ISBN : 978.602.361.002.0

# FUNGSI BERVARIASI TERBATAS BERNILAI *C*[*a*,*b*] DAN BEBERAPA SIFATNYA

Firdaus Ubaidillah[1], Soeparna Darmawijaya[2], Ch. Rini Indrati[3]
[1]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember
[1]Program Doktor Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta
[2,3]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta
firdaus_u@yahoo.com, soep@ugm.ac.id, rinii@ugm.ac.id

ABSTRAK. $C[a,b]$ menyatakan ruang linear dari semua fungsi kontinu bernilai real yang terdefinisi pada selang tertutup $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Dalam paper ini, dikenalkan pengertian fungsi bervariasi terbatas dengan menggunakan norma bernilai $C[a,b]$. Dari pengertian tersebut, selanjutnya digali dan dikembangkan karakteristik fungsi bervariasi terbatas bernilai $C[a,b]$. Tujuan yang hendak dicapai adalah untuk mengetahui sifat-sifat fungsi bervariasi terbatas bernilai $C[a,b]$. Sifat-sifat fungsi bervariasi terbatas dijabarkan dalam bentuk teorema-teorema. Hasil yang diperoleh menunjukkan ruang koleksi semua fungsi bervariasi terbatas bernilai $C[a,b]$ merupakan ruang linear. Selain itu diperoleh, jika suatu fungsi bervariasi terbatas pada suatu selang tertutup maka fungsi tersebut bervariasi terbatas pada setiap selang bagiannya, dan dapat dinyatakan sebagai selisih dua fungsi naik monoton.

***Kata Kunci:*** *Fungsi bervariasi terbatas; norma; fungsi naik monoton*

## 1. PENDAHULUAN

Fungsi bervariasi terbatas bernilai real pertama kali diperkenalkan oleh Camille Jordan pada tahun 1881. Kemudian oleh matematikawan setelahnya, konsep ini banyak digunakan untuk pengembangan dan diterapkan untuk mencari solusi berbagai pemasalahan dalam matematika. Para matematikawan itu diantaranya Kurtz dan Swartz [7] dan Lee Peng Yee [8] menggunakannya untuk memahami karakteristik primitif fungsi terintegral Henstock-Kurzweil.

Seiring dengan kebutuhan dan perkembangan matematika, telah banyak dipelajari dan dibahas fungsi-fungsi bernilai ruang vektor, salah satunya fungsi bernilai ruang $C[a,b]$, cukup dikatakan fungsi bernilai $C[a,b]$. Dalam tulisan ini, $C[a,b]$ menyatakan koleksi semua fungsi kontinu bernilai real pada selang tertutup $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Beberapa sifat fungsi kontinu bernilai real terdefinisi pada selang tertutup $[a,b]$ telah banyaki dibahas oleh Bartle dan Sherbert [2], diantaranya bersifat terbatas, mencapai nilai maksimum dan minimum, dapat didekati dengan fungsi tangga, merupakan fungsi kontinu seragam, terintegral Riemann dan lain sebagainya. Pembahasan beberapa sifat dasar $C[a,b]$ banyak dijumpai dalam ruang Banach klasik diantaranya oleh Lindenstrauss dan Tsafriri [9], Diestel [5], Meyer-Nieberg [10], Albiac dan Kalton [1], dan lain-lain. Sedangkan kalkulus dan topologi pada $C[a,b]$ dapat dilihat di Darmawijaya [4].

Jika didefinisikan penjumlahan dan perkalian skalar di $C[a, b]$ berturut-turut

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

dan

$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

untuk setiap $f, g \in C[a, b], \alpha \in \mathbb{R}$ dan untuk setiap $x \in [a, b]$ maka $\alpha f, (f+g) \in C[a, b]$. Oleh karena itu $C[a, b]$ merupakan ruang linear atas lapangan $\mathbb{R}$ [12]. Lebih jauh, jika diberikan norma pada $C[a, b]$ yang didefinisikan

$\|f\|_\infty = \sup_{a \le x \le b} |f(x)|$

untuk setiap $f \in C[a, b]$, maka $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ merupakan ruang Banach [3] dan ruang separabel [6].

Dua elemen $f$ dan $g$ di dalam $C[a, b]$ dikatakan

i. $f = g$ jika $f(x) = g(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$;
ii. $f < g$ jika $f(x) < g(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$;
iii. $f \le g$ jika $f(x) \le g(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$.

