ISBN : 978.602.361.002.0

DIMENSI METRIK DARI GRAF *BOOK*

A. Fauzul Fikri, Tri Atmojo Kusmayadi, Nughthoh Arfawi Kurdhi
Jurusan Matematika FMIPA UNS, Jurusan Matematika FMIPA UNS,
Jurusan Matematika FMIPA UNS
ahmadfauzulfikri@gmail.com, trikusma@uns.ac.id, arfa@mipa.uns.ac.id

ABSTRAK. Graf G adalah himpunan tak kosong berhingga $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_2\}$ yang disebut *vertex* dan $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ merupakan himpunan pasangan tidak berurutan dari anggota-anggota $V(G)$ yang disebut *edge*. Suatu graf G dikatakan terhubung jika terdapat lintasan yang menghubungkan setiap *vertex* pada G. Jika u dan v adalah *vertex-vertex* dalam graf terhubung G, maka jarak $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v pada G. Untuk himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ dari *vertex-vertex* dalam graf terhubung G dan *vertex* $v \in V(G)$, representasi v terhadap W adalah k-pasang terurut $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \ldots, d(v, w_k))$. Jika $r(v|W)$ untuk setiap *vertex* $v \in V(G)$ berbeda, maka W disebut himpunan pemisah dari $V(G)$. Himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pemisah minimum (basis), dan kardinalitas dari basis tersebut disebut dimensi metrik dari *G* dinotasikan $dim(G)$. Dalam artikel ini diselidiki dimensi metrik dari kelas graf tertentu yaitu graf *book* B_n dan diperoleh $dim(B_n) = n$ untuk $n \geq 3$.

Kata Kunci: *Himpunan pemisah; dimensi metrik; graf book*

1. PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang sangat bermanfaat untuk membantu menyelesaikan suatu permasalahan dalam kehidupan nyata. Graf G adalah himpunan tak kosong berhingga $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_2\}$ yang disebut *vertex* dan $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ merupakan himpunan pasangan tidak berurutan dari anggota-anggota $V(G)$ yang disebut *edge*. Jika suatu permasalahan dalam kehidupan nyata direpresentasikan ke dalam bentuk graf maka akan lebih mudah dimengerti dan lebih sederhana sehingga lebih mudah dicari penyelesaiannya. Masalah rute terpendek dalam transportasi adalah contoh permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang dapat direpresentasikan ke dalam bentuk graf (Chartrand dan Lesniak [3]).

Dimensi metrik merupakan salah satu kajian dalam teori graf. Dimensi metrik pertama kali diperkenalkan oleh Slater pada tahun 1975, yang selanjutnya dilanjutkan oleh Harary dan Melter (Caceres *et al.* [2]). Hingga saat ini konsep dimensi metrik masih terus dipelajari dan dikembangkan. Chartrand *et al.* [4] mengaplikasikan himpunan pemisah dalam dimensi metrik pada bidang kimia. Pada konsep ini, senyawa kimia direpresentasikan dalam bentuk graf, dimana atom direpresentasikan oleh *vertex*, dan ikatan valensi antara dua atom direpresentasikan oleh *edge*. Misalkan $V(G)$ adalah himpunan semua *vertex* terurut dan $W \subseteq V(G)$, dapat ditentukan jarak *vertex* $v \in V(G)$ menuju *vertex* $w \in W$. Jika dua senyawa berbeda mempunyai himpunan $V(G)$ dan jarak v ke w sama untuk semua $v \in V(G)$ dan

ISBN : 978.602.361.002.0

$w \in W$, maka kedua senyawa tersebut dalam satu klasifikasi. Selanjutnya Chartrand *et al.*[4] menunjukkan bahwa graf G yang mempunyai dimensi metrik 1 hanya graf lintasan $P_n, n \geq 2$atau dinotasikan $dim(P_n) = 1$. Selain itu dibuktikan bahwa graf lengkap K_n (dengan $n \geq 1$) memiliki dimensi metrik $n - 1$.

