ISBN : 978.602.361.002.0

INTEGRAL PARSIAL PADA INTEGRAL DESKRIPTIF RIEMANN

Oleh : Muslich

Jurusan Matematika FMIPA UNS

e-mail: muslich_mus@yahoo.com

ABSTRAK: Pernyataan fungsi $f:[a,b]\to\Re$ terintegral Riemann pada $[a,b]$ jika dan hanya jika f kontinu hampir dimana-mana (h.d) pada $[a,b]$ dapat diangkat sebagai definisi deskriptif untuk integral Riemann. Sejalan dengan pembahasan integral parsial pada integral konstruktif Riemann, tulisan ini bertujuan untuk membahas formula integral parsial pada integral deskriptif Riemann.

Kata kunci*:Kontinuitas; integral Riemann; definisi deskriptif integral Riemann.*

1. PENDAHULUAN

Telah dikenal bahwa integral Riemann termasuk jenis integral konstruktif. Sedangkan jenis integral yang lain adalah jenis integral deskriptif seperti halnya integral Newton, integral Lebesgue dan integral Z. Bartle [1] dalam bukunya menyatakan bahwa untuk setiap fungsi kontinu $f:[a,b]\to\Re$ ditulis $f\in C[a,b]$ pasti terintegral Riemann pada $[a,b]$ ditulis $f\in R[a,b]$. Pernyataan tersebut diperlemah oleh Gordon [3] dalam bukunya yang menyebutkan bahwa fungsi $f:[a,b]\to\Re$ terintegral Riemann pada $[a,b]$ jika dan hanya jika f kontinu hampir dimana-mana (h.d) pada $[a,b]$. Oleh karena itu pernyataan tersebut bisa diangkat menjadi definisi deskriptif untuk integral Riemann. Hampir semua jenis integral konstruktif jenis Riemann selalu dibahas masalah bentuk integral parsialnya. Seperti halnya (i) integral parsial pada integral Riemann oleh Gordon [3] dan Rudin, W [10], (ii) integral parsial pada integral Henstock oleh Gordon [3] dan Lee Peng Yee [6], (iii) integral parsial pada integral Mc Shane oleh Gordon [3] dan integral parsial pada integral M_α oleh Jae Myung Park *et al.* [5]. Sedangkan Muslich [8] membahas integral parsial pada integral-Z yang dikenal sebagai integral deskriptif. Sejalan dengan pembahasan integral parsial pada integral konstruktif jenis Riemann, penulis bertujuan untuk menyusun formula integral parsial pada integral deskriptif Riemann.

2. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Diberikan fungsi $f\in R[a,b]$ maka dapat didefinisikan integral taktentu fungsi f pada $[a,b]$ yaitu $F(x)=(R)\int_a^x f(u)du$ untuk setiap $x\in[a,b]$. Murray R. Spiegel [7] mendefinisikan fungsi kontinu absolut sebagai berikut.

ISBN : 978.602.361.002.0

Definisi 2.1*Fungsi* $f:[a,b]\to\Re$ *dikatakan kontinu absolut* (*absolutely continous*) *pada* $[a,b]$ *ditulis* $f\in AC[a,b]$ *jika untuk setiap bilangan* $\varepsilon>0$ *terdapat bilangan* $\eta>0$ *sehingga untuk setiap baris selang tidak tumpang tindih* $\{(a_i,b_i)\}$ *dengan* $a_i,b_i\in[a,b]$ *dan* $\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)<\eta$ *maka berlaku* $\sum_{i=1}^{\infty}\left|f(b_i)-(a_i)\right|<\varepsilon.$

Hubungan antara konsep fungsi integral taktentu dan fungsi kontinu absolut oleh Murray R. Spiegel [7] diperoleh pernyataan sebagai berikut.

Teorema 2.2 *Jika* $f\in AC[a,b]$ *maka* $f\in C[a,b].$

Teorema 2.3 *Jika f terbatas pada* $[a,b]$, $f\in R[a,b]$ *dan F integral taktentufungsi f pada* $[a,b]$ *maka F kontinu pada* $[a,b].$

Teorema 2.4 *Jika f terbatas pada* $[a,b]$ *dan F integral taktentufungsi f pada* $[a,b]$ *maka* $F'(x)=f(x)$ *di setiap titik kekontinuan* $f(x).$

Teorema 2.5(Teorema Fundamental) *Jika* $f\in R[a,b]$ *dan terdapat fungsi kontinu F pada* $[a,b]$ *dengan* $F'(x)=f(x)$ *untuk setiap* $x\in[a,b]$ *maka* $(R)\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$

Semua teorema di bawah ini telah dibuktikan berdasarkan konsep integral konstruktif Riemann, selanjutnya akan dibuktikan berdasarkan pada konsep integral deskriptif Riemann.