Berdasarkan pengertian di atas, mudah dipahami bahwa $C[a, b]$ merupakan **himpunan terurut parsial** (*partially ordered set*) terhadap relasi "$\le$".
Dua elemen $f$ dan $g$ di dalam $C[a, b]$ dikatakan **dapat dibandingkan** (*comparable*) jika $f \le g$ atau $g \le f$ dan dikatakan **tidak dapat dibandingkan** (*incomparable*) jika tidak berlaku $f \le g$ dan $g \le f$. Selanjutnya jika dianggap penting, penulisan $f < g$ dan $f \le g$ berturut-turut dapat digantikan dengan $g > f$ dan $g \ge f$.

Jika $f, g \in C[a, b]$ dan $f < g$, himpunan

i. $(f, g) = \{h \in C[a, b] : f < h < g\}$ disebut selang terbuka,
ii. $[f, g] = \{h \in C[a, b] : f \le h \le g\}$ disebut selang tertutup,
iii. $[f, g) = \{h \in C[a, b] : f \le h < g\}$ disebut selang terbuka kanan, dan
iv. $(f, g] = \{h \in C[a, b] : f < h \le g\}$ disebut selang tertutup

di dalam $C[a, b]$. Untuk selanjutnya, jika $(f, g), [f, g], [f, g)$ dan $(f, g]$ selang-selang di dalam $C[a, b]$ maka senantiasa dianggap $f < g$.

Selanjutnya didefinisikan **elemen nol** (*null element*) $\theta$ dan **elemen satuan** (*unit element*) $e$ di dalam $C[a, b]$ berturut-turut dengan

$\theta(x) = 0$

dan

$e(x) = 1$

untuk setiap $x \in [a, b]$.

Penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan sifat dan struktur fungsi bervariasi terbatas bernilai $C[a, b]$ yaitu dengan memaparkan dan menjelaskan

ISBN : 978.602.361.002.0

definisi, menganalisis dan menunjukkan sifat-sifat fungsi bervariasi terbatas bernilai $C[a, b]$ yang dijabarkan dalam teorema-teorema.

## 2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan hasil kajian teoritis. Penelitian diawali dengan memahami sifat-sifat ruang $C[a, b]$ yang dilengkapi dengan relasi "$\leq$". Selanjutnya membentuk norma bernilai $C[a, b]$, kemudian mengenalkan pengertian fungsi bervariasi terbatas dengan menggunakan norma bernilai $C[a, b]$. Dari pengertian tersebut, selanjutnya digali dan dikembangkan karakteristik fungsi bervariasi terbatas. Sifat-sifat fungsi bervariasi terbatas bernilai $C[a, b]$dijabarkan dalam bentuk teorema-teorema.

## 3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Dalam bagian ini akan dikenalkan pengertian fungsi bervariasi terbatas bernilai $C[a, b]$ dan dibahas beberapa sifatnya yang dijabarkan dalam teorema-teorema. Pengertian supremum himpunan di dalam $C[a, b]$ dapat dilihat di [11]. Sebelum itu, diperkenalkan pengertian norma bernilai $C[a, b]$.

**Definisi 1**. Fungsi $f \in C[a, b] \longmapsto |f| \in C[a, b]$, yang mempunyai sifat-sifat

(N1). $|f| \geq \theta$ , untuk setiap $f \in C[a,b]$
$|f| = \theta$ jika dan hanya jika $f = \theta$,
(N2). $|\lambda f| = |\lambda||f|$ untuk setiap $\lambda \in \mathbb{R}$ dan $f \in C[a,b]$,
(N3). $|f + g| \leq |f| + |g|$ untuk setiap $f, g \in C[a,b]$

disebut **norma bernilai** $C[a, b]$, selanjutnya cukup disebut **norma** pada $C[a, b]$.

