ISBN : 978.602.361.002.0

KAJIAN MATRIKS DALAM ALJABAR MAX PLUS

Nurwan
nurwan_mat@ung.ac.id

ABSTRAK. Artikel ini membahas tentang matriks di dalam aljabar max plus serta beberapa aplikasinya. Operasi dasar dalam aljabar max plus adalah maksimum ($\oplus$) dan penjumlahan ($\otimes$). Matriks yang dibahas dalam artikel ini adalah matriks tak tereduksi. Kajian yang diutamakan dalam artikel ini adalah bagaimana perilaku suatu perpangkatan matriks dalam aljabar max plus.Perilaku akhir dari perpangkatan matriks adalah siklik dan memenuhi persamaan $A^{\otimes k+c} = \lambda^{\otimes c} \otimes A^{\otimes k}$.

Kata Kunci: *Aljabar Max Plus;Matriks; Matriks Tak Tereduksi****;*** *Pangkat Matriks*

1. PENDAHULUAN

Aljabar max plus memberikan kemudahan dalam melakukan pemodelan dan analisa suatu sistem atau model matematika. Hasil yang diperoleh berupa sistem yang linear sehingga memudahkan dalam melakukan komputasi. Penjelasan lebih lanjut tentang aplikasi aljabar max plus dapat dilihat pada [1],[2], [3], dan [5]. Aljabar max plus merupkan salah satu klas dari Sistem Event Diskrit. Banyak hal yang dapat dikaji dalam aljabar max plus, terutama yang berkaitan dengan model matematika dari suatu sistem event diskrit. Beberapa masalah sistem event diskrit yang telah dilakukan kajian menggunakan aljabar max plus diantaranya sistem manufaktur, jaringan telekomonikasi, sistem transportasi, sistem logistik dan lain sebagainya.

Sistematika dari tulisan ini adalah diawali dengan kajian tentang aplikasi atau penggunaan aljabar max plus dalam kehdupan sehari-hari. Pada bagian kedua dari tulisan ini membahas tentang notasi dan definisi yang berkaitan dengan aljabar max plus serta pengemabangan aljabar max plus dalam bentuk matriks dan graph. Kemudian pada bagian ketiga diberikan contoh aplikasi dari graph dalam aljabar max plus. Pada bagian keempat dibahas perilaku suatu perpangkatan matriks dan disertai dengan contoh untuk memahami teorema yang diberikan. Makalah ini bertujuan untuk mengkaji tentang matriks dalam aljabar max plus khususnya bagaimana perilaku perpangkatan matriks.

Operasi dasar aljabar max plus mempunyai kemiripan dengan operasi dalam aljabar biasa termasuk kajian masalah matriks.
Operasi dasar dalam aljabar max plus adalah maksimum yang direpresentasikan oleh $\oplus$ dan penjumlahan direpresentasikan oleh $\otimes$. Didefinisikan $\varepsilon = -\infty$ dan $e = 0$ dan notasi $R_{\max}$ adalah himpunan bilangan real $R \cup \{\varepsilon\}$. Dua operasi dasar tersebut didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a \oplus b &= \max(a,b) \\ a \otimes b &= a + b \end{aligned} \qquad (1)$$

ISBN : 978.602.361.002.0

Penjabaran dari unsur dasar dan operasi dasar dalam aljabar max plus sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &\max(a,-\infty) = \max(-\infty, a) = a \\ &a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a \\ &a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon \\ &a \otimes e = e \otimes a = a \end{aligned} \qquad (2)$$

Kajian mendalam tentang operasi dalam aljabar max plus dapat dilihat pada [1] dan [3]. Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathbf{R}_{\max}$ dapat diperluas untuk operasi matriks seperti hanya dengan aljabar biasa, namun operasi yang digunakan adalah maksimum dan penjumlahan. Operasi $\oplus$ (max)dan $\otimes$ (tambah) diperluas ke matriks sebagai berikut: untuk $A, B \in \mathbf{R}_{\max}^{m \times n}$

$$[A \oplus B]_{i,j} = a_{i,j} \oplus b_{i,j} = \max\{a_{i,j}, b_{i,j}\},\ i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,n \qquad (3)$$

dan untuk $A \in \mathbf{R}_{\max}^{m \times p}, B \in \mathbf{R}_{\max}^{p \times n}$

$$[A \otimes B]_{i,j} = \bigotimes_{k=1}^{p} a_{i,k} \otimes b_{k,j} = \max_{1 \le k \le p}\left\{a_{i,k} + b_{k,j}\right\},\ i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots n. \qquad (4)$$

Seperti halnya dalam aljabar biasa, perkalian matriks dalam aljabar max plus juga tidak komutatif.Pangkat dalam aljabar max plus didefinisikan [1].

$$a^{\otimes n} = \underbrace{a \otimes a \otimes \cdots \otimes a}_{\text{sebanyak } n} \qquad (5)$$

Untuk semua $n \in N$ dengan $n \neq 0$.

