MODEL MATEMATIKA MASALAH ALIRAN MAKSIMUM KABUR DENGAN PROGRAM LINEAR KABUR

Isnaini Rosyida
Jurusan Matematika Universitas Negeri Semarang
isnainimat@staff.unnes.ac.id

Abstrak

Masalah aliran maksimum pada jaringan kabur dapat dituliskan kedalam model matematika program linear kabur. Pada makalah ini semua parameter kabur diasumsikan sebagai bilangan kabur segitiga. Program linear kabur tersebut dapat diselesaikan dengan mentransformasi menjadi program linear *crisp* melalui fungsi peringkat, kemudian menyelesaikannya dengan metode-metode pada program linear *crisp*, hasilnya berupa aliran maksimum *crisp* dan kemudian ubah lagi menjadi aliran maksimum kabur yang berupa bilangan kabur segitiga

Kata Kunci: Aliran Maksimum, Jaringan Kabur, Program Linear Kabur

PENDAHULUAN

1. Latar Belakang

Parameter-parameter dalam model jaringan konvensional biasanya menyatakan jarak, waktu aktivitas, kapasitas, biaya dan sebagainya. Pada model jaringan konvensional, parameter-parameter ini selalu diasumsikanberupa bilangan real yang nilainya sudah pasti. Padahal kenyataannya selalu ada ketidakpastian dalam parameter-parameter tersebut. Jarak, waktu aktivitas, kapasitas, biaya sebenarnya mengandung ketidakpastian. Untuk menangani ketidakpastian ini, parameter-parameter tersebut dapat dinyatakan dengan bilangan kabur. Sebuah jaringan dengan parameter bilangan kabur disebut juga jaringan kabur (*fuzzy network*). Model jaringan kabur dapat lebih mendekati kondisi permasalahan real dibandingkan model jaringan konvensional (jaringan *crisp*).

Terdapat beberapa permasalahan pada jaringan kabur, diantaranya: masalah pencarian lintasan terpendek (*shortest path*), masalah pohon perentang minimum(*minimal spanning tree*), masalah aliran maksimum (*maximal flow*) dan *Traveling Salesman Problem* (TSP). Pada makalah ini akan dibahas masalah aliran maksimum pada jaringan kabur. Masalah aliran maksimum (*maximum flow*) adalah pencarian nilai maksimum seluruh arus (aliran) di dalam sebuah sistem jaringan. Masalah aliran maksimum yang mempunyai tujuan memaksimumkan jumlah seluruh arus dalam sebuah sistem jaringan kabur disebut aliran maksimum kabur (*fuzzy maximal flow*).

Paper tentang aliran maksimum kabur pertama kali ditulis oleh Kim dan Roush pada tahun 1982 (dalam Kumar dan Kaur, 2011). Kim dan Roush yang pertama kali mengembangkan teori aliran kabur (*fuzzy flow*) dan menentukan aliran maksimum kabur dengan *fuzzy matrices*. Pada tahun yang sama, Chanas dan Kolodziejczyk (dalam Kumar dan Kaur, 2011) juga telah menulis tentang penyelesaian masalah aliran maksimum kabur dengan *minimal cuts*. Sedangkan penyelsaian masalah aliran maksimum kabur dengan program linear kabur (*fuzzy linear programming*) pertama kali dikaji oleh Kumar dan Kaur (2011).

Permasalahan aliran maksimum dengan parameter kabur banyak digunakan pada berbagai bidang, diantaranya pada jaringan komunikasi, pada jaringan pipa minyak dan jaringan listrik. Berdasarkan latar belakang inilah, penulis tertarik untuk mengkaji tentang pemodelan masalah aliran maksimum pada jaringan kabur dengan program liner kabur. Pada makalah ini digunakan model matematika program linear, karena penyelesaiannya relatif lebih mudah dan sudah banyak aplikasi *software* yang dapat digunakan untuk menyelesaikan program linear. Permasalahan yang dibahas pada makalah ini dapat menambah wawasan tentang program linear kabur dan aplikasinya pada masalah optimasi kombinatorik.

2. Perumusan Masalah dan Tujuan

Permasalahan yang akan dikaji pada makalah ini adalah:

1. Bagaimana model matematika masalah aliran maksimum kabur dalam program linear kabur?
2. Bagaimana penyelesaian program linear kabur untuk masalah aliran maksimum kabur ?

Sedangkan tujuan penelitian ini adalah:

1. dapat menuliskan model matematika masalah aliran maksimum kabur dalam program linear kabur;
2. dapat menyelesaikan program linear kabur untuk masalah aliran maksimum kabur.

