Teorema-Teorema Kekonvergenan pada Integral Riemann, Lebesgue dan Henstock

Rita P.Khotimah,[1] Soeparna Darmawijaya[2], Ch. Rini Indrati[3],
[1]Prodi Pendidikan Matematika FKIP UMS
[2,3]Jurusan Matematika FMIPA UGM

Abstrak

Tujuan penelitian ini untuk mengkaji dan membuktikan syarat-syarat cukup yang menjamin fungsi limit dari barisan fungsi terintegral (Riemann atau Lebesgue atau Henstock) pada [*a,b*] juga terintegral pada [*a,b*], dan nilai integralnya sama dengan nilai limit integral barisan fungsinya. Pertama, diperlihatkan bahwa Teorema Kekonvergenan Seragam, Teorema Kekonvergenan Terbatas dan Teorema Kekonvergenan Monoton memberikan jaminan syarat-syarat cukup tersebut di dalam integral Riemann. Selanjutnya diperlihatkan hubungan antara teorema-teorema kekonvergenan di dalam integral Riemann dengan teorema-teorema kekonvergenan di dalam integral Lebesgue dan teorema-teorema kekonvergenan di dalam integral Lebesgue dengan teorema-teorema kekonvergenan di dalam integral Henstock.

Kata kunci : *teorema kekonvergenan, terintegral Riemann, terintegral Lebesgue, terintegral Henstock.*

A. PENDAHULUAN

Teori integral mempunyai peranan penting dalam kehidupan. Permasalahan-permasalahan yang tidak bisa diselesaikan secara langsung, biasanya dibawa ke dalam bentuk model matematika. Salah satu alat yang digunakan untuk menyusun dan sekaligus menyelesaikan model matematika tersebut adalah teori integral.

Teori integral yang biasa dikenal adalah integral Riemann, yang kemudian diperluas menjadi integral Lebesgue. Kelemahan dari integral Lebesgue adalah banyak dibutuhkan persyaratan untuk mempelajarinya (seperti aljabar sigma, teori ukuran, himpunan terukur, fungsi terukur,dll.). Pada akhirnya ditemukan teori integral baru, yang merupakan perluasan dari integral Lebesgue, yakni integral Denjoy Khusus dan integral Perron, namun penggunaan definisi kedua integral tersebut masih dirasakan sulit. Oleh Henstock dan Kurzweil kemudian disusun definisi integral yang baru dengan cara konstruktif,sama dengan tipe definisi integral Riemann. Dengan tipe definisi yang baru ini, definisi integral menjadi lebih sederhana, pembuktian-pembuktian teori integralnya pun menjadi lebih mudah. Lebih dari pada itu, integral Henstock ternyata ekuivalen dengan integral Denjoy Khusus dan integral Perron (Lee Peng Yee,1989).

Schecter (2002), integral Henstock bisa dipelajari cukup dengan prasyarat kalkulus lanjut dan analisis real. Lebih lanjut, ternyata integral Henstock juga sudah memuat integral Riemann, Riemann tak Wajar, Newton dan Lebesgue

Banyak hal yang bisa dipelajari dalam teori integral, salah satu di antaranya mengenai kekonvergenan barisan fungsi-fungsi terintegral. Permasalahannya adalah tidak semua barisan fungsi yang terintegral dan konvergen ke suatu fungsi, fungsi limitnya terintegral, atau jika terintegral, nilai integralnya belum tentu sama dengan nilai limit integral barisan fungsinya.

Diberikan barisan fungsi $\{f_n\}$ pada [0,1] yang didefinisikan dengan :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & ; x = r_k,\ k = 1,2,3,\ldots,n \\ 0 & ; \text{untuk x lainnya} \end{cases}$$

dengan ($r_1, r_2, \ldots$) bilangan rasional di dalam [*a,b*], dan

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \text{untuk } x \text{ rasional} \\ 0 & ; \text{untuk } x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Untuk setiap *n*, f_n terintegral Riemann pada [*0,1*] dengan $(R)\int_0^1 f_n(x)dx = 0$. Selain itu, barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen ke fungsi *f*, tetapi *f* tidak terintegral Riemann pada [*0,1*].