Operator $\otimes$ dalam aljabar max plus mempunyai invers yang dinyatakan sebagai pangkat negatif.

$$a \otimes b^{\otimes(-1)} = a - b \qquad (6)$$

tetapi untuk operasi $\oplus$ tidak memiliki invers.

Contoh 1.

Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ e & 4 \end{pmatrix}$ dan $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ maka diperoleh maksimum ($\oplus$)matriks A dan B $A \oplus B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ e & 4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ e & 4 \end{pmatrix}$, sedangkan $A \otimes B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ e & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$. Dengan cara yang sama diperoleh $B \otimes A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$. Dari contoh ini terlihat bahwa untuk operasi $\otimes$ pada matriks tidak komutatif.

ISBN : 978.602.361.002.0

Didefinisikan matriks $E \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$, $(E)_{ij} := \begin{cases} 0\ , & \text{jika } i = j \\ \varepsilon\ , & \text{jika } i \neq j \end{cases}$ dan matriks $\varepsilon \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$, $(\varepsilon)_{ij} := \varepsilon$ untuk setiap i dan j. Relasi“ $\underline{\pi}_{\text{m}}$ ”pada $\mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ didefinisikan dengan $A \,\underline{\pi}_{\text{m}}\, B \Leftrightarrow A \oplus B = B$. Didefinisikan $\mathbf{R}_{\max}^{n} := \{\boldsymbol{x} = [\,x_1, x_2, \ldots , x_{\text{n}}]^{\text{T}} \mid x_{\text{i}} \in \mathbf{R}_{\max}, i = 1, 2, \ldots , n\}$.Unsur-unsur dalam $\mathbf{R}_{\max}^{n}$ disebur vektor atas $\mathbf{R}_{\max}$, [6] dan [7]. Persamaan ruang keadaan menggunakan simbol aljabar max plus didefinisikan sebagai berikut [5]:

$$\left.\begin{aligned} x(k+1) &= A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k) \\ y(k) &= C \otimes x(k) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

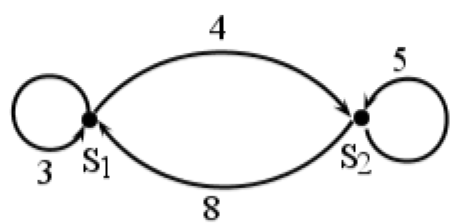
Nilai-karakteristik dan vektor-karakteristik dari suatu matriks persegi A berukuran $n \times n$ dalam aljabar max-plus didefinisikan dalam persamaan:

$$A \otimes x = \lambda \otimes x \qquad (7)$$

$x \in \mathbf{R}_{\max}^{n}$ dan $\lambda \in \mathbf{R}$ dinamakan vektor karakteristik dan nilai-karakteristik dari matriks A dengan vector $x \neq (\varepsilon, \Lambda\ , \varepsilon)'$. [5]

Pada bagian ini dibahas suatu graph berarah dari suatu matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$. selanjutnya diberikan suatu contoh aplikasi dan diselesaikan menggunakan aljabar max plus. Suatu graph dikatakan *strongly connected* bila suatu path ada untuk setiap titik i ke setiap titik j. Dalam hal yang demikian matriks yang terkait dengan grap $\mathbf{G}(A)$ ini dinamakan matriks ***takterereduksi***. Sedangkan bila grap G(A) tidak strongly connected, maka matrik A adalah tereduksi, [5].

Contoh 2. Diberikan suatu graph***strongly connected***seperti pada Gambar 1.