Selanjutnya didefinisikan nilai mutlak $|.|$ pada $C[a, b]$ dengan

$$|f|(x) = |f(x)|, \text{ untuk setiap } x \in [a, b]. \tag{1}$$

**Proposisi 2**. Nilai mutlak $|.|$ yang didefinisikan dalam persamaan (1) merupakan norma pada $C[a, b]$.

*Bukti*:
(N1). $|f| \geq \theta$ untuk setiap $f \in C[a, b]$, sebab $|f(x)| \geq 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$.
$|f| = \theta \Leftrightarrow |f(x)| = 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$ $\Leftrightarrow$ $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$ $\Leftrightarrow f = \theta$.
(N2). Untuk setiap $\lambda \in \mathbb{R}$ dan $f \in C[a,b]$ benar bahwa $|\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)|$ untuk setiap $x \in [a, b]$ jika dan hanya jika $|\lambda f| = |\lambda||f|$.

(N3). Untuk setiap $f, g \in C[a,b]$ benar bahwa $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ untuk setiap $x \in [a,b]$ jika dan hanya jika $|f+g| \leq |f| + |g|$.

Ini membuktikan nilai mutlak merupakan norma pada $C[a,b]$. ∎

Diberikan fungsi $F: [f,g] \to C[a,b]$ dan $\mathcal{P} = \{[u_i, v_i]\}_{i=1}^{n}$ suatu koleksi berhingga selang tidak saling tumpang-tindih pada $[f,g]$. **Variasi** fungsi $F$ yang terkait dengan $\mathcal{P}$ adalah

$$v(F;\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} |F(v_i) - F(u_i)|$$

dan **variasi** fungsi $F$ pada $[f,g]$ adalah

$V(F;[f,g]) = \sup \;\; \{v(F;\mathcal{P}) : \mathcal{P}$ koleksi semua selang tidak saling tumpang-tindih pada $[f,g]\}$

$$= \sup_{\mathcal{P}} v(F;\mathcal{P})$$

Fungsi $F$ dikatakan **bervariasi terbatas** (*bounded variation*) pada $[f,g]$ jika

$$V(F;[f,g]) < \bar{\infty}$$

dengan $\bar{\infty}(x) = \infty$ untuk setiap $x \in [a,b]$.
Selanjutnya, koleksi semua fungsi bervariasi terbatas pada $[f,g]$ dinyatakan oleh $BV[f,g]$.
Berikut diberikan contoh fungsi-fungsi bervariasi terbatas dan yang tidak bervariasi terbatas pada sebuah selang tertutup.

**Contoh 3**. (a). Diberikan fungsi $F: [\theta, f] \to C[0,1]$ dengan $F(h) = \theta$ untuk $\theta \leq h < \frac{f}{2}$ dan $F(h) = e$ untuk $\frac{f}{2} \leq h \leq f$ dengan $f(x) = x^2 + 1$ untuk setiap $x \in [0,1]$. Oleh karena itu diperoleh

$$V(F;[\theta,f]) = \left|F\left(\frac{f}{2}\right) - F(\theta)\right| + \left|F(f) - F\left(\frac{f}{2}\right)\right| = e < \bar{\infty}\,.$$

Jadi $F \in BV[\theta, f]$.

(b). Diberikan fungsi $G: [\theta, e] \to C[0,1]$ dengan $G(h) = (-1)^{k+1}e$ untuk setiap $h \in [c_{k-1}, c_k)$ dengan $c_k = e - \frac{e}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$. Dipilih

$$Q = \{[\theta, c_1], [c_1, c_2], [c_2, c_3], \dots, [c_{n-1}, e]\}$$

koleksi selang tidak saling tumpang-tindih pada $[\theta, e]$.
Oleh karena itu diperoleh

$$v(G;Q) = |G(c_1) - G(\theta)| + |G(c_2) - G(c_1)| + |G(c_3) - G(c_2)| + \cdots + |G(e) - G(c_{n-1})|$$
$$= 2e + 2e + 2e + \cdots + e = 2(n-1)e + e = (2n-1)e.$$

ISBN : 978.602.361.002.0

Dari hasil tersebut diperoleh $V(G;[\theta,e]) \geq (2n-1)e$.
Karena $n \in \mathbb{N}$ sebarang, maka $V(G;[\theta,e]) = \overline{\infty}$. Jadi $G \notin BV[\theta,e]$.