Selanjutnya, dapat diperhatikan barisan fungsi $\{f_n\}$ pada [*0,1*] yang didefinisikan dengan:

$f_n(x) = 2nxe^{-nx^2}$, $n \in N$.

Barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen ke fungsi *f* pada [0,1], dengan $f(x) = 0,\ x \in [0,1]$. Karena $F_n(x) = -e^{-nx^2}$ fungsi primitif pada [0,1], maka :

$$(R)\int_0^1 f_n(x)dx = \left[F_n(x)\right]_0^1 = 1 - e^{-n},$$

sehingga diperoleh : $\lim_{n\to\infty}(R)\int_0^1 f_n(x)dx = 1 \neq (R)\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Di dalam penelitian ini akan diselidiki syarat cukup yang menjamin fungsi limit barisan fungsi terintegral, juga terintegral dan nilai integralnya sama dengan nilai limit integral barisan fungsinya.

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka (kajian teori). Analisis hasil penelitian terutama pada pembuktian teorema – teorema kekonvergenan di dalam integral Riemann, Lebesgue dan Henstock.

B. HASIL PENELITIAN

1. Teorema-Teorema Kekonvergenan di dalam Integral Riemann

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, dapat diketahui dan dibuktikan syarat-syarat-syarat cukup yang menjamin fungsi limit dari barisan fungsi terintegral Riemann juga terintegral Riemann pada [*a,b*] dan nilai integralnya sama dengan nilai limit integral barisan fungsinya, sebagaimana yang tertuang dalam teorema-teorema berikut:

Teorema 1.1. (Teorema Kekonvergenan Seragam).

Diketahui fungsi $f_n, f : [a,b] \to R$, $n \in N$ *dengan* f_n *terintegral Riemann pada* [*a,b*] *untuk setiap n. Jika barisan fungsi* $\{f_n\}$ *konvergen seragam ke fungsi f pada* [*a,b*], *maka f terintegral Riemann pada* [*a,b*], *dan*

$$(R)\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}(R)\int_a^b f_n .$$

Teorema 1.2. (Teorema Kekonvergenan Terbatas)

Diketahui fungsi $f_n, f : [a,b] \to R$, $n \in N$ *dengan f dan* f_n *terintegral Riemann pada* [*a,b*] *untuk setiap n. Jika barisan fungsi* $\{f_n\}$ *konvergen ke fungsi f pada* [*a,b*], *dan ada M>0 sehingga* $|f_n(x)| \le M,\ \forall x \in [a,b]$ *maka*

$$(R)\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}(R)\int_a^b f_n .$$

Teorema 1.3. (Teorema Kekonvergenan Monoton)

Diketahui $f_n : [a,b] \to R$ *fungsi,* $\forall\ n \in N$ *dengan* f_n *terintegral Riemann pada* [*a,b*] *untuk setiap n dan* $\{f_n\}$ *konvergen ke fungsi* $f : [a,b] \to R$.

Jika barisan fungsi $\{f_n\}$ *monoton pada* [*a,b*] *dan ada bilangan* $M_1 > 0$ *sehingga* $|f_n(x)| \le M_1$ *untuk setiap* $n \in N$ *dan* $x \in [a,b]$, *maka fungsi f terintegral Riemann pada* [*a,b*] *dan*

$$(R)\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}(R)\int_a^b f_n .$$

2. Teorema-Teorema Kekonvergenan di dalam Integral Lebesgue

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, dapat diketahui dan dibuktikan syarat-syarat-syarat cukup yang menjamin fungsi limit dari barisan fungsi terintegral Riemann juga terintegral Riemann pada [*a*,*b*] dan nilai integralnya sama dengan nilai limit integral barisan fungsinya, sebagaimana yang tertuang dalam teorema-teorema berikut:

Teorema 2.1. (Teorema Kekonvergenan Seragam)

