

BILANGAN TERHUBUNG PELANGI GRAF BERLIAN

M.A. Shulhany, A.N.M. Salman

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung

E-mail : ahmad.shulhany@yahoo.com, msalman@math.itb.ac.id

ABSTRAK.

Misalkan $G=(V,E)$ adalah suatu graf. Fungsi c dari E ke $\{1, 2, \dots, k\}$ dikatakan pewarnaan- k pelangi pada G , jika untuk setiap pasang titik u dan v di V terdapat suatu lintasan dengan u dan v sebagai titik ujung yang setiap sisinya memperoleh warna berbeda. Bilangan terhubung pelangi graf G , dinotasikan dengan $rc(G)$, adalah bilangan bulat positif terkecil k sehingga G mempunyai suatu pewarnaan- k pelangi. Selanjutnya, c dikatakan pewarnaan- k pelangi kuat, jika untuk setiap titik u dan v di V terdapat lintasan pelangi dengan panjangnya sama dengan jarak u dan v . Dalam hal ini, bilangan bulat positif terkecil k sehingga G mempunyai suatu pewarnaan- k pelangi kuat didefinisikan sebagai bilangan terhubung pelangi kuat yang dinotasikan dengan $src(G)$. Pewarnaan pelangi digunakan antara lain untuk mengamankan kode rahasia yang dikirimkan.

Pada makalah ini dibahas tentang pewarnaan pelangi graf berlian. Graf berlian dengan $2n$ titik dinotasikan dengan Br_n adalah graf yang diperoleh dari graf tangga segitiga dengan $2n-1$ titik dan ditambahkan satu titik dan beberapa sisi tertentu. Kami menentukan $rc(Br_n)$ dan $src(Br_n)$ untuk $n \geq 4$.

Kata kunci: bilangan terhubung pelangi, bilangan terhubung pelangi kuat, graf berlian, pewarnaan pelangi.

1. PENDAHULUAN

Konsep bilangan terhubung pelangi pada graf pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand, dkk pada tahun 2005 [3]. Pewarnaan pelangi digunakan antara lain untuk mengamankan kode rahasia yang dikirimkan. Misalkan $G=(V,E)$ adalah suatu graf terhubung tak-trivial. Fungsi $c: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$ dikatakan *pewarnaan- k pelangi* pada G , jika untuk setiap pasang titik u dan v di V terdapat suatu lintasan dengan u dan v sebagai titik ujung yang setiap sisinya memperoleh warna berbeda. Lintasan tersebut dinamakan *lintasan pelangi*. *Bilangan terhubung pelangi* graf G adalah bilangan bulat positif terkecil k sehingga G mempunyai suatu *pewarnaan- k pelangi*, dinotasikan dengan $rc(G)$.

Selanjutnya, c dikatakan *pewarnaan- k pelangi kuat*, jika untuk setiap titik u dan v di V terdapat lintasan pelangi dengan panjangnya sama dengan jarak u dan v , yang dinamakan sebagai *lintasan pelangi kuat*. Dalam hal ini, bilangan bulat positif terkecil k sehingga G mempunyai suatu pewarnaan- k pelangi kuat didefinisikan sebagai *bilangan terhubung*

pelangi kuat yang dinotasikan dengan $src(G)$. Dari definisi, dapat terlihat bahwa $rc(G) \leq src(G)$.

Diameter graf dinotasikan dengan $diam(G)$, merupakan maksimum dari himpunan jarak dua titik pada G . Untuk menemukan diameter dari suatu graf, harus ditentukan jarak dari setiap dua titik pada G , bilangan terbesarnya merupakan diameter dari graf tersebut. Orde graf G didefinisikan sebagai banyak titik pada G . Misalkan m menyatakan ukuran dari G , yakni banyak sisi pada G , maka

$$diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m. \quad (1)$$

Di bawah ini dituliskan beberapa hasil penelitian tentang bilangan terhubung pelangi.

Teorema 1.1 [3] Misalkan G adalah graf terhubung tak-trivial yang berukuran m , maka

- $rc(G) = 1$ jika dan hanya jika G adalah graf lengkap,
- $rc(G) = 2$ jika dan hanya jika $src(G) = 2$, dan
- $rc(G) = m$ jika dan hanya jika G adalah graf pohon.