**Teorema 4**. $BV[f,g]$ merupakan ruang linear atas lapangan $\mathbb{R}$.

*Bukti*: Diberikan $F,G \in BV[f,g]$ dan $\lambda \in \mathbb{R}$ sebarang.
Jika $\lambda = 0$ jelas $\lambda F \in BV[f,g]$. Jika $\lambda \neq 0$ diperoleh

$$V(\lambda F;[f,g]) = \sup_{\mathcal{P}}(\lambda F;\mathcal{P}) = |\lambda|\sup_{\mathcal{P}}(F;\mathcal{P}) < |\lambda|\overline{\infty} = \overline{\infty}.$$

dan

$$V(F+G;[f,g]) = \sup_{\mathcal{P}}(F+G;\mathcal{P}) \leq \sup_{\mathcal{P}}(F;\mathcal{P}) + \sup_{\mathcal{P}}(G;\mathcal{P}) < \overline{\infty} + \overline{\infty} = \overline{\infty}.$$

Jadi $\lambda F \in BV[f,g]$ dan $F+G \in BV[f,g]$. Jadi $BV[f,g]$ merupakan ruang linear. ■

**Teorema 5**. Jika $F \in BV[f,g]$ maka $F$ terbatas pada $[f,g]$.

*Bukti*: Untuk setiap $h \in (f,g)$ dibentuk $\mathcal{P} = \{[f,h],[h,g]\}$ koleksi selang tidak saling tumpang-tindih pada $[f,g]$. Dengan demikian diperoleh

$$|F(h) - F(f)| + |F(g) - F(h)| = v(F;[f,g]) \leq V(F;[f,g]),$$

yang berakibat

$$|F(h)| \leq \frac{1}{2}[|F(f)| + |F(g)| + V(F;[f,g])].$$

Jadi $F$ terbatas pada $[f,g]$. ■

**Teorema 6**. Diberikan fungsi $F:[f,g] \to C[a,b]$.

i. Jika $F \in BV[f,g]$ maka $F \in BV[r,s]$ untuk setiap $[r,s] \subseteq [f,g]$, dan $V(F;[f,g]) = V(F;[f,h]) + V(F;[h,g])$ untuk setiap $h \in (f,g)$,
ii. Jika $F \in BV[f,h]$ dan $F \in BV[h,g]$ maka $F \in BV[f,g]$.

*Bukti*:(i). Diberikan $F \in BV[f,g]$. Untuk setiap $[r,s] \subseteq [f,g]$, berdasarkan definisi, cukup jelas bahwa $V(F;[r,s]) \leq V(F;[f,g]) < \overline{\infty}$. Jadi $F \in BV[r,s]$ untuk setiap $[r,s] \subseteq [f,g]$. Selanjutnya diberikan sebarang $h \in (f,g)$ dan $\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2$ berturut-turut sebarang koleksi selang tidak saling tumpang-tindih pada $[f,h]$ dan $[h,g]$. Dibentuk $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Jadi $\mathcal{P}$ merupakan koleksi selang tidak saling tumpang-tindih pada $[f,g]$. Oleh karena itu diperoleh

$$v(F;\mathcal{P}) = v(F;\mathcal{P}_1) + v(F;\mathcal{P}_2)$$

sehingga

$$V(F;[f,g]) \leq V(F;[f,h]) + V(F;[h,g]). \tag{2}$$

Selanjutnya, diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$. Dipilih $Q_1$ dan $Q_2$ berturut-turut koleksi selang tidak saling tumpang-tindih pada $[f,h]$ dan $[h,g]$ sehingga

$$v(F;Q_1) > V(F;[f,h]) - \frac{\varepsilon e}{2}$$

dan

$$v(F;Q_2) > V(F;[h,g]) - \frac{\varepsilon e}{2}.$$

Jadi diperoleh

$$\begin{aligned} V(F;[f,g]) &\geq v(F;Q_1) + v(F;Q_2) \\ &> V(F;[f,h]) - \frac{\varepsilon e}{2} + V(F;[h,g]) - \frac{\varepsilon e}{2} \\ &= V(F;[f,h]) + V(F;[h,g]) - \varepsilon e\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Karena ketaksamaan (3) berlaku untuk $\varepsilon > 0$ sebarang, disimpulkan