Penelitian dan pengembangan dari dimensi metrik graf kincir dimulai oleh Mudjiati [8]. Dalam penelitiannya dimensi metrik graf kincir $P_1 + nP_m$dimana $n \geq 1$, $m \geq 2$, dan $P_m$graf lintasan dengan m *vertex* adalah $n + 1$. Selanjutnya Purwono [10] melanjutkan penelitian dari Mudjiati [8] pada kelas graf kincir $K_1 + mK_n$dimana $K_n$adalah graf lengkap dengan n *vertex*.Penelitian pada graf kincir kembali dikembangkan oleh Hindayani [7]. Dalam penelitiannya diperoleh, $dim(K_r + mK_s) = m + (r - 2)$untuk $m \geq 2$, $s = 1$dan $dim(K_r + mK_s) = (s-1)m + (r-1)$untuk $m \geq 2$, $s = 1$.Berbeda dengan Mudjiati [8], Purwono [10], dan Hindayani [7] yang meneliti dimensi metrik graf kincir, Fajjria [5] mengembangkan penelitian dimensi metrik pada graf lintasan dengan $k$lintasan dan tak hingga *vertex*. Pada penelitiannya, Fajjria [5] menunjukkan bahwa dimensi metrik graf lintasan dengan *k* lintasan dan tak hingga *vertex* adalah $k - 1$ untuk $k \geq 3$.

Pada tahun 2012, Permana dan Darmaji [9] meneliti dimensi metrik dari graf pohon pisang teratur $B_{m,n}$, graf ulat teratur $C_{m,n}$, dan graf kembang api teratur $F_{m,n}$. Pada penelitiannya diperoleh dimensi metrik graf pohon pisang teratur $B_{m,n}$ adalah $m(n-1)$, $m = 1$, $n \geq 3$, dan $(n-1)$, $m \geq 2$, $n \geq 3$. Selain itu ditunjukkan bahwa dimensi metrik graf ulat teratur $C_{m,n}$adalah $m(n-1)$, $m \geq \mathbf{1}$, $n \geq 2$, dimensi metrik graf kembang api teratur$F_{m,n}$adalah n, untuk $m = 1$, $n \geq 2$ dan $m(n-1)$,untuk $m \geq 2$, $n \geq 2$. Pada tahun yang sama, Saputro *et al.*[11] meneliti tentang dimensi metrik graf $S_m + K_1, m \geq 3$ dimana dimensi metrik graf $S_m + K_1, m \geq 3$ adalah m. BerikutnyaBahri *et al.*[1] menemukan bahwa dimensi metrik graf kali silang lintasan $P_m \times P_2 \times P_2$ untuk $m \geq 2$ adalah 3. Selanjutnya Widodo [12] mengembangkan dimensi metrik dari graf *sun* (S_n), graf helm (H_n) untuk $n > 3$, dan graf *double cones*DC_n.

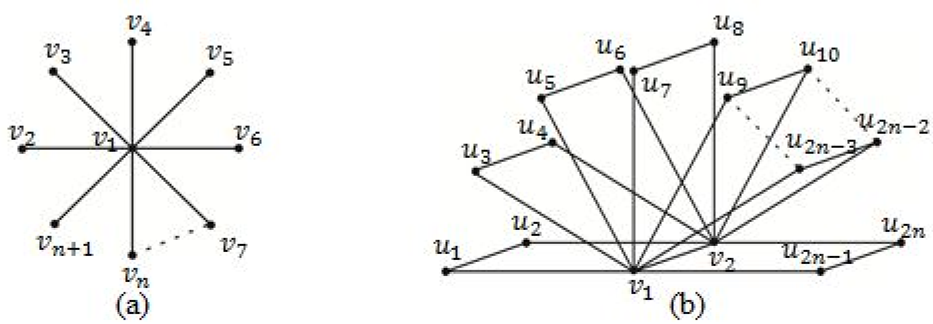
Hingga saat ini, dimensi metrik dari kelas graf tertentu masih terus dipelajari dan dikembangkan. Dalam artikel ini dibahas dimensi metrik dari kelas graf *book*B_n karena dimensi metrik dari graf tersebut belum diteliti.