KAJIAN PUSTAKA

Parameter-parameter dalam model jaringan konvensional biasanya menyatakan jarak, waktu aktivitas, kapasitas, biaya dan sebagainya. Model jaringan konvensional ini selalu mengasumsikan parameter-parameter ini berupa bilangan real yang nilainya sudah pasti. Padahal kenyataannya selalu ada ketidakpastian dalam parameter-parameter tersebut. Jarak, waktu aktivitas, kapasitas, biaya sebenarnya mengandung ketidakpastian. Untuk menangani ketidakpastian ini, parameter-parameter tersebut dapat dinyatakan dengan bilangan kabur. Tentang himpunan kabur dan bilangan kabur dapat dilihat pada Larsen (*www. aaue.dk/~legind/FL_E2006/FL.../FL14b%20fuzzy%20arithmetics.pdf*, diakses tanggal 20 Pebruari 2011), Fuller (1991), dan Naseri (2008).

Sebuah jaringan dengan parameter bilangan kabur disebut juga jaringan kabur (*fuzzy network*). Sedangkan arus maksimum pada jaringan kabur disebut arus maksimum kabur (*fuzzy maximal flow*). Paper tentang aliran maksimum kabur pertama kali ditulis oleh Kim dan Roush pada tahun 1982 (dalam Kumar dan Kaur, 2011). Kim dan Roush yang pertama kali mengembangkan teori aliran kabur (*fuzzy flow*) dan menentukan aliran maksimum kabur dengan *fuzzy matrices*. Pada tahun yang sama, Chanas dan Kolodziejczyk (dalam Kumar dan Kaur, 2011) juga telah menulis tentang penyelesaian masalah aliran maksimum kabur dengan *minimal cuts*. Paper berikutnya tentang arus maksimum kabur dapat dilihat pada Chanas et al. (1995), Yadav dan Biswas (2009). Sedangkan penyelesaian masalah aliran maksimum kabur dengan program linear kabur (*fuzzy linear programming*) pertama kali dikaji oleh Kumar dan Kaur (2010 dan 2011).

Paper tentang TSP multiobjektif pertama kali dikaji oleh Fisher dan Richter pada tahun 1982 (dalam Rehmat et al., 2007). Fisher telah mengkaji penyelesain TSP multiobjektif dengan *branch and bound*. Sedangkan TSP multiobjektif pada jaringan kabur pertama kali dikaji oleh Rehmat et al. (2007). Rehmat telah mengkaji penyelesain TSP dengan program linear multiobjektif kabur (*Fuzzy multi-objective linear programming*).

Berikut ini disajikan definisi-definisi yang terkait dengan pembahasan permasalahan pada makalah ini.

1. Himpunan Kabur

Himpunan kabur $\tilde{a}$ dalam R adalah himpunan pasangan berurutan: $\tilde{a} = \{\{x, \mu_{\tilde{a}}(x)\} | x \in R\}$. Fungsi μ adalah fungsi keanggotaan himpunan kabur $\tilde{a}$, dimana μ : $R \to [0,1]$. Nilai $\mu(x)$ disebut juga derajat keanggotaan (*membership value*) dari unsur *x*.

Himpunan kabur $\tilde{a}$ dalam R disebut normal jika terdapat $x \in R$ sehingga $\mu_{\tilde{a}}(x) = 1$

Himpunan kabur $\tilde{a}$ dalam R disebut konveks jika
$\mu_{\tilde{a}}(\lambda x + (1 - \lambda y) \geq \min\{\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{a}}(y)\};\ x, y \in R\ dan\ \lambda \in [0,1]$

2. Bilangan Kabur

Bilangan kabur $\tilde{a}$ adalah himpunan kabur dalam R yang ternormalisasi konveks sedemikian hingga :

(1) terdapat sedikitnya satu $x_0 \in R$ sehingga $\mu_{\tilde{a}}(x_0)$=1

(2) $\mu_{\tilde{a}}(x)$ kontinu sepotong-sepotong

Bilangan kabur $\tilde{a} = \{\{x, \mu_{\tilde{a}}(x)\} | x \in R\}$. tak negatif jika dan hanya jika $\mu_{\tilde{a}}(x) = 0$ untuk setiap x<0.