Diketahui fungsi $f_n, f:[a,b]\to R,\ n\in N$ *dengan* f_n *terintegral Lebesgue pada* [*a*,*b*] *untuk setiap n. Jika barisan fungsi* $\{f_n\}$ *konvergen seragam ke f hampir di mana-mana pada* [*a*,*b*], *maka f terintegral Lebesgue pada* [*a*,*b*], *dan*

$$(L)\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}(L)\int_a^b f_n .$$

2.2. Teorema (Teorema Kekonvergenan Terbatas)

Diketahui $\{f_n\}$ *barisan fungsi terukur pada himpunan terukur E, dengan* $\lambda(E)<\infty$ *dan ada bilangan M>0 sehingga* $|f_n(x)|\le M$ *, untuk setiap n dan hampir untuk setiap* $x\in E$. *Jika barisan fungsi* $\{f_n\}$ *konvergen ke fungsi f hampir di mana-mana pada E, maka*

$$(L)\int_E f = \lim_{n\to\infty}(L)\int_E f_n \ .$$

Teorema 2. 3. (Teorema Kekonvergenan Monoton)

Diketahui $\{f_n\}$ *barisan fungsi terukur pada himpunan terukur E.*

Jika barisan fungsi $\{f_n\}$ *monoton dan konvergen ke fungsi f hampir di mana- mana pada E, maka :*

$$(L)\int_E f = \lim_{n\to\infty}(L)\int_E f_n .$$

Teorema 2.4. (Teorema Kekonvergenan Lebesgue)

Diketahui fungsi g terintegral Lebesgue pada E dan $\{f_n\}$ *barisan fungsi terukur, sehingga* $|f_n|\le g$ *hampir di mana-mana pada E.*

Jika barisan $\{f_n\}$ *konvergen ke fungsi f hampir di mana-mana pada E , maka f terintegral Lebesgue pada E dan*

$$(L)\int_E f = \lim_{n\to\infty}(L)\int_E f_n .$$

Teorema 2.5. (Teorema Kekonvergenan Vitali)

Diketahui fungsi $f_n:[a,b]\to R, \forall n\in N$. *Untuk setiap n,* f_n *terintegral Lebesgue pada* [*a*,*b*], *dengan* $F_n(x)=(L)\int_a^b f_n$. *Jika* $\{F_n\}$ *kontinu mutlak seragam pada* [*a*,*b*] dan $\{f_n\}$ *konvergen ke fungsi f pada* [*a*,*b*], *maka f terintegral Lebesgue pada* [*a*,*b*], dan $\lim_{n\to\infty}(L)\int_a^b f_n = (L)\int_a^b f$.

Akibat dari Teorema Kekonvergenan Vitali adalah Teorema 2.6. dan 2.7. berikut.

Teorema 2.6.

Diketahui barisan fungsi $\{f_n\}$, f_n *terintegral Lebesgue pada* [*a*,b] untuk setiap *n, dengan* $F_n(x) = (L)\int_a^x f_n, \forall n$ *dan* $\{f_n\}$ *konvergen ke f pada* [*a*,*b*].

Jika $\{f_n\}$ *monoton pada* [*a*,*b*], *dan* $\lim_{n\to\infty}(L)\int_a^b f_n$ *finite, maka*

$$(L)\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}(L)\int_a^b f_n$$

Teorema 2.7.

Diketahui barisan fungsi $\{f_n\}$, f_n *terintegral Lebesgue pada* [*a*,b] untuk setiap *n, dengan* $F_n(x) = (L)\int_a^x f_n, \forall n$ *dan* $\{f_n\}$ *konvergen ke f pada* [*a*,*b*].