2. METODE PENELITIAN

Dalam penelitian ini digunakan metode penelitian kepustakaan (*library research*), yaitu usaha mendalami, mencermati, menelaah dan mengidentifikasi pengetahuan yang ada dalam kepustakaan, dalam hal ini dapat berupa buku referensi, jurnal ataupun hasil penelitian orang lain. Langkah-langkah dalam penelitian ini, pertama menjelaskan graf *book* B_n, kedua menghitung jarak tiap *vertex* ke *vertex* lainnya pada graf tersebut, ketiga menentukan himpunan pemisah minimum atau basis, dan keempat menentukan dimensi metrik.

3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini dibahas mengenai dimensi metrik dari graf *book* $B_n$dengan $n$adalah bilangan bulat $(n \in \boldsymbol{Z})$. Menurut Gallian [6], graf *book* B_n, $n \geq 3$adalah graf *cartesian product* $S_{n+1} \times P_2$,dengan S_{n+1}adalah graf bintang dan P_2 adalah lintasan dengan dua *vertex*.C*artesian product* dari S_{n+1}dan P_2, dinotasikan $S_{n+1} \times P_2$, merupakan graf yang memiliki himpunan *vertex*$V(S_{n+1}) \times V(P_2)$. Dua *vertex*(u_1, u_2)dan (v_1, v_2)*adjacent* dalam $S_{n+1} \times P_2$jika dan hanya jika $u_1 = v_1$dan$u_2 v_2 \in E(P_2)$, atau$u_2 = v_2$dan$u_1 v_1 \in E(S_{n+1})$.Graf *star*S_{n+1}, dan graf *book* $B_n$dapat dilihat pada Gambar 1.



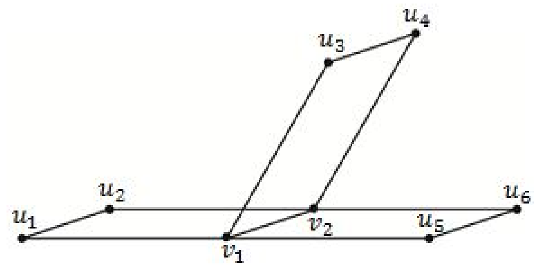
Gambar 1. (a) Graf *star*S_{n+1}, dan (b) graf *book*

Untuk mencari pola dimensi metrik dari graf *book* B_n, dimulai dengan mencari dimensi metrik dari graf *book* $B_n$dengan $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, dan seterusnya hingga diperoleh pola dimensi metrik dari graf *book* B_n. Berikut adalah konsep dari dimensi metrik, selanjutnya ditunjukkan dimensi metrik pada graf *book*$B_n$untuk$n \in [3, 5]$ dan dibuktikan dimensi metrik pada graf *book*$B_n$untuk≥ 3.

3.1. DIMENSI METRIK

Misalkan $u$dan $v$adalah *vertex-vertex* dalam graf terhubung G, maka jarak $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara $u$dan $v$pada G. Untuk himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$dari *vertex-vertex* dalam graf terhubung Gdan *vertex* $v \in V(G)$, representasi $v$terhadap Wadalah k-pasang terurut $r(v|W) = \big(d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_n)\big)$. Menurut Chartrand *et al.* [4], jika $r(v|W)$ untuk setiap *vertex* $v \in \boldsymbol{V}(G)$ berbeda, maka Wdisebut himpunan pemisah dari $V(G)$. Himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pemisah minimum (basis), dan kardinalitas dari basis tersebut disebut dimensi metrik dari *G* dinotasikan $dim(G)$.

ISBN : 978.602.361.002.0



Gambar 2. Graf *book*B_3

Berikut adalah contoh untuk menentukan dimensi metrik dari graf *book*B_3 seperti pada Gambar 2. Jika dipilih himpunan terurut $W_1 = \{v_1, v_2, u_1, u_3\}$maka diperoleh representasi untuk semua *vertex* pada B_3 terhadap W_1 adalah

$$r(v_1|W_1) = (0, 1, 1, 1);\ r(v_2|W_1) = (1, 0, 2, 2);$$
$$r(u_1|W_1) = (1, 2, 0, 2);\ r(u_2|W_1) = (2, 1, 1, 2);$$
$$r(u_3|W_1) = (1, 2, 2, 0);\ r(u_4|W_1) = (2, 1, 2, 1);$$
$$r(u_5|W_1) = (1, 2, 2, 2);\ r(u_6|W_1) = (2, 1, 2, 2).$$