3. Bilangan Kabur Segitiga

Bilangan kabur $\tilde{A}$ disebut bilangan kabur segitiga dengan pusat b, lebar kiri a dan lebar kanan c jika fungsi keanggotaannya berbentuk

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{(x-a)}{(b-a)}, & a \leq x \leq b \\ \frac{(x-c)}{(b-c)}, & b \leq x \leq c \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Bilangan kabur segitiga $\tilde{A}$ juga dapat ditulis: $\tilde{A} = (a, b, c)$. Sedang himpunan semua bilangan kabur segitiga dinotasikan dengan *F(R).*

Bilangan kabur segitiga $\tilde{A} = (a, b, c)$ tak negatif jika $a \geq 0$

4. Fungsi Peringkat (*Ranking Function*)

Fungsi peringkat adalah sebuah fungsi $\Re : F(R) \to R$, dimana untuk setiap bilangan fuzzy segitiga $\tilde{A} = (a, b, c)$ dipetakan ke $\Re(A) = \frac{a+2b+c}{4}$.

5. Operasi Aritmatika Pada Bilangan Kabur Segitiga

Misal $\tilde{A} = (a, b, c)$ dan $\tilde{B} = (d, e, f)$ dua buah bilangan kabur segitiga. Operasi pada bilangan kabur segitiga didefinisikan sebagai berikut:

1. $\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (a + d, b + e, c + f)$
2. $\lambda\tilde{A} = \begin{cases} (\lambda a, \lambda b, \lambda c), jika\ \lambda \geq 0 \\ (\lambda a, \lambda c, \lambda b), jika\ \lambda \leq 0 \end{cases}$
3. $\tilde{A} = \tilde{B}$ jika dan hanya jika $a = d, b = e, c = f$
4. $\tilde{A} \preccurlyeq \tilde{B}$ jika dan hanya jika $a \leq d, b - a \leq e - d, c - b \leq f - e$

5. Jika $\tilde{A} \preccurlyeq \tilde{B}$ maka dapat dikonversi menjadi $\tilde{A} \oplus \tilde{C} = \tilde{B}$, dimana $\tilde{C}$ bilangan kabur segitiga tak negatif.

6. Jaringan (Network)

suatu jaringan pada umumnya diilustrasikan sebagai diagram yang terdiri dari titik-titik yang dilambangkan dengan noktah dan sisi (dilambangkan dengan ruas garis) yang menghubungkan antar titik. Jaringan berbobot adalah sebuah jaringan dimana terdapat bobot pada tiap sisi jaringan tersebut. Bobot tersebut berupa besaran angka yang dapat menunjukkan kapasitas arus, jarak, atau biaya. Suatu jaringan G disebut jaringan berarah bila setiap sisi berarah dan jaringan tidak berarah jika sisinya tidak berarah.

7. Masalah Arus Maksimum Pada Jaringan *crisp*

Misal G sebuah jaringan, yang dilengkapi dengan :

u_{ij} adalah kapasitas pada sisi (i,j)

x_{ij} adalah arus pada sisi (i,j)

f adalah arus maksimum dari titik sumber s ke titik tujuan t dalam jaringan G.

Masalah arus maksimum dapat dirumuskan dengan program linear sebagai berikut:

Maksimumkan f
Kendala:

$$\begin{array}{ll} \sum_j x_{ij} = \sum_k x_{ki} + f & ; i = s \\ \sum_j x_{ij} = \sum_k x_{ki} & ; \forall i \neq s, t \\ \sum_j x_{ij} + f = \sum_k x_{ki} & ; i = t \\ 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} & \forall (i,j) \in E \end{array} \qquad \text{.........................(1)}$$

8. Program Linear
Model baku program linear dapat dirumuskan sebagai berikut:
Maksimumkan atau minimumkan: z = cx
Kendala: Ax ≤ atau ≥ b
x ≥ 0

Dengan $c = (c_1,\ldots,c_n)$, $b = (b_1,\ldots,b_n)^T$ dan $A = [a_{ij}]_{mxn}$

9. Program linear kabur
Masalah program linear kabur dapat dikategorikan sebagai berikut:

1. Program linear dengan parameter bilangan kabur dan variable keputusan tegas (*crisp*).
2. Program linear dengan variabel keputusan kabur, dan parameternya tegas.
3. Program linear dengan variabel keputusan dan seluruh parameternya kabur (*fully fuzzy linear programming/FFLP*).