Jika ada fungsi-fungsi terintegral Lebesgue g dan h pada [*a*,*b*] sehingga $g \le f_n \le h$, *untuk setiap n, maka*

$$(L)\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}(L)\int_a^b f_n .$$

3. Teorema-Teorema Kekonvergenan di dalam Integral Henstock.

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, dapat diketahui dan dibuktikan syarat-syarat-syarat cukup yang menjamin fungsi limit dari barisan fungsi terintegral Riemann juga terintegral Riemann pada [*a*,*b*] dan nilai integralnya sama dengan nilai limit integral barisan fungsinya, sebagaimana yang tertuang dalam teorema-teorema berikut:

Teorema 3.1. (Teorema Kekonvergenan Seragam)

Diketahui fungsi $f_n, f : [a,b] \to R$, $n \in N$ *dengan* f_n *terintegral Henstock pada* [*a*,*b*] *untuk setiap n.*

Jika barisan fungsi $\{f_n\}$ *konvergen seragam hampir di mana-mana ke fungsi f pada* [*a*,*b*], *maka f terintegral Henstock pada* [*a*,*b*], *dan*

$$(H)\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}(H)\int_a^b f_n .$$

Teorema 3.2. (Teorema Kekonvergenan Monoton).

Jika barisan fungsi $\{f_n\}$, $f_n : [a,b] \to R$, $n = 1,2,3,...$ *memenuhi tiga kondisi berikut:*

(i). $f_n \to f$ hampir di mana - mana pada [a, b], n = 1,2,...,
dengan f_n *terintegral Henstock pada* [*a*,*b*] *untuk setiap n.*

(ii). $f_n \le f_{n+1}$ hampir dimana - mana pada [a, b].

(iii). $\left\{(H)\int_a^b f_n\right\}$ *konvergen ke A.*

maka f terintegral Henstock pada [*a*,*b*] *dan*

$$(H)\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}(H)\int_a^b f_n .$$

Lemma 3.3.

Jika f_1, f_2 *terintegral Henstock pada* [*a*,*b*], *dan jika* $g(x) \le f_i(x) \le h(x)$ *hampir di mana-mana pada* [*a*,*b*], *i=1,2, dengan g dan h masing-masing juga terintegral Henstock pada* [*a*,*b*], *maka maks* $\{f_1, f_2\}$ *dan min* $\{f_1, f_2\}$ *terintegral Henstock pada* [*a*,*b*].

Teorema 3.4. (Teorema Kekonvergenan Terdominasi).
Jika kondisi-kondisi berikut ini terpenuhi :
(i). $f_n(x) \to f(x)$ *hampir untuk setiap* $x \in [a,b]$, $n \to \infty$, f_n *terintegral Henstock pada* [*a*,*b*], *untuk setiap n.*
(ii). $g(x) \le f_n(x) \le h(x)$ *hampir untuk setiap* $x \in [a,b]$, *untuk setiap n, dengan g dan h juga terintegral Henstock pada* [*a*,*b*],
maka f terintegral Henstock pada [*a*,*b*], *dan*

$$\lim_{n\to\infty}(H)\int_a^b f_n = (H)\int_a^b f\ .$$

Lemma 3.5.
Diketahui $f, f_n, : [a,b] \subseteq R \to R, \forall n$ *fungsi.*
Jika kedua kondisi berikut terpenuhi :
(i) $f_n \to f$ *hampir di mana-mana pada* [*a*,*b*] *untuk* $n \to \infty$,
$f_n \in H[a,b]$ *dengan primitif-H* $F_n, \forall n$
(ii) $\{F_n\}$ *kontinu mutlak seragam pada* [*a*,*b*]
maka f terintegral Henstock pada [*a*,*b*] *dan*

$$(H)\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}(H)\int_a^b f_n\ .$$

Teorema 3.6. (Teorema Kekonvergenan Terkendali, Lee Peng Yee,1989)
Jika barisan fungsi $\{f_n\}$ *konvergen terkendali ke f pada* [*a*,*b*], *maka f terintegral Henstock pada* [*a*,*b*] *dan*

$$(H)\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}(H)\int_a^b f_n\ .$$

C. KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil penelitian pada bab sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut :

1. Diberikan fungsi $f_n, f : [a,b] \to R, n \in N$ dengan f_n terintegral Riemann pada [*a*,*b*] untuk setiap *n* dan barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen ke fungsi *f* .
   Syarat cukup agar fungsi *f* terintegral Riemann pada [*a*,*b*] dan nilai integralnya sama dengan nilai limit integral barisan fungsinya adalah :
   a. $\{f_n\}$ konvergen seragam pada [*a*,*b*]
   b. $\{f_n\}$ terbatas pada [*a*,*b*]
   c. $\{f_n\}$ monoton pada [*a*,*b*].
2. Teorema Kekonvergenan Seragam, Teorema Kekonvergenan Terbatas dan Teorema Kekonvergenan Monoton di dalam integral Riemann dapat diitlakkan ke dalam integral Lebesgue.
3. Teorema Kekonvergenan Terdominasi di dalam integral Lebesgue merupakan perluasan dari Teorema Kekonvergenan Terbatas dan Teorema Kekonvergenan Monoton dalam integral Lebesgue. Dengan demikian, Teorema Kekonvergenan Terdominasi integral

Lebesgue juga merupakan pengitlakan dari Teorema Kekonvergenan Terbatas dan Teorema Kekonvergenan Monoton di dalam integral Riemann.

4. Teorema Kekonvergenan Vitali merupakan perluasan dari Teorema Kekonvergenan Monoton dan Teorema Terdominasi di dalam integral Lebesgue. Dengan demikian, Teorema Kekonvergenan Vitali juga merupakan pengitlakan dari Teorema Kekonvergenan Terbatas dan Teorema Kekonvergenan Monoton di dalam integral Riemann.
5. Teorema Kekonvergenan Seragam, Teorema Kekonvergenan Monoton dan Teorema Kekonvergenan Terdominasi yang berlaku di dalam integral Lebesgue dapat diitlakkan ke dalam integral Henstock.
6. Teorema Kekonvergenan Terkendali yang berlaku di dalam integral Henstock merupakan pengitlakan dari Teorema Kekonvergenan Vitali di dalam integral Lebesgue.

Penelitian ini masih terbatas pada ruang $[a,b]$ dan jenis integralnya pun masih terbatas pada integral Riemann, integral Lebesgue dan integral Henstock. Oleh karena itu penelitian lebih lanjut yang dapat dilakukan adalah bagaimana penelitian ini jika dikerjakan pada ruang selain $[a,b]$ dan pada integral selain Riemann, Lebesgue dan Henstock.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R. G., 1966, *The Elements of Integration*, John Wiley & Sons Inc, New York.

Bartle, R. G, 2001, *A Modern Theory of Integration*, Graduate Studies in Mathematics Volume 32, American Mathematical Society.

Bullen, P. S. , Sarkhel, D. N, & Vyborny, R, 1988, A Riemann View of The Lebesgue Integral, *Sotheast Asian Bulletin of Mathematics*, Vol. 12, Number 1, Page: 39-51.

Chae, B. , 1995, *Lebesgue Integration*, second edition, Springer-Verlag, New York.

Gordon, R. A, 1994, *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Graduate Studies in Mathematics Volume 4, American Mathematical Society.

Ke-Cheng, L. , 1987, A Refinement of The Controlled Convergence Theorem for Henstock Integrals, *Sotheast Asian Bulletin of Mathematics*, Vol. 11, Number 1, Page: 49-51.

Pfeffer, W. F, 1993, *The Riemann Approach to Integraton*, Cambridge University Press, UK.

Rudin, W. , 1976, *Principles of Mathematical Analysis*, International Edition, third edition, McGraw-Hill Book Company, Singapore.

Schester, E. , 2001, An Introduction to The Gauge Integral, *http://atlas.math.vanderbilt.edu/~schectex/ccc/gauge/*, diakses 1 Maret 2002.

Yee, L. P. , 1989, *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, Series in Real Analysis Volume 2, World Scientific, Singapore.

Yee, L. P. & Vyborny, R. , 2000, *Integral: An Easy Approach After Kurzweil and Henstock*, Cambridge Univesity Press, UK.