$$V(F;[f,g]) \geq V(F;[f,h]) + V(F;[h,g]). \tag{4}$$

Berdasarkan ketaksamaan (2) dan (4) diperoleh

$$V(F;[f,g]) = V(F;[f,h]) + V(F;[h,g]).$$

(ii). Untuk bukti bagian yang kedua telah dibuktikan dalam bukti bagian (i).■

Suatu fungsi $F:[f,g] \to C[a,b]$ dikatakan **naik (turun) monoton** pada $[f,g]$ jika setiap $h_1, h_2 \in [f,g]$ dengan $h_1 < h_2$ maka berlaku $F(h_1) \leq F(h_2)$ $\big(F(h_1) \geq F(h_2)\big)$. Fungsi monoton merupakan fungsi yang bervariasi terbatas sebab $V(F;[f,g]) = |F(g) - F(f)| < \bar{\infty}$. Oleh karena itu selisih dua fungsi monoton merupakan fungsi bervariasi terbatas. Sebaliknya juga benar, yakni fungsi bervariasi terbatas dapat dinyatakan sebagai selisih dua fungsi monoton, seperti dituangkan dalam teorema berikut.

**Teorema 7**. Jika $F \in BV[f,g]$ maka terdapat dua fungsi naik monoton $F_1$ dan $F_2$ pada $[f,g]$ sehingga $F = F_1 - F_2$.

*Bukti*: Diberikan $F \in BV[f,g]$. Didefinisikan $F_1(h) = V(F;[f,h])$ untuk setiap $h \in [f,g]$ dan $F_2 = F_1 - F$. Jelas bahwa $F = F_1 - F_2$, dan berdasarkan Teorema 6 cukup jelas $F_1$ naik monoton pada $[f,g]$.

Jika $f \leq h_1 < h_2 \leq g$, maka

$$F_2(h_1) = F_1(h_1) - F(h_1)$$

$$= V(F;[f,h_1]) - F(h_1).$$

Jadi diperoleh

$$F_2(h_2) - F_2(h_1) = \big(V(F;[f,h_2]) - F(h_2)\big) - \big(V(F;[f,h_1]) - F(h_1)\big)$$

$$= \big(V(F;[f,h_2]) - V(F;[f,h_1])\big) - \big(F(h_2) - F(h_1)\big)$$
$$= V(F;[h_1,h_2]) - (F(h_2) - F(h_1)) \geq \theta$$

dengan kata lain $F_2$ naik monoton pada $[f,g]$. ■

## 4. SIMPULAN

Fungsi bernilai $C[a,b]$ bervariasi terbatas pada $[f,g]$ merupakan fungsi terbatas pada $[f,g]$ dan dapat dinyatakan sebagai selisih dua fungsi naik monoton. Suatu fungsi yang bervariasi terbatas pada selang tertutup $[f,g]$ maka fungsi tersebut juga bervariasi terbatas pada setiap selang tertutup bagian $[f,g]$.

## DAFTAR PUSTAKA

[1] Albiac, F., dan Kalton, N.J., 2006, *Topics in Banach Space Theory*, Springer-Verlag, New York.

[2] Bartle, R.G. dan Sherbert, D.R., 2000, *Introduction to Real Analysis*, 3rd edition, JohnWiley, New York.

[3] Dales, H.G., 2003, *Introduction Banach Algebras, Operators, and Harmonic Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.

[4] Darmawijaya, S., 2012, *Calculus on the Family of Continuous Functions*, Seminar Nasional KNM XVI, Universitas Padjadjaran Sumedang.

[5] Diestel, J., 1984, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer-Verlag, New York.

[6] Hunter, J. dan Nachtergaele, B., 2000, *Applied Analysis*, Davis

[7] Kurtz, D.S dan Swartz, C.W., 2004, *Theories of Integration: The Integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, and McShane*, World Scientific Publishing Co, Singapore

[8] Lee, P.Y, 1989, *Lanzhou Lectures On Henstock Integration*, World Scientific, Singapore

[9] Lindenstrauss, J. Dan Tsafriri, L., 1977, *Classical Banach Spaces II*, Springer-Verlag, Berlin.

[10] Meyer-Nieberg, P., 1991, *Banach Lattices*, Springer-Verlag, Berlin.

[11] Ubaidillah, F., Darmawijaya, S., dan Rini, Ch. I., 2013, Kekonvergenan Barisan di dalam Ruang Fungsi Kontinu $C[a,b]$, *Cauchy* **2** (4) hal. 184-188

ISBN : 978.602.361.002.0

[12] Yeh, J., 2006, *Real Analysis: Theory of Measure and Integration*, 2nd edition, World Scientific Publishing, Singapore.