Program Linear dengan Variabel Keputusan dan Parameter Kabur
Model baku program linear kabur jenis ini dirumuskan sebagai berikut:
Maksimumkan atau minimumkan: $\tilde{z} = \tilde{c}\tilde{x}$

Kendala: $\tilde{A} \otimes \tilde{x} \leq$ atau $\geq \tilde{b}$
$\tilde{x} \geq 0$

Dengan $\tilde{c} = (\widetilde{c_1}, \ldots, \widetilde{c_n})$, $\tilde{b} = (\widetilde{b_1}, \ldots, \widetilde{b_n})^T$ dan A $= [\widetilde{a_{ij}}]_{mxn}$ matriks kabur.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian studi literatur yang meliputi kajian-kajian secara teoritis. Tahap-tahap yang dilaksanakan dalam penelitian ini sebagai berikut:

a. pengkajian tentang program linear kabur dengan variable kabur dan parameter kabur , beserta metoda penyelesaiannya.
b. pengkajian tentang aliran maksimum pada jaringan kabur
c. pengkajian tentang model matematika masalah aliran maksimum kabur dengan program linear kabur

PEMBAHASAN

1. Model Matematika Masalah Aliran Maksimum pada Jaringan Kabur

Misal G jaringan kabur, yang dilengkapi dengan :

$\tilde{u}_{ij}$ yaitu kapasitas kabur pada sisi (i,j)

$\tilde{x}_{ij}$ yaitu arus/aliran kabur (*fuzzy flow*) pada sisi (i,j)

Maka $\hat{\tilde{f}}$ adalah aliran maksimum kabur dari titik sumber s ke titik tujuan t dalam jaringan G.

Semua parameter dalam hal ini diasumsikan sebagai bilangan kabur segitiga

Masalah aliran maksimum pada jaringan kabur dapat dituliskan dengan model matematika program linear sebagai berikut:

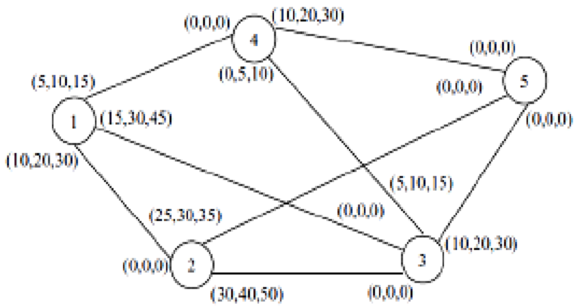
Maksimumkan $\hat{\tilde{f}}$
Kendala:

$$\begin{aligned}
&\sum_j \tilde{x}_{ij} = \sum_k \tilde{x}_{ki} \oplus \tilde{f} && ; i = s \\
&\sum_j \tilde{x}_{ij} = \sum_k \tilde{x}_{ki} && ; \forall i \neq s, t \\
&\sum_j \tilde{x}_{ij} \oplus \tilde{f} = \sum_k \tilde{x}_{ki} && ; i = t \\
&\tilde{x}_{ij} \preceq \tilde{u}_{ij} && \forall (i,j) \in E
\end{aligned}$$

$\tilde{x}_{ij}$ bilangan kabur tak negatif ……………………………(2)

Contoh 1:

Diberikan jaringan berarah kabur pada Gambar 1 di bawah ini.



Gambar 1. Jaringan kabur yang dilengkapi dengan kapasitas dan aliran kabur

Permasalahannya adalah menentukan model matematika aliran maksimum dari titik sumber 1 ke titik tujuan 5.

Langkah pertama menentukan fungsi tujuan, yaitu memaksimumkan $\tilde{f}$.

Langkah berikutnya menentukan kendala-kendala pada permasalahan ini.

Terdapat tiga sisi yang berawal dari titik sumber 1, yaitu: sisi (1,2), (1,3) dan (1,4). Sehingga kendala yang pertama adalah: $\tilde{x}_{12} \oplus \tilde{x}_{13} \oplus \tilde{x}_{14} = \tilde{f}$.

Untuk setiap titik i yang bukan titik sumber berlaku: $\sum_j \tilde{x}_{ij} = \sum_k \tilde{x}_{ki}$. Sehingga kendala yang kedua adalah:

$$\begin{aligned}
&\tilde{x}_{23} \oplus \tilde{x}_{25} = \tilde{x}_{12} \\
&\tilde{x}_{34} \oplus \tilde{x}_{35} = \tilde{x}_{13} \oplus \tilde{x}_{23} \\
&\tilde{x}_{45} = \tilde{x}_{14} \oplus \tilde{x}_{34}
\end{aligned}$$

Kendala yang ketiga untuk titik tujuan 5, berlaku: $\tilde{x}_{25} \oplus \tilde{x}_{35} \oplus \tilde{x}_{45} = \tilde{f}$.

Kendala keempat adalah aliran yang masuk ke sisi (i,j) harus lebih kecil atau sama dengan kapasitas sisi (i,j), sehingga

$$\tilde{x}_{ij} \preceq \tilde{u}_{ij} \qquad\qquad \forall(i,j)$$

Kendala yang terakhir adalah $\tilde{x}_{ij}$ bilangan kabur tak negatif.