Teorema 1.2 [3] Misalkan n adalah bilangan bulat dengan $n \geq 4$. Jika C_n adalah graf lingkaran berorden n , maka $rc(C_n) = src(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Teorema 1.3 [10] Misalkan n adalah bilangan bulat dengan $n \geq 3$. Jika F_n adalah graf kipas berorden $n+1$, maka

- $rc(F_n) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } 3 \leq n \leq 6; \\ 3, & \text{untuk } n \geq 7. \end{cases}$
- $src(F_n) = \begin{cases} rc(F_n), & \text{untuk } 3 \leq n \leq 6; \\ \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor, & \text{untuk } n \geq 7. \end{cases}$

Caro, dkk[1], Schiermeyer [8], dan Chandran, dkk[2] menentukan bilangan terhubung pelangi terkait derajat minimum dari suatu graf. Krivelevich dan Yuster [5], serta Dong dan Li [4] menentukan bilangan terhubung pelangi terkait dengan orde dari G . Chartrand, dkk [3], serta Li dan Shi [6] menentukan bilangan terhubung pelangi terkait dengan konektivitas dari

graf. Schiermeyer [9] menentukan bilangan terhubung pelangi terkait dengan banyak titik berderajat satu pada graf.

Dalam makalah ini dibahas tentang bilangan terhubung pelangi dan bilangan terhubung pelangi kuat untuk graf berlian. Graf berlian berorde $2n$ adalah graf yang diperoleh dari graf tangga segitiga berorde $2n-1$ dan ditambahkan satu titik dan beberapa sisi tertentu. Graf tangga segitiga berorde $2n-1$ merupakan graf tangga berorde $2n-2$ dengan tambahan satu titik dan beberapa sisi tertentu, lihat [7].

2. HASIL UTAMA

Graf berlian berorde $2n$ dinotasikan dengan Br_n adalah graf dengan

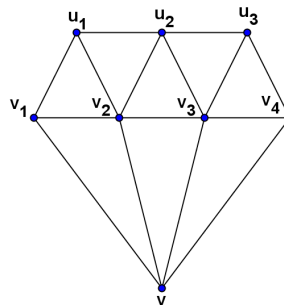
$V(Br_n) = \{v\} \cup \{v_i \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\} \cup \{u_i \mid i \in \{1, 2, \dots, n-1\}\}$ dan

$E(Br_n) = \{vv_i \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\} \cup \{v_i v_{i+1} \mid i \in \{1, 2, \dots, n-1\}\} \cup \{u_i u_{i+1} \mid i \in \{1, 2, \dots, n-2\}\} \cup \{u_i v_i \mid i \in \{1, 2, \dots, n-1\}\} \cup \{u_i v_{i+1} \mid i \in \{1, 2, \dots, n-1\}\}$.

Sebagai ilustrasi, graf Br_4 diberikan pada Gambar 1. Dapat ditunjukkan bahwa diameter dari graf berlian (Br_n), adalah:

$$\text{diam}(Br_n) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n = 4 \text{ atau } n = 5; \\ 4, & \text{untuk } n \geq 6. \end{cases}$$

Selanjutnya, disajikan bilangan terhubung pelangi dan bilangan terhubung pelangi kuat untuk graf berlian berturut-turut pada Teorema 2.1 dan Teorema 2.2.



Gambar 1. Graf Br_4

Teorema 2.1 Misalkan bilangan bulat $n \geq 4$, maka bilangan terhubung pelangi untuk graf berlian berorde $2n$ adalah

$$rc(Br_n) = \text{diam}(Br_n).$$

Bukti :

Berdasarkan (1), cukup diperlihatkan $rc(Br_n) \leq \text{diam}(Br_n)$. Untuk itu akan dibagi pembuktian ke dalam dua kasus.

Kasus 1. $n = 4$ atau $n = 5$

Definisikan pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} c(u_i u_{i+1}) &= i, \text{ untuk } i \in \{1, 2, \dots, n-1\}; \\ c(u_i v_i) &= c(u_i v_{i+1}) = 3, \text{ untuk } i \in \{1, 2, \dots, n-1\}; \\ c(v_i v_{i+1}) &= ((i+1) \bmod 2) + 1, \text{ untuk } i \in \{1, 2, \dots, n-1\}; \\ c(v_j v) &= \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + 1, \text{ untuk } i \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa untuk setiap x dan y di $V(Br_n)$ dengan $d(x, y) \geq 2$, terdapat lintasan x - y yang merupakan lintasan pelangi.