Gambar 1: Graph G(A) [5]

Interpretasi dari Gambar 1 merupakan jalur kereta api yang dilalui dari sebuah kota. Dalam hal ini akan disusun suatu penjadwalan sehingga penumpang kereta api dapat memilih jalur dan kota yang akan dilewatinya. Graph pada Gambar 1 akan didefiniskan waktu keberangkatan untuk masing-masing stasiun, misalkan $x_1(k)$ dan $x_2(k)$ maka pada saat yang ke-k dengan $k = 0,1,2,3,\Lambda$, diperoleh persamaan ruang keadaan sebagai berikut [5]

ISBN : 978.602.361.002.0

$$
\begin{aligned}
x_1(k+1) &= \max\{3 + x_1(k), 8 + x_2(k)\} \\
x_2(k+1) &= \max\{4 + x_1(k), 5 + x_2(k)\}
\end{aligned} \tag{8}
$$

Persamaan (8) dapat dirubah dalam notasi alajabar max plus sebagai berikut: menggunakan notasi max-plus aljabar didapat, [5]

$$
\begin{aligned}
x_1(k+1) &= 3 \otimes x_1(k) \oplus 8 \otimes x_2(k) \\
x_2(k+1) &= 4 \otimes x_1(k) \oplus 5 \otimes x_2(k)
\end{aligned} \tag{9}
$$

Persamaan (9) dapat dirubah penulisannya dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$
\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}. \tag{10}
$$

Persamaan (10) dapat disederhanakan dalam bentuk:

$$
x(k+1) = A \otimes x(k), k = 0,1,2,\Lambda \tag{11}
$$

dengan $x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$ dan $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

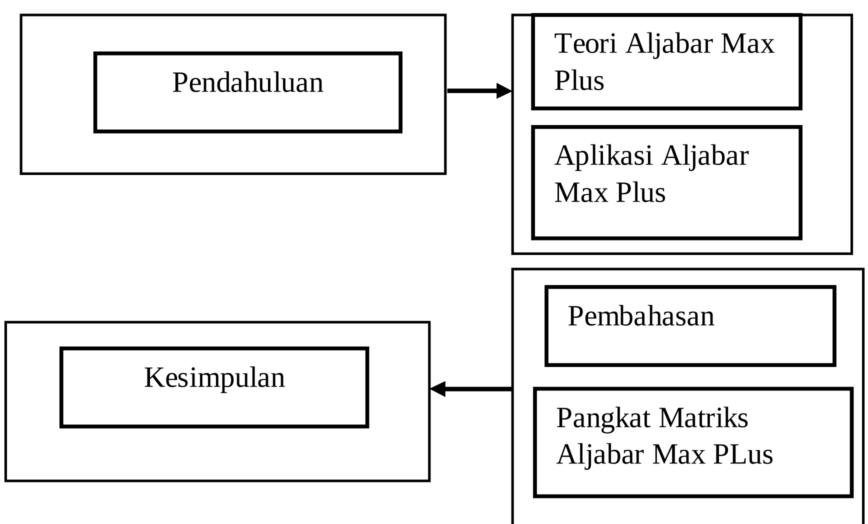
Sistem pada Persamaan (11) merupakan jadwal periodik dari jalur kereta api yang ada pada Contoh 1. Hal ini sesuai dengan bentuk per-samaan berikut :

$$
x(k+1) = A \otimes x(k) = \lambda^{\otimes(k+1)} \otimes x(0), k = 0,1,2,\Lambda
$$

Untuk lebih lanjut tentang penjadwalan dari Contoh 2 dapat dilihat pada [5].

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian kajian pustaka atau kajian teori yang berkaitan dengan aljabar max plus. Alur penelitian terlihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Alur Penelitian

ISBN : 978.602.361.002.0

3. PEMBAHASAN

Pada bagian ini dibahas pengkat matriks dalam aljabar max plus, serta akan melihat perilaku dari perpangkatan matriks tersebut. Matriks yang digunakan adalah matriks taktereduksi.

Teorema [4]

Jika $A \in R_{\max}^{n \times n}$ adalah matriks taktereduksi, maka terdapat $\lambda \in R_{\max}, k_0 \in N, c \in N_0$ sedemikian sehingga $A^{\otimes k+c} = \lambda^{\otimes c} \otimes A^{\otimes k}$

λ merupakan nilai eigen dari matriks A dan c adalah kesiklikan dari matriks A.