Model matematika lengkap permasalahan aliran maksimim pada Gambar 1 sebagai berikut:

Maksimumkan $\tilde{f}$.

Dengan kendala-kendala sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&\tilde{x}_{12} \oplus \tilde{x}_{13} \oplus \tilde{x}_{13} = \tilde{f} \\
&\tilde{x}_{23} \oplus \tilde{x}_{25} = \tilde{x}_{12} \\
&\tilde{x}_{34} \oplus \tilde{x}_{35} = \tilde{x}_{13} \oplus \tilde{x}_{23} \\
&\tilde{x}_{45} = \tilde{x}_{14} \oplus \tilde{x}_{34} \\
&\tilde{x}_{25} \oplus \tilde{x}_{35} \oplus \tilde{x}_{45} = \tilde{f} \\
&\tilde{x}_{ij} \preceq \tilde{u}_{ij} \qquad\qquad \forall(i,j)
\end{aligned}$$

$\tilde{x}_{ij}$ bilangan kabur tak negatif

2. Penyelesaian Program Linear Kabur dari Masalah Aliran Maksimum Kabur

Masalah arus maksimum kabur dapat diselesaikan dengan langkah-langkah sebagai berikut: (Kumar dan Kaur, 2011)

Langkah 1: Merumuskan masalah arus maksimum kabur dengan program linear kabur (2)

Langkah 2: Misal $\tilde{x}_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})$, $\tilde{f} = (f_1, f_2, f_3)$ dan $\tilde{u}_{ij} = (u_{ij}, v_{ij}, w_{ij})$. Rumusan program linear kabur dari masalah arus maksimum kabur pada Langkah 1 dapat dirumuskan kembali menjadi:

Maksimumkan: (f_1, f_2, f_3)

Kendala:

$$
\begin{aligned}
&\sum_j (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) = \sum_k (a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}) \oplus (f_1, f_2, f_3) && ; i = s \\
&\sum_j (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) = \sum_k (a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}) && ; \forall i \neq s, t \\
&\sum_j (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) \oplus (f_1, f_2, f_3) = \sum_k (a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}) && ; i = t \\
&(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) \preceq (u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}) && \forall (i, j) \in E
\end{aligned}
$$

Langkah 3: Mengubah kendala ketaksamaan menjadi kesamaan dengan menambah variabel tak negatif $\tilde{S}_{ij} = (s'_{ij}, s''_{ij}, s'''_{ij})$ untuk setiap (i,j)$\in E$. Sehingga program linear kabur pada Langkah 2 dapat dituliskan kembali menjadi:
Maksimumkan: (f_1, f_2, f_3)

Kendala:

$$
\begin{aligned}
&\sum_j (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) = \sum_k (a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}) \oplus (f_1, f_2, f_3) && ; i = s \\
&\sum_j (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) = \sum_k (a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}) && ; \forall i \neq s, t \\
&\sum_j (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) \oplus (f_1, f_2, f_3) = \sum_k (a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}) && ; i = t \\
&(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) \oplus (s'_{ij}, s''_{ij}, s'''_{ij}) = (u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}) && \forall (i, j) \in E
\end{aligned}
$$

Langkah 4: Dengan menggunakan fungsi peringkat dan operasi aritmatika pada bilangan kabur, maka program linear kabur pada Langkah 3 dapat diubah menjadi program linear *crisp* sebagai berikut:
Maksimumkan $\frac{f_1 + 2f_2 + f_3}{4}$
Kendala:

$$\begin{aligned}
&\sum_j a_{ij} = \sum_k a_{ki} + f_1 && ;i = s \\
&\sum_j a_{ij} = \sum_k a_{ki} && ;\forall i \neq s,t && (1) \\
&\sum_j a_{ij} + f_1 = \sum_k a_{ki} && ;i = t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_j b_{ij} = \sum_k b_{ki} + f_2 && ;i = s \\
&\sum_j b_{ij} = \sum_k b_{ki} && ;\forall i \neq s,t && (2) \\
&\sum_j b_{ij} + f_2 = \sum_k b_{ki} && ;i = t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_j c_{ij} = \sum_k c_{ki} + f_3 && ;i = s \\
&\sum_j c_{ij} = \sum_k c_{ki} && ;\forall i \neq s,t && (3) \\
&\sum_j c_{ij} + f_3 = \sum_k c_{ki} && ;i = t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a_{ij} + s'_{ij} = u_{ij} \\
&b_{ij} + s''_{ij} = v_{ij} \\
&c_{ij} + s'''_{ij} = w_{ij}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&b_{ij} - a_{ij} \geq 0,\ c_{ij} - b_{ij} \geq 0,\ a_{ij} \geq 0,\ b_{ij} \geq 0,\ c_{ij} \geq 0 \\
&s''_{ij} - s'_{ij} \geq 0,\ s'''_{ij} - s''_{ij} \geq 0,\ s'_{ij} \geq 0,\ s''_{ij} \geq 0,\ s'''_{ij} \geq 0 \\
&f_2 - f_1 \geq 0,\ f_3 - f_2 \geq 0,\ f_1 \geq 0,\ f_2 \geq 0,\ f_3 \geq 0 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall (i,j) \in E
\end{aligned}$$