Teorema 2.6 (Gordon [3], Teorema 12.1)*Jika* $F,G:[a,b]\to\Re$ *berturut-turut diferensibel pada* $[a,b]$ *dan* $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$ *kontinu pada* $[a,b]$ *maka* $Fg,\ fG\in R[a,b]$ *dan berlaku* $(R)\int_a^b Fgdx=F(b)G(b)-F(a)G(a)-(R)\int_a^b fGdx$.

Bukti. Menurut hipotesa $G'(x)=g(x)$ kontinu pada $[a,b]$ dan F diferensibel pada $[a,b]$ maka F kontinu pada $[a,b]$. Jadi Fg kontinu pada $[a,b]$ dengan demikian Fg kontinu hampir dimana-mana (h.d) pada $[a,b]$ jadi $Fg\in R[a,b].$ Dengan cara`sama diperoleh $fG\in R[a,b].$ Selanjutnya dibentuk fungsi $H=FG$ dengan $H'=fG+Fg.$ Karena FG diferensibel maka $H=FG$ kontinu pada $[a,b]$. Menurut Teorema 2.5 maka berlaku $(R)\int_a^b H'dx$ = $H(b)-H(a)$ atau $(R)\int_a^b Fgdx=$ $F(b)G(b)-F(a)G(a)-(R)\int_a^b fGdx$. Dengan demikian teorema terbukti. □

Teorema 2.7 (Herbert S. Gaskill and Narayanaswami P.P [4], Teorema 5.5.5)*Jika* $F,G:[a,b]\to\Re$ *berturut-turut diferensibel pada* $[a,b]$ *dan*

ISBN : 978.602.361.002.0

$F'(x) = f(x) \in R[a,b]$, $G'(x) = g(x) \in R[a,b]$ *maka berlaku* $(R)\int_a^b Fgdx =$ $F(b)G(b) - F(a)G(a) - (R)\int_a^b fGdx$.

Bukti: Sejalan dengan Teorema 2.6. □

Teorema 2.8 (Parzynski [9], Problem 6.27)*Jika* $F,G:[a,b] \to \Re$ *berturut-turut diferensibel pada*$[a,b]$ *dan* $F',G' \in R[a,b]$ *maka* $Fg, fG \in R[a,b]$ *dan berlaku* $(R)\int_a^b Fgdx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - (R)\int_a^b fGdx$.

Bukti: Sejalan dengan Teorema 2.6. □

Teorema 2.9 (Gordon [3], Teorema 12.3)*Jika* $f,g \in R[a,b]$ *dengan* F,G *berturut-turut integral taktentu fungsi f,g pada* $[a,b]$ *maka* $Fg, fG \in R[a,b]$ *dan berlaku* $(R)\int_a^b Fgdx = F(b)G(b) - (R)\int_a^b fGdx$.

Bukti: Menurut hipotesa $g \in R[a,b]$ dengan $G = (R)\int_a^x gdx$ integral taktentu fungsi *g* pada $[a,b]$, sehingga $G(a) = 0$ dan menurut Teorema 2.3 maka *G* kontinu pada $[a,b]$, sehingga G kontinu hampir dimana-mana (h.d) pada $[a,b]$berakibat $G \in R[a,b]$.Karena $f \in R[a,b]$ maka $fG \in R[a,b]$, dan dengan jalan yang sama diperoleh $Fg \in R[a,b]$.Selanjutnya dibentuk fungsi $H = FG$ dan berlaku $H' = fG + Fg$ dengan $F'G = fG$ dan $FG' = Fg$ bertutut-turut ada disetiap titik kekontinuan *f* dan *g*. Karena F,G masing-masing integral taktentufungsi *f,g* pada$[a,b]$menurut Teorema 2.3 maka F,G kontinu pada $[a,b]$ berakibat H kontinu pada $[a,b]$.Menurut Teorema 2.5 maka berlaku $(R)\int_a^b H'dx =$ $H(b) - H(a)$atau $(R)\int_a^b Fgdx = F(b)G(b) - (R)\int_a^b fGdx$. Dengan demikian teorema terbukti. □

Teorema 2.10 (Gordon [3], Teorema 12.4)*Diberikan* $f:[a,b]\to\Re$ *dengan* $f\in R[a,b]$ *dan* $G:[a,b]\to\Re$ *dengan* $G\in AC[a,b]$. *Jika* $F=(R)\int_a^x fdx$ *dan* $G'\in R[a,b]$ *maka* $fG\in R[a,b]$ *dan berlaku* $(R)\int_a^b fGdx = F(b)G(b)-(R)\int_a^b Fgdx.$