Contoh 3 Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & \varepsilon \\ 3 & 2 & 3 \\ \varepsilon & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Dengan menggunakan aturan pangkan (4) dalam bentuk matriks maka diperoleh

$$A^{\otimes 2} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & \varepsilon \\ 3 & 2 & 3 \\ \varepsilon & 2 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -2 & 3 & \varepsilon \\ 3 & 2 & 3 \\ \varepsilon & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^{\otimes 3} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & \varepsilon \\ 3 & 2 & 3 \\ \varepsilon & 2 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 10 \\ 9 & 9 & 11 \\ 9 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A^{\otimes 4} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & \varepsilon \\ 3 & 2 & 3 \\ \varepsilon & 2 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 8 & 8 & 10 \\ 9 & 9 & 11 \\ 9 & 10 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 12 & 14 \\ 12 & 13 & 15 \\ 13 & 14 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A^{\otimes 5} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & \varepsilon \\ 3 & 2 & 3 \\ \varepsilon & 2 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 12 & 12 & 14 \\ 12 & 13 & 15 \\ 13 & 14 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 16 & 18 \\ 16 & 17 & 19 \\ 17 & 18 & 20 \end{pmatrix}$$

$$A^{\otimes 6} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & \varepsilon \\ 3 & 2 & 3 \\ \varepsilon & 2 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 15 & 16 & 18 \\ 16 & 17 & 19 \\ 17 & 18 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 20 & 22 \\ 20 & 21 & 23 \\ 21 & 22 & 24 \end{pmatrix}$$

$$A^{\otimes 7} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & \varepsilon \\ 3 & 2 & 3 \\ \varepsilon & 2 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 19 & 20 & 22 \\ 20 & 21 & 23 \\ 21 & 22 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 24 & 26 \\ 24 & 25 & 28 \\ 25 & 26 & 30 \end{pmatrix}$$

ISBN : 978.602.361.002.0

$$A^{\otimes 8} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & \varepsilon \\ 3 & 2 & 3 \\ \varepsilon & 2 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 23 & 24 & 26 \\ 24 & 25 & 28 \\ 25 & 26 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 28 & 30 \\ 30 & 29 & 32 \\ 29 & 30 & 34 \end{pmatrix}$$

Jika diperhatikan hasil perhitungan dari Contoh 1, mulai dari $A^{\otimes 5}, A^{\otimes 6}...$ terlihat perpangkatan matriks yang periodik.

Bentuk $A, A^{\otimes 2}, A^{\otimes 3}, A^{\otimes 4}, A^{\otimes 5}, A^{\otimes 6}, ...$ memenuhi persamaan

$A^{\otimes k+c} = 4 \otimes A^{\otimes k}$ untuk k = 5,6,7... dan c = 1.

Dari hasil perhitungan ini didapat nilai eigen (λ) adalah 4 dan c=1.

4. SIMPULAN

Perilaku akhir dari perpangkatan matriks adalah siklik dan memenuhi persamaan $A^{\otimes k+c} = \lambda^{\otimes c} \otimes A^{\otimes k}$. Untuk selanjutnya dapat dilakukan kajian tentang perilaku matriks tereduksi dan aplikasi dari perpangkatan matriks.

DAFTAR PUSTAKA

[1] B. Heidergott, G.J. olsder, and J. van der Woude, (2006). *Max Plus at Work, Modell ing and Analysis of Synchronized Systems: A Course on Max-Plus Algebra and Its Applications*, Princeton University Press.

[2] Butkovic, P., R.A. Cuninghame-Green (2007), On Matrix Powers in MaxAlgebra, *Linear Algebra and Its Application,* 421(2007)370-381

[3] F. Baccelli, G. Cohen, G.J. olsder, and J.-P. Quadrat, (1992). *Synchronization and linearity: an algebra for discrete event systems*, Wiley.

[4] Schutter D. B. (2000), On the Ultimate Behavior of the Sequence of Consecutive powers of a Matrix in the Max Plus Algebra, *Linear Algebra and Its Application* 307(2000)103-117

[5] Subiono (2010), The existence of eigenvalues for reducible matrices in MaxPlus Algebra, Seminar Nasional Matematika UMM Malang

[6]M. Andy Rudhito (2012), Sistem linear max-plus interval Waktu invariant autonomous, Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Yogyakarta,.

ISBN : 978.602.361.002.0

[7] M. Andy Rudhito, dkk, (2010) Pemodelan Aljabar *Max-Plus* Dan Evaluasi KinerjaJaringan Antrian *Fork-Join* TaksiklikDengan Kapasitas Penyangga TakhinggaJurnal Matematika, Vol. 1, No. 1, 2010, 8—15