Langkah 5: Menentukan arus maksimal *crisp* $f_1, f_2,\ dan\ f_3$ dengan menyelesaikan program linear pada Langkah 4 menggunakan metode-metode yang sudah dikenal pada program linear *crisp.*

Langkah 6: Menentukan Arus maksimum kabur $\tilde{f} = (f_1, f_2, f_3)$

Contoh 2:

Model matematika masalah aliran maksimum pada Gambar 1 akan diselesaikan langkah-langkah di atas.

Langkah 2: Misal $\tilde{x}_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}), \tilde{f} = (f_1, f_2, f_3)\ dan\ \tilde{u}_{ij} = (u_{ij}, v_{ij}, w_{ij})$. Rumusan program linear kabur dari masalah aliran maksimum kabur pada Gambar 1 dapat dirumuskan kembali menjadi:

Maksimumkan: (f_1, f_2, f_3)

Kendala:

$$\begin{aligned}
&(a_{12}, b_{12}, c_{12}) \oplus (a_{13}, b_{13}, c_{13}) \oplus (a_{14}, b_{14}, c_{14}) = (f_1, f_2, f_3) \\
&(a_{23}, b_{23}, c_{23}) \oplus (a_{25}, b_{25}, c_{25}) = (a_{12}, b_{12}, c_{12}) \\
&(a_{34}, b_{34}, c_{34}) \oplus (a_{35}, b_{35}, c_{35}) = (a_{13}, b_{13}, c_{13}) \oplus \\
&(a_{23}, b_{23}, c_{23}) \\
&(a_{45}, b_{45}, c_{45}) = (a_{14}, b_{14}, c_{14}) \oplus (a_{34}, b_{34}, c_{34}) \\
&(a_{25}, b_{25}, c_{25}) \oplus (a_{35}, b_{35}, c_{35}) \oplus (a_{45}, b_{45}, c_{45}) = (f_1, f_2, f_3) \\
&\tilde{x}_{12} \preceq (10, 20, 30),\ \tilde{x}_{13} \preceq (15, 30, 45),\ \tilde{x}_{14} \preceq (5, 10, 15), \\
&\tilde{x}_{23} \preceq (30, 40, 50),\ \tilde{x}_{25} \preceq (25, 30, 35),\ \tilde{x}_{34} \preceq (5, 10, 15), \\
&\tilde{x}_{35} \preceq (10, 20, 30),\ \tilde{x}_{45} \preceq (10, 20, 30)
\end{aligned}$$

Langkah 3: Mengubah kendala ketaksamaan menjadi kesamaan dengan menambah variabel tak negatif $\tilde{S}_{ij} = (s'_{ij}, s''_{ij}, s'''_{ij})$ untuk setiap sisi (i,j). Sehingga program linear kabur pada Langkah 2 dapat dituliskan kembali menjadi:
Maksimumkan: (f_1, f_2, f_3)

Kendala:

$$(a_{12}, b_{12}, c_{12}) \oplus (a_{13}, b_{13}, c_{13}) \oplus (a_{14}, b_{14}, c_{14}) = (f_1, f_2, f_3)$$
$$(a_{23}, b_{23}, c_{23}) \oplus (a_{25}, b_{25}, c_{25}) = (a_{12}, b_{12}, c_{12})$$
$$(a_{34}, b_{34}, c_{34}) \oplus (a_{35}, b_{35}, c_{35}) = (a_{13}, b_{13}, c_{13}) \oplus (a_{23}, b_{23}, c_{23})$$