Bukti: Berdasarkan hipotesa $G\in AC[a,b]$ menurut Teorema 2.2 maka $G\in C[a,b]$, berakibat G kontinu hampir dimana-mana (h.d) pada $[a,b]$ dan berakibat $G\in R[a,b]$. Karena $f\in R[a,b]$ maka $fG\in R[a,b]$. Selanjutnya dibentuk fungsi $H=FG$ dan sesuai bukti Teorema 2.9 maka berlaku $H'=fG+Fg$. Karena F integral taktentu fungsi *f* pada $[a,b]$ maka $F(a)=0$ dan menurut Teorema 2.3 maka F kontinu pada $[a,b]$, jadi H kontinu pada $[a,b]$. Menurut Teorema 2.5 maka berlaku:

$(R)\int_a^b H'dx = H(b)-H(a)$ atau $(R)\int_a^b Fgdx = F(b)G(b)-(R)\int_a^b fGdx$. Dengan demikian teorema terbukti. □

Teorema 2.11 (Burkill J. C. [2], Teorema 6.91) *Jika* $f,g\in R[a,b]$ *dengan* $F(x)=(R)\int_a^x f(u)du+K,\ G(x)=(R)\int_a^x g(u)du+L$ *untuk setiap* $x\in[a,b]$, *K, L konstan berturut-turut integral taktentu dari f,g maka berlaku* $(R)\int_a^b Fgdx =$

$$F(b)G(b)-F(a)G(a)-(R)\int_a^b fGdx.$$

Bukti. Karena fungsi integral taktentu tidak tunggal, dan jika berbeda hanyalah berselisih konstanta, maka *F, G* berturut-turut merupakan integral taktentu fungsi *f, g* pada $[a,b]$. MenurutTeorema 2.3 maka *F, G* kontinu pada pada $[a,b]$. Berakibat *F, G* kontinu hampir dimana-mana (h.d) pada $[a,b]$, jadi $F,G\in R[a,b]$ dengan demikian $fG,Fg\in R[a,b]$. Selanjutnya dibentuk fungsi kontinu $H=FG$. dengan $H'=fG+Fg$. Menurut Teorema 2.5 maka berlaku $(R)\int_a^b Fgdx = F(b)G(b)-(R)\int_a^b fGdx.$ Dengan demikian teorema terbukti. □

3. SIMPULAN

Telah dikenal bahwa fungsi $f:[a,b]\to\Re$ adalah terintegral Riemann pada $[a,b]$ jika dan hanya jika fungsi *f* kontinu hampir dimana-mana (h.d) pada $[a,b]$. Pernyataan tersebut merupakan karakterisasi suatu fungsi dapat terintegral Riemann. Oleh sebab itu pernyataan tersebut dapat diangkat sebagai definisi deskriptif untuk integral Riemann. Sejalan dengan pembahasan integral parsial pada integral konstruktif Riemann, tulisan ini berhasil membahas formula integral parsial pada integral deskriptif Riemann yang tertuang ke dalam Teorema 2.6 sampai dengan Teorema 2.11.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bartle, R. G. 1994. *Introduction to Real Analysis.* Second Edition, John Willey & Sons, Singapore.

[2]Burkill, J.C. 1970. *A Second Course in Mathematical Analysis.* Cambridge University Press, London.

[3]Gordon, R. A. 1999. *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstok.* Graduate Studies in Mathematics, Volume 4, American Mathematical Sosiety.

[4]Herbert S. Gaskill and Narayanaswami P.P. 1998. *Elemen of Real Analysis.* Prentice – Hall, New Yersey.

[5]Jae Myung Park, Deok Ho Lee, Yu Han Yoon, and Hoe Kyung Lee. 2010. The Integration By Parts For The-M_α integral.*Journal of The Chungcheong Mathematical Sosiety,* 23(4), 861-870.

[6]Lee Peng Yee. 1999. *Lanzhou Lectures on Henstock.* World Scientific Publishing Singapore.

[7]Murray R. Spiegel. 1969.*Theory and Problems of Real Variables.* Schaum Outline Series, McGraw-Hill Book Company, New York.

[8] Muslich. Bentuk Integral Parsial Pada Integral Z. *Prosiding, Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika.* Jurusan PMIPA FKIP UNS Surakarta ISBN: 978-602-8580-78-6, Nopember 2012, p.357-361.

[9]Parzynski, W. R. and Zipse, P. W. 1987.*Introduction to Mathematical Analysis.* McGraw-Hill Book Company, Tokyo.

[10] Rudin W. 1976.*Principal of Mathematical Analysis.* Third Edition, McGraw-Hill Book Company, London.