Diperoleh representasi untuk semua *vertex* pada B_3 terhadap W_1 berbeda sehingga $W_1 = \{v_1, v_2, u_1, u_3\}$merupakan himpunan pemisah. Selanjutnya, jika dipilih $W_2 = \{u_1, u_3, v_5\}$, maka representasinya adalah

$$r(v_1|W_2) = (1, 1, 1);\ r(v_2|W_2) = (2, 2, 2);$$
$$r(u_1|W_2) = (0, 2, 2);\ r(u_2|W_2) = (1, 2, 2);$$
$$r(u_3|W_2) = (2, 0, 2);\ r(u_4|W_2) = (2, 1, 2);$$
$$r(u_5|W_2) = (2, 2, 0);\ r(u_6|W_2) = (2, 2, 1).$$

Diperoleh representasi untuk semua *vertex* pada B_3 terhadap W_2 berbeda sehingga W_2merupakan himpunan pemisah. Berikutnya jika dipilih$W_3 = \{u_2, u_4, u_6\}$, maka representasi untuk setiap *vertex* pada B_3terhadap W_3juga berbeda, sehingga W_3merupakan himpunan pemisah.

Pada kasus graf *book* B_3 tidak diperoleh himpunan pemisah yang memiliki 1 atau 2 elemen. Sebagai contoh jika dipilih $W_4 = \{u_1, u_3\}$dimana banyaknya anggota W adalah 2, maka representasinya adalah

$$r(v_1|W_2) = (1, 1);\ r(v_2|W_2) = (2, 2);$$
$$r(u_1|W_2) = (0, 2);\ r(u_2|W_2) = (1, 2);$$
$$r(u_3|W_2) = (2, 0);\ r(u_4|W_2) = (2, 1);$$
$$r(u_5|W_2) = (2, 2);\ r(u_6|W_2) = (2, 2).$$

ISBN : 978.602.361.002.0

Karena terdapat representasi yang sama yaitu $r(v_2|W_2) = r(u_5|W_2) = r(u_6|W_2) = (2,2)$ akibatnya $W_4 = \{u_1, u_3\}$bukanhimpunan pemisah.

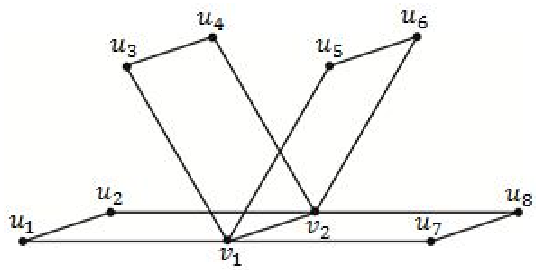
Diperoleh W_1, W_2, dan W_3adalah himpunan pemisah dengan $|W_2| = |W_3| < |W_1$. AkibatnyaW_1 bukan merupakan himpunan pemisah minimum dan W_2,W_3merupakan himpunan pemisah minimum (basis) dengan kardinalitas 3. Dengan demikian diperoleh $dim(B_3) = 3$.

3.2. DIMENSI METRIK GRAF *BOOK*B_nUNTUK$n \in [3,5]$

Pada bagian ini dibahas mengenai dimensi metrik dari graf *book* B_n untuk$n \in [3,5]$. Pada pembahasan sebelumnya diperoleh dimensi metrik dari graf *book* B_3 adalah 3.Selanjutnya dicari dimensi metrik dari graf *book* B_4seperti pada Gambar 3. Jika dipilih himpunan terurut $W = \{u_1, u_3, u_5, u_7\}$, maka diperoleh representasi untuk setiap *vertex* padaB_4 terhadap Wadalah,

$r(v_1|W) = (1,1,1,1)$; $r(v_2|W) = (2,2,2,2)$;
$r(u_1|W) = (0,2,2,2)$; $r(u_2|W) = (1,2,2,2)$;
$r(u_3|W) = (2,0,2,2)$; $r(u_4|W) = (2,1,2,2)$;
$r(u_5|W) = (2,2,0,2)$; $r(u_6|W) = (2,2,1,2)$;
$r(u_7|W) = (2,2,2,0)$; $r(u_8|W) = (2,2,2,1)$.

