli. Namun, hal tersebut sebanding dengan pengurangan biaya kekurangan jika pembeli memilih kebijakan adanya *backorder*. Penggunaan konsep *losing flexibility cost* dapat digunakan untuk minimasi total biaya persediaan gabungan secara signifikan apabila besarnya biaya simpan pada pembeli lebih kecil dibandingkan biaya simpan pada penjual.

Pengembangan model yang telah dilakukan diatas masih memiliki beberapa asumsi. Salah satunya adalah asumsi kebijakan persediaan pembeli adalah *periodic review*. Penelitian adanya *losing flexibility cost* untuk kebijakan *continuous review* dapat dilakukan sehingga nanti hasilnya dapat dibandingkan antara kebijakan terpilih dengan penelitian yang sudah ada seperti Ouyang dkk (2004) dengan kebijakan *controllable lead time*. Berdasarkan perbandingan kebijakan tersebut maka dapat dikembangkan model integrasi persediaan dengan dominasi penjual dan dominasi pembeli. Selain itu, hal lain yang dapat dikembangkan adalah apabila produk bersifat mudah rusak.

#### DAFTAR PUSTAKA

- Banerjee, A, 1986.a, A Joint Economic Lot Size Model for Purchaser and Vendor, Decision Science, 17(3), 292-311
- Banerjee, A, 1986.b, A Quantity Discount Pricing Model to Increase Vendor Profits, Management Science, 32(11), 1513-1517
- Banerjee, A and Kim, S.L, 1995, An Integrated JIT Inventory Model, International Journal of Operation and Management, 15(9), 237-244
- Ben-Daya, M dan Hariga, M, 2004, integrated single Vendor Single Buyer Model With Stochastic Demand and Variable Lead Time, International Journal Production Economics, 92, 75-80
- Chang, H.C, Ouyang, L.Y dan Wu, K.S, 2006, Integrated Vendor-Buyer Cooperative Inventory Models with Controllable Lead Time and Ordering Cost Reduction, European Journal of Operation Research, 170, 481-495
- Chen, L.C, dan Hsiao, Y.C, 2011, Modified Controllable Lead Time Model with Stochastic Demand and Batch Shipment Policy
- Foote, B, Kibriaei, N dan Kumin, H, 1988, Heuristic Policies For Inventory Ordering Problems With Long and Randomly Varying, J.Opns Mgmt, 7, 115-124
- Goyal, S.K, 1976, An Integrated Inventory Model for A Single Supplier- Single Customer Problem, International Journal of Production Research, 15(1), 107-111
- Goyal, S.K, 1988, A Joint Economic Lot Size Model for Purchaser and Vendor : a Comment, Decision Science, 19, 236-241
- Glock, C.H, 2012, The Joint Economic Lot Size Problem : A Review, Int. J. Production Economics, 135, 671-686
- Hill, R.M, 1997, The Single Vendor-single Buyer Integrated Production-Inventory Model with Generalized Policy, European Journal of Operational Research, 493-499
- Jauhari, W.A, Pujawan, I.N, Wiratno, S.E dan Priyandari, Y, Integrated Inventory Model for Single Vendor – Single Buyer with Probaabilistic Demand, International Journal of Operational Reserach, Vol. 11, No. 2, 2011, 160 - 178

- Kelle, P, Al-Khateeb, M dan Miller, P.A, Partnership and Negotiation Support by Joint Optimal Ordering/Setup Policies for JIT, *International Journal of Production Economics*, 81-82, 431-441
- Lee, H.L dan Rosenblatt, 1986, M.J, A Generalized Quantity Discount Pricing Model to Increase Supplier Profit, *Management Science*, 32(9), 1177-1185
- Monahan, J.P, 1984, A Quantity discount model to Increase Vendor Profit, *Management Science*, 30(6), 720-726
- Ouyang, L.Y, Wu, K.S dan Ho, C.H, 2004, Integrated Vendor–Buyer Cooperative Models with Stochastic Demand in Controllable Lead Time, *International Journal Production Economics*, 92, 255-266
- Ouyang, L.Y, Wu, K-S dan Ho, C.H, 2006, The Single-Vendor Single-Buyer Integrated Inventory Problem with Quality Improvement and Lead Time Reduction – Minimax Distribution Free Approach, *Asia-Pasific Journal of Operational Research*, 23, 407-224
- Pan, J.C.H dan Yang, J.S, 2002, A Study of an Integrated inventory with Controllable Lead Time, *International Journal of Production Research*, 40(5), 1263-1273
- Pujawan, I.N dan Kingsman, B.G, 2002, Joint Optimization and Timing Synchronisation in a Buyer Supplier Inventory System, *International Journal of Operations and Quantitative Management*, 8(2), 93-109
- Ravichandran, N, 1995, Stochastic Analysis of A Continuous Review Perishable Inventory System With Positive Lead Time and Poisson Demand, *European Journal of Operational Research*, 84, 444-457
- Siajadi, H, Ibrahim, N.R dan Lochert, P.B, 2006, Joint Economic Lot Size in Distribution System with Multiple Shipment Policy, *International Journal of Production Economics*, 102, 302-316
- Tersine, R.J, 1982, *Principles of Inventory and Materials Management* (New-York: North-Holland)
- Yang, F.C, Wee, H.M dan Yang, H.J, 2007, Global Optimal Policy For Vendor-Buyer Integrated Inventory System Within Just In Time Environment, *Journal Global Optimization*, 37, 505-511