Subkasus 1.1. Jika $x = v$ dan $y = u_i$, maka terdapat lintasan pelangi v, v_i, u_i .

Subkasus 1.2. Misalkan $x = u_i$ dan $y = u_j$ dengan $i < j$.

Subkasus 1.2.1 Jika $d(x, y) = 2$, maka terdapat lintasan pelangi u_i, u_{i+1}, u_j .

Subkasus 1.2.2 Jika $d(x, y) = 3$, maka terdapat lintasan pelangi $u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, u_j$.

Subkasus 1.3. Misalkan $x = v_i$ dan $y = v_j$ dengan $i < j$.

Subkasus 1.3.1. Jika $j - i \geq 3$, maka terdapat lintasan pelangi v_i, v, v_j .

Subkasus 1.3.2. Jika $j - i = 2$, maka terdapat lintasan pelangi v_i, v_{i+1}, v_{i+2} .

Subkasus 1.4. Misalkan $x = v_i$ dan $y = u_j$.

Subkasus 1.4.1. Jika $|j - i| = 1$, maka terdapat lintasan pelangi v_i, u_i, u_j .

Subkasus 1.4.2. Jika $i - j \geq 1$, maka terdapat lintasan pelangi v_i, v, u_{j+1}, u_j .

Subkasus 1.4.3. Jika $j - i \geq 1$, maka terdapat lintasan pelangi v_i, v, v_j, u_j .

Karena itu, c adalah suatu pewarnaan-3 pelangi pada Br_4 dan Br_5 . Akibatnya, $rc(Br_n)$ untuk $n = 4$ atau $n = 5$.

Kasus 2. $n \geq 6$

Definisikan pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} c(u_i u_{i+1}) &= 1, \text{ untuk } i \in \{1, 2, \dots, n-1\}; \\ c(v_i v_{i+1}) &= c(u_i v_{i+1}) = \text{imod } 2 + 3, \text{ untuk } i \in \{1, 2, \dots, n-1\}; \\ c(u_i v_i) &= ((i+1) \bmod 2) + 3, \text{ untuk } i \in \{1, 2, \dots, n-1\}; \\ c(v v_j) &= ((j+1) \bmod 2) + 1, \text{ untuk } j \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa untuk setiap x dan y di $V(Br_n)$ dengan $d(x, y) \geq 2$, terdapat lintasan x - y yang merupakan lintasan pelangi.

Subkasus 2.1. Jika $x = v$ dan $y = u_i$, maka terdapat lintasan pelangi v, v_i, u_i .

Subkasus 2.2. Misalkan $x = u_i, y = u_j$, dengan $i < j$.

Subkasus 2.2.1. Jika i dan j memiliki varitas yang sama, maka terdapat lintasan pelangi $u_i, v_i, v, v_{j+1}, u_j$.

Subkasus 2.2.2. Jika i dan j memiliki varitas yang berbeda, maka terdapat lintasan pelangi u_i, v_i, v, v_j, u_j .

Subkasus 2.3. Misalkan $x = v_i, y = v_j$, dengan $i < j$.

Subkasus 2.3.1. Jika i dan j memiliki varitas yang sama, maka terdapat lintasan pelangi v_i, v, v_{j-1}, v_j .

Subkasus 2.3.2. Jika i dan j memiliki varitas yang berbeda, maka terdapat lintasan pelangi v_i, v, v_j .

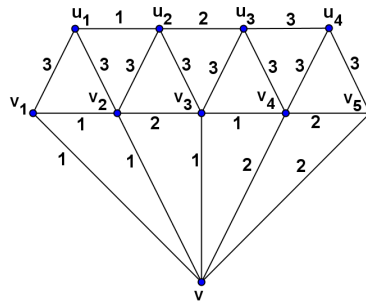
Subkasus 2.4. Misalkan $x = v_i, y = u_j$.

Subkasus 2.4.1. Jika i dan j memiliki varitas yang sama, maka terdapat lintasan pelangi v_i, v, v_{j+1}, v_j .