Diperoleh representasi untuk setiap *vertex* pada graf *book* B_4 terhadap W berbeda, sehingga $W = \{u_1, u_3, u_5, u_7\}$merupakan himpunan pemisah dengan $|W| = 4$.



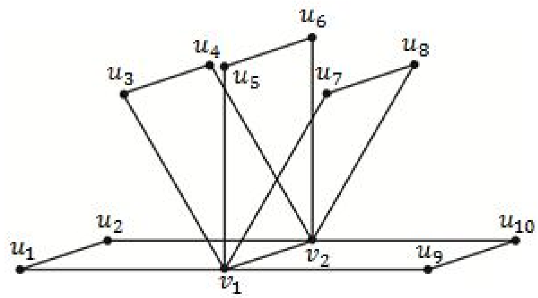
Gambar 3. Graf *book*B_4

Pada kasus graf *book* B_4tidak diperoleh himpunan pemisah yang memiliki kurang dari 4 elemen. Sebagai contoh jika dipilih himpunan terurut $W = \{u_1, u_3, u_5\}$ dimana banyaknya anggota W adalah 3, maka diperoleh representasi untuk setiap *vertex* pada B_4terhadap Wadalah,

$r(v_1|W) = (1,1,1)$; $r(v_2|W) = (2,2,2)$;
$r(u_1|W) = (0,2,2)$; $r(u_2|W) = (1,2,2)$;
$r(u_3|W) = (2,0,2)$; $r(u_4|W) = (2,1,2)$;
$r(u_5|W) = (2,2,0)$; $r(u_6|W) = (2,2,1)$;

$r(u_7|W) = (2,2,2)$; $r(u_8|W) = (2,2,2)$.

Karena terdapat representasi yang sama yaitu $r(v_2|W) = r(u_7|W) = r(u_8|W) = (2,2,2)$ akibatnya $W = \{u_1, u_3, u_5\}$,bukan himpunan pemisah. Dengan demikian diperoleh$dim(B_4) = 4$.



Gambar 4. Graf *book*B_5

Berikutnya dicari dimensi metrik dari graf *book* B_5seperti pada Gambar 4. Jika dipilih himpunan terurut $W = \{u_1, u_3, u_5, u_7, u_9\}$, maka diperoleh representasi untuk setiap *vertex* pada B_5 terhadap *W* adalah,

$r(v_1|W) = (1,1,1,1,1)$; $r(v_2|W) = (2,2,2,2,2)$;
$r(u_1|W) = (0,2,2,2,2)$; $r(u_2|W) = (1,2,2,2,2)$;
$r(u_3|W) = (2,0,2,2,2)$; $r(u_4|W) = (2,1,2,2,2)$;
$r(u_5|W) = (2,2,0,2,2)$; $r(u_6|W) = (2,2,1,2,2)$;
$r(u_7|W) = (2,2,2,0,2)$; $r(u_8|W) = (2,2,2,1,2)$;
$r(u_9|W) = (2,2,2,2,0)$; $r(u_{10}|W) = (2,2,2,2,1)$.

Diperoleh representasi untuk setiap *vertex* pada graf *book* B_5 terhadap Wberbeda, sehingga $W = \{u_1, u_3, u_5, u_7, u_9\}$merupakan himpunan pemisahdengan$|W| = 5$.

Pada kasus graf *book* B_5tidak diperoleh himpunan pemisah yang memiliki kurang dari 5 elemen. Sebagai contoh jika dipilih himpunan terurut $W = \{u_1, u_3, u_5, u_7\}$dimana banyaknya anggota W adalah 4, maka diperoleh representasi untuk setiap *vertex* pada B_5 terhadap Wadalah,

$r(v_1|W) = (1,1,1,1)$; $r(v_2|W) = (2,2,2,2)$;
$r(u_1|W) = (0,2,2,2)$; $r(u_2|W) = (1,2,2,2)$;
$r(u_3|W) = (2,0,2,2)$; $r(u_4|W) = (2,1,2,2)$;
$r(u_5|W) = (2,2,0,2)$; $r(u_6|W) = (2,2,1,2)$;
$r(u_7|W) = (2,2,2,0)$; $r(u_8|W) = (2,2,2,1)$;
$r(u_9|W) = (2,2,2,2)$; $r(u_{10}|W) = (2,2,2,2)$.

