ISBN : 978.602.361.002.0

PENUTUP HIMPUNAN BAYANGAN SEDERHANA PADA PEMETAAN REGULER KUAT DALAM ALJABAR MAKS-PLUS

Abdul Hanif Indra Prasetya, Siswanto, Sri Kuntari
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam UNS
Ahahindrap97@gmail.com, sis.mipauns@yahoo.co.id, kuntari@uns.ac.id

ABSTRAK. Aljabar maks-plus merupakan suatu himpunan $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$, dengan $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan real yang dilengkapi dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$. Identitas operasi maks adalah $\varepsilon = -\infty$ dan identitas operasi plus adalah $e = 0$. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon$ operasi $\oplus$ dan $\otimes$ didefinisikan sebagai $a \oplus b = maks\{a, b\}$ dan $a \otimes b = a + b$. Himpunan matriks berukuran $m \times n$ yang elemen-elemennya merupakan anggota $\mathbb{R}_\varepsilon$ disebut matriks atas aljabar maks-plus dan dinotasikan sebagai $\mathbb{R}_\