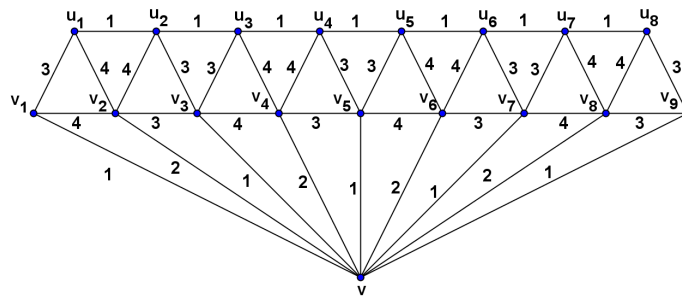
Subkasus 2.4.2. Jika i dan j memiliki varitas yang berbeda, maka terdapat lintasan pelangi v_i, v, v_j, u_j .

Dari (1) dan definisi pewarnaan di atas, diperoleh $rc(Br_n) = 4$ untuk $n \geq 6$. \square

Sebagai contoh pada Gambar 2 dan Gambar 3, disajikan berturut-turut suatu pewarnaan-3 pelangi pada Br_5 dan pewarnaan-4 pelangi pada Br_9 .



Gambar 2. Pewarnaan-3 pelangipada Br_5



Gambar 3. Pewarnaan-4 pelangipada Br_9

Teorema 2.2 Misalkan bilangan bulat $n \geq 4$, maka *bilangan terhubung pelangi kuat* pada graf berlian berorde $2n$ adalah

$$src(Br_n) = \begin{cases} 3 & , \text{ untuk } n = 4 \text{ atau } n = 5; \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2 & , \text{ untuk } n \geq 6. \end{cases}$$

Bukti :

Kasus 1. $n = 4$ atau $n = 5$

Pewarnaan pada graf Br_n seperti yang didefinisikan pada Teorema 2.1 Kasus 1 merupakan pewarnaan-3 pelangi kuat, karena setiap dua titik dari Br_n memiliki lintasan pelangi kuat. Karena itu, $src(Br_n) = 3$.

Kasus 2. $n \geq 6$

Misalkan $t = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2$. Karena $\text{diam}(Br_6) = 4$, $\text{src}(Br_6) \cong 4$. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa $\text{src}(Br_n) \cong t$ untuk $n \geq 7$. Andaikan $\text{src}(Br_n) \leq t-1$, maka terdapat c^* suatu pewarnaan- $(t-1)$ pelangi kuat pada Br_n . Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $c^*(v_1, v) = 1$. Karena $d(v_1, v_j) = 2$ untuk $j \geq 4$, $c^*(v, v_4) = 2$ dan $c^*(v, v_7) = 2$. Karena satu-satunya lintasan dari v_4 ke v_7 dengan panjang $d(v_4, v_7) = 2$ adalah v_4, v, v_7 , diperoleh kontradiksi. Karena itu, $\text{src}(Br_n) \cong t$.

Akan ditunjukkan bahwa $\text{src}(Br_n) \leq t$.

Definisikan pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, t\}$ sebagai berikut:

$$c(vv_i) = \left\lfloor \frac{i}{3} \right\rfloor + 2, \text{ untuk } i \in \{1, 2, \dots, n\};$$

$$c(u_i u_{i+1}) = ((i+1) \bmod 4) + 1, \text{ untuk } i \in \{1, 2, \dots, n-1\};$$

$$c(v_i v_{i+1}) = ((i+1) \bmod 2) + 3, \text{ untuk } i \in \{1, 2, \dots, n-1\};$$

$$c(u_i v_i) = ((i+1) \bmod 2) + 1, \text{ untuk } i \in \{1, 2, \dots, n-1\};$$

$$c(u_i v_{i+1}) = i \bmod 2 + 1, \text{ untuk } i \in \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa untuk setiap x dan $y \in V(Br_n)$ dengan $d(x, y) \geq 2$, terdapat lintasan x - y yang merupakan lintasan pelangi kuat.

Subkasus 2.1. Jika $x = v$ dan $y = u_i$, maka terdapat lintasan pelangi kuat v, v_i, u_i .

Subkasus 2.2. Misalkan $x = u_i$ dan $y = u_j$.

Subkasus 2.2.1. Jika $j - i = 2$, maka terdapat lintasan pelangi kuat u_i, u_{i+1}, u_j .

Subkasus 2.2.2. Jika $j - i = 3$, maka terdapat lintasan pelangi kuat $u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, u_j$.