ISBN : 978.602.361.002.0

Karena terdapat representasi yang sama yaitu $r(v_2|W) = r(u_9|W) = r(u_{10}|W) = (2,2,2,2)$akibatnya $W = \{u_1, u_3, u_5, u_7\}$bukan himpunan pemisah. Dengan demikian diperoleh $dim(B_5) = 5$.

Pada graf *book* $B_n$dengan $n \in [3,5]$ diperoleh dimensi metrik $dim(B_3) = 3$, $dim(B_4) = 4$, dan $dim(B_5) = 5$, dimana mengikuti pola tertentu, yaitu dimensi metrik pada graf *book* $B_n$cenderung sama dengan nilai n.

3.3. DIMENSI METRIK GRAF *BOOK* B_nUNTUK$n \geq 3$

Pada bagian ini dibahas mengenai dimensi metrik dari graf *book* B_n untuk$n \geq 3$. Dimensi metrik dari graf *book* $B_n$untuk$n \geq 3$ditunjukkanpada Teorema 1.

Teorema 1. *Untuk semua bilangan bulat* $n \geq 3$ *berlaku* $dim(B_n) = n$

Bukti. Akan ditunjukkan $dim(B_n) = n$untuk $n \geq 3$.

(1) Ditunjukkan $dim(B_n) \leq n$.

Jika dipilih himpunan terurut $W = \{u_1, u_3, u_5, \dots, u_{2n-3}, u_{2n-1}\}$, maka diperoleh representasi untuk semua *vertex* pada $B_n$terhadap himpunan terurut Wberbeda, yaitu

$$\begin{array}{ll}
r(v_1|W) = (1,1,1,\dots,1,1); & r(v_2|W) = (2,2,2,\dots,2,2); \\
r(u_1|W) = (0,2,2,\dots,2,2); & r(u_2|W) = (1,2,2,\dots,2,2); \\
r(u_3|W) = (2,0,2,\dots,2,2); & r(u_4|W) = (2,1,2,\dots,2,2); \\
r(u_5|W) = (2,2,0,\dots,2,2); & r(u_6|W) = (2,2,1,\dots,2,2); \\
r(u_7|W) = (2,2,2,\dots,2,2); & r(u_8|W) = (2,2,2,\dots,2,2); \\
\vdots & \vdots \\
r(u_{2n-3}|W) = (2,2,2,\dots,0,2); & r(u_{2n-2}|W) = (2,2,2,\dots,1,2); \\
r(u_{2n-1}|W) = (2,2,2,\dots,2,0); & r(u_{2n}|W) = (2,2,2,\dots,2,1).
\end{array}$$

Akibatnya himpunan terurut Wadalah himpunan pemisah dengan $|W| = n$sehingga $dim(B_n) \leq n$.

(2) Ditunjukkan $dim(B_n) \geq n$.

Dengan kontradiksi, andaikan Wadalah himpunan pemisah dari graf *book* $B_n$dengan $|W| < n$.

(a) Jika dipilih himpunan terurut$W \subset \{v_1, v_2, u_1, u_2, \dots, u_{2n}\} - \{v_1, v_2, u_i, u_j\}$dimana $1 \leq i \leq 2n-1, 2 \leq j \leq 2n$, $i$ganjil dan j genap, maka terdapat dua *vertex* $u_i, u_j \in V(B_n)$ sedemikian sehingga $r(u_i|W) = r(u_j|W) = (2,2,2,2,\dots,2,2)$.

Karena terdapat representasi yang sama akibatnya W bukan merupakan himpunan pemisah.