$$(a_{45}, b_{45}, c_{45}) = (a_{14}, b_{14}, c_{14}) \oplus (a_{34}, b_{34}, c_{34})$$
$$(a_{25}, b_{25}, c_{25}) \oplus (a_{35}, b_{35}, c_{35}) \oplus (a_{45}, b_{45}, c_{45}) = (f_1, f_2, f_3)$$
$$(a_{12}, b_{12}, c_{12}) \oplus (s'_{12}, s''_{12}, s'''_{12}) = (10, 20, 30)$$
$$(a_{13}, b_{13}, c_{13}) \oplus (s'_{13}, s''_{13}, s'''_{13}) = (15, 30, 45)$$
$$(a_{14}, b_{14}, c_{14}) \oplus (s'_{14}, s''_{14}, s'''_{14}) = (5, 10, 15)$$
$$(a_{23}, b_{23}, c_{23}) \oplus (s'_{23}, s''_{23}, s'''_{23}) = (30, 40, 50)$$
$$(a_{25}, b_{25}, c_{25}) \oplus (s'_{25}, s''_{25}, s'''_{25}) = (25, 30, 35)$$
$$(a_{34}, b_{34}, c_{34}) \oplus (s'_{34}, s''_{34}, s'''_{34}) = (5, 10, 15)$$
$$(a_{35}, b_{35}, c_{35}) \oplus (s'_{35}, s''_{35}, s'''_{35}) = (10, 20, 30)$$
$$(a_{45}, b_{45}, c_{45}) \oplus (s'_{45}, s''_{45}, s'''_{45}) = (10, 20, 30)$$

Langkah 4: Dengan menggunakan fungsi peringkat dan operasi aritmatika pada bilangan kabur, maka program linear kabur pada Langkah 3 dapat diubah menjadi program linear *crisp* sebagai berikut:
Maksimumkan $\frac{f_1+2f_2+f_3}{4}$
Kendala:

$$\begin{aligned}
&a_{12} + a_{13} + a_{14} - f_1 = 0,\ b_{12} + b_{13} + b_{14} - f_2 = 0\\
&c_{12} + c_{13} + c_{14} - f_3 = 0,\ a_{23} + a_{25} - a_{12} = 0\\
&b_{23} + b_{25} - b_{12} = 0,\ c_{23} + c_{25} - c_{12} = 0\\
&a_{34} + a_{35} - a_{13} - a_{23} = 0,\ b_{34} + b_{35} - b_{13} - b_{23} = 0\\
&c_{34} + c_{35} - c_{13} - c_{23} = 0,\ a_{14} + a_{34} - a_{45} = 0\\
&b_{14} + b_{34} - b_{45} = 0,\ c_{14} + c_{34} - c_{45} = 0\\
&a_{25} + a_{35} + a_{45} - f_1 = 0,\ b_{25} + b_{35} + b_{45} - f_2 = 0\\
&c_{25} + c_{35} + c_{45} - f_3 = 0\\
&a_{12} + s'_{12} = 10,\ b_{12} + s''_{12} = 20,\ c_{12} + s'''_{12} = 30\\
&a_{13} + s'_{13} = 15,\ b_{13} + s''_{13} = 30,\ c_{13} + s'''_{13} = 45\\
&a_{14} + s'_{14} = 5,\ b_{14} + s''_{14} = 10,\ c_{14} + s'''_{14} = 15\\
&a_{23} + s'_{23} = 30,\ b_{23} + s''_{23} = 40,\ c_{23} + s'''_{23} = 50\\
&a_{25} + s'_{25} = 25,\ b_{25} + s''_{25} = 30,\ c_{25} + s'''_{25} = 35\\
&a_{34} + s'_{34} = 5,\ b_{34} + s''_{34} = 10,\ c_{34} + s'''_{34} = 15\\
&a_{35} + s'_{35} = 10,\ b_{35} + s''_{35} = 20,\ c_{35} + s'''_{35} = 30\\
&a_{45} + s'_{45} = 10,\ b_{45} + s''_{45} = 20,\ c_{45} + s'''_{45} = 30\\
&b_{ij} - a_{ij} \geq 0,\ c_{ij} - b_{ij} \geq 0,\ a_{ij} \geq 0,\ b_{ij} \geq 0,\ c_{ij} \geq 0\\
&s''_{ij} - s'_{ij} \geq 0,\ s'''_{ij} - s''_{ij} \geq 0,\ s'_{ij} \geq 0,\ s''_{ij} \geq 0,\ s'''_{ij} \geq 0\\
&f_2 - f_1 \geq 0,\ f_3 - f_2 \geq 0,\ f_1 \geq 0,\ f_2 \geq 0,\ f_3 \geq 0\\
&\forall (i,j) \in E
\end{aligned}$$

Langkah 5: Solusi aliran maksimum $f_1, f_2,\ dan\ f_3$ dari program linear *crisp* pada Langkah 4 adalah $f_1 = 30, f_2 = 55, dan\ f_3 = 85$