Subkasus 2.3.2. Jika $j - i \geq 4$, maka terdapat lintasan pelangi kuat u_i, v_i, v, v_j, u_j .

Subkasus 2.3. Misalkan $x = v_i, y = v_j$, dan $i < j$.

Subkasus 2.3.1. Jika $j - i = 2$, maka terdapat lintasan pelangi kuat v_i, v_{i+1}, v_j .

Subkasus 2.3.2. Jika $j - i > 2$, maka terdapat lintasan pelangi kuat v_j, v_{j-1}, v_i .

Subkasus 2.4. Misalkan $x = v_i$ dan $y = u_j$.

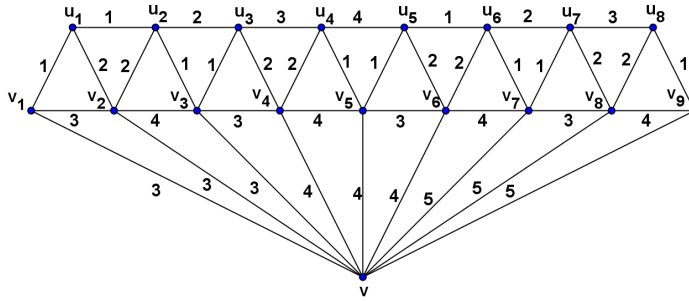
Subkasus 2.4.1. Jika $j - i = 2$, maka terdapat lintasan pelangi kuat v_i, v_{i+1}, u_i .

Subkasus 2.4.2. Jika $j - i = 3$, maka terdapat lintasan pelangi kuat v_i, v_{i+1}, u_i .

Subkasus 2.4.3. Jika $j - i > 3$, maka terdapat lintasan pelangi kuat v_i, v, v_{j+1}, u_j .

Jadi, pewarnaan di atas merupakan suatu pewarnaan pelangi kuat. Karena itu, $src(Br_n) = t$ untuk $n \geq 5$.

Sebagai contoh pada Gambar 4 dibuat suatu pewarnaan-5 pelangi kuat pada Br_9 .



Gambar 4. Pewarnaan-5 pelangi kuat pada Br_9

3. SIMPULAN

Bilangan terhubung pelangi untuk graf berlian Br_n sama dengan diameter graf tersebut, dan bilangan terhubung pelangi kuatnya sama dengan bilangan terhubung pelanginya untuk $n \in \{4, 5, 6\}$ dan bernilai $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$ untuk $n \geq 7$.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Y. Caro, A. Lev, Y. Roditty, Z. Tuza, R. Yuster. 2008. *On rainbow connection*. *Electronic Journal of Combinatorics*. Vol 15(1): R57.
- [2] L.S. Chandran, A. Das, D. Rajendraprasad, N.M. Varma. 2010. *Rainbow connection number and connected dominating sets*. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*. Vol 38: 239-244.
- [3] G. Chartrand, G.L. Johns, K.A. McKeon, P. Zhang. 2008. *Rainbow connection in graphs*. *Math. Bohemica*. Vol133(2): 85-98.
- [4] J. Dong, X. Li. 2011. *Upper bounds involving parameter σ_2 for the rainbow connection*. ArXiv:1101.3119v1. Tersedia pada <http://arxiv.org/abs/1101.3119v1>.
- [5] M. Krivelevich, R. Yuster. 2009. *The rainbow connection of a graph is (at most) reciprocal to its minimum degree*. *Journal of Graph Theory*. Vol 63(3): 185-191.
- [6] X. Li, Y. Shi. 2010. *Rainbow connection in 3-connected graphs*. *Graphs and Combinatorics*. Vol 29(5): 1471-1475.
- [7] O. Schnetz. *Evaluation of period of a family of triangle and box ladder graphs*. ArXiv : 1210.5376. Tersedia pada <http://arxiv.org/pdf/1210.5376>.
- [8] I. Schiermeyer. 2009. *Rainbow connection in graphs with minimum degree three*. [Combinatorial Algorithms: Lecture Notes in Computer Science](#). Vol 5874: 435-437.
- [9] I. Schiermeyer. 2011. *Bounds for the rainbow connection number of graphs*. *Graph Theory*. Vol 31: 387-395.
- [10] Sy. Syafrizal, G.H. Medika, L. Yulianti. 2013. *The rainbow connection of fan and sun*. *Applied Mathematical Sciences*. Vol 7(64): 3155-3159.