(b) Jika dipilih himpunan terurut $W \subset \{v_1, v_2, u_1, u_2, \dots, u_{2n}\} - \{u_i, u_{i+1}, u_j, u_{j+1}\}$dimana $1 \leq i \leq 2n-1, 1 \leq j \leq 2n-1, i \neq j$, dan i, jganjil, maka terdapat dua *vertex* u_i, $u_j \in V(B_n)$ sedemikian sehingga $r(u_i|W) = r(u_j|W) = (1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2)$. Karena terdapat representasi yang sama akibatnya W bukan merupakan himpunan pemisah.

(c) Jika dipilih himpunan terurut $W \subset \{v_1, v_2, u_1, u_2, \dots, u_{2n}\} - \{u_{i-1}, u_i, u_{j-1}, u_j\}$dimana $2 \leq i \leq 2n, 2 \leq j \leq 2n, i \neq j$, dan i, j genap, maka terdapat dua *vertex*u_i, $u_j \in V(B_n)$ sedemikian sehingga $r(u_i|W) = r(u_j|W) = (2, 1, 2, 2, \dots, 2, 2)$.Karena terdapat representasi yang sama akibatnya W bukan merupakan himpunan pemisah.

Karena$W$ bukan merupakan himpunan pemisah untuk$|W| < n$ akibatnya terjadi kontradiksi dengan pengandaian sehingga pengandaian harus diingkar.Jadi himpunan terurut Wadalah himpunan pemisah dari graf *book* $B_n$dengan $|W| \geq n$. Dengan demikian $dim(B_n) \geq n$.

Dari hasil yang diperoleh, terbukti bahwa $dim\,(B_n) \leq n$dan $dim(B_n) \geq n$. Jadi terbukti $dim(B_n) = n$. ∎

4. SIMPULAN

Berdasarkan uraian pada pembahasan dapat disimpulkan bahwadimensi metrik dari graf *book* $B_n$adalah n.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bahri, M., Nurdin, M. Zakir, G. Mahie, dan Darmo, *Dimensi Metrik Graf Hasil Kali SilangGraf Lintasan* $P_m \times P_2 \times P_2$, MANASIR **1** (2013), no. 1, 15–18.

[2] Caceres, J., D. Garijo, M. L. Puertas, *and* C. Seara, *On the Determining Number and theMetric Dimension of Graphs*, The Electronic Journal of Combinatorics **17** (2010), no. 63,1–20.

[3] Chartrand, G. *and* L. Lesniak, *Graphs and Digraphs*, 3rd ed., Chapman and Hall, California, 1996.

[4] Chartrand, G., L. Eroh, M. A. Johnson, *and* O. R. Oellermann, *Resolvability in Graphs andthe Metric Dimension of a Graph*, Discrete Appl. Math. **105** (2000), 99–113.

[5] Fajjria, I. M. D., *Dimensi Metrik Graf Lintasan tak Hingga*, Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang, Malang, 2010.

[6] Gallian, J. A., *Dynamic Survey of Graph Labeling*, The Electronic Journal ofCombinatorics **16** (2013), 1–308.

[7] Hindayani, *Dimensi Metrik Graf* $K_r + mK_s, m, r, s \in N$, CAUCHY **1** (2011), no. 4, 165–174.

[8] Mudjiati, T., *Dimensi Metrik Graf Kincir dengan Daun Bervariasi*, Thesis, Jurusan Matematika FMIPA ITS, Surabaya, 2008.

[9] Permana, A. B. dan Darmaji, *Dimensi Metrik Graf Pohon Bentuk Tertentu*, Jurnal Teknik Pomits **1** (2012), no. 1, 1–4.

[10] Purwono, J. A., *Dimensi Metrik pada Pengembangan Graph Kincir dengan Pola* $K_1 + mK_n$, Makalah tugas akhir, Jurusan Matematika FMIPA ITS, Surabaya, 2010.

[11] Saputro, S. W., D. Suprijanto, E. T. Baskoro, *and* A. L. M. Salman, *The Metric Dimensionof a Graph Composition Products with Star*, J. Indones. Math. Soc. **18** (2012), no. 2, 85–92.

[12] Widodo, B. J., *Dimensi Metrik pada Graf Sun, Graf Helm, dan Graf Double Cones*, Skripsi, Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sebelas Maret, Surakarta, 2013.