Jadi nilai aliran maksimum kabur pada jaringan Gambar 1 adalah $\tilde{f} = (f_1, f_2, f_3) = (30{,}55{,}85)$. Hasil ini dapat diartikan sebagai berikut:

a. nilai aliran maksimum dari titik sumber 1 ke titik tujuan 5 pada jaringan Gambar 1 lebih dari 30 satuan dan lebih kecil dari 85 satuan;
b. sedangkan sebagian besar orang setuju bahwa aliran maksimumnya 55 satuan
c. Misal x menyatakan jumlah aliran pada jaringan, maka persentase derajat keanggotaan untuk x adalah $\mu_{\tilde{f}}(x)\ x\ 100$ dimana

$$\mu_{\tilde{f}}(x)=\begin{cases} \frac{(x-30)}{25}, & 30 \le x \le 55 \\ \frac{(x-85)}{-30}, & 55 \le x \le 85 \\ 0\quad, & \text{otherwise} \end{cases}$$

KESIMPULAN

Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan sebagi berikut.

1. Model matematika masalah aliran maksimum kabur dapat dirumuskan dengan program linear kabur:
   Maksimumkan $\tilde{f}$.
   Dengan kendala-kendala sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &\tilde{x}_{12} \oplus \tilde{x}_{13} \oplus \tilde{x}_{13} = \tilde{f} \\ &\tilde{x}_{23} \oplus \tilde{x}_{25} = \tilde{x}_{12} \\ &\tilde{x}_{34} \oplus \tilde{x}_{35} = \tilde{x}_{13} \oplus \tilde{x}_{23} \\ &\tilde{x}_{45} = \tilde{x}_{14} \oplus \tilde{x}_{34} \\ &\tilde{x}_{25} \oplus \tilde{x}_{35} \oplus \tilde{x}_{45} = \tilde{f} \\ &\tilde{x}_{ij} \preceq \tilde{u}_{ij} \qquad\qquad \forall(i,j) \end{aligned}$$

$\tilde{x}_{ij}$ bilangan kabur tak negatif

2. Program linear kabur untuk masalah aliran maksimum kabur dapat diselesaikan dengan mentransformasi program linear kabur tersebut menjadi program linear *crisp* melalui fungsi peringkat, kemudian menyelesaikannya dengan metode-metode pada program linear *crisp*, hasilnya berupa aliran maksimum *crisp* dan kemudian ubah lagi menjadi aliran maksimum kabur yang berupa bilangan kabur segitiga

DAFTAR RUJUKAN

Chanas, S., Delgado,M., Verdegay,J.L., Vila, M.A. 1985. Fuzzy Optimal Flow On Imprecise Structures. *International Journal Of Operational Research* . 83:568-580.

Fuller, R. 1991. On product-sum of triangular fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*. 41: 83-87.

Kumar, A., Kaur, J., Singh, P. 2010. Fuzzy Optimal Solution of Fully Fuzzy Linear Programming Problems with Inequality Constraints. *International Journal of Mathematical and Computer Sciences*. N0.6. Vol.1: 37-41

Kumar, A., Kaur, M. 2010. An Algorithm for Solving Fuzzy Maximal Flow Problems

Using Generalized Trapezoidal Fuzzy Numbers. *International Journal of Applied Science and Engineering*. 8. 2: 109-118

Kumar, A., dan Kaur, M. 2011. Solution of Fuzzy Maximal Flow Problems Using Fuzzy Linear Programming. *International Journal of Computational and Mathematical Sciences*. Vol.5:2 2011

Larsen, H.L. Course in Fuzzy Logic: Fuzzy number arithmetic . *www.aaue.dk/~legind/FL_E2006/FL.../FL14b%20fuzzy%20arithmetics.pdf*. Diakses tanggal 20 Pebruari 2011.

Nasseri, H. 2008. Fuzzy Numbers: Positive and Nonnegative. *International Mathematical Forum*. 3. no. 36: 1777 - 1780

Yadav, A.K., Biswas, B.R. On Searching Fuzzy Shortest Path In a Network *International Journal of Recent Trends in Engineering*.Vol 2. No. 3:16-18

Oktaviani, D.N. 2007. *Pengoptimalan Jaringan Air Bersih di Kecamatan Jatibarang Kabupaten Brebes Menggunakan Algoritma Prim dengan Program Maple.* Skripsi. Universitas Negeri Semarang.

Riansah, Yanwar. 2009. *Pencarian Aliran Maksimum dengan Algoritma Ford-Fulkerson(Studi kasus pada jaringan listrik di Kota Semarang)*. Skripsi. . Universitas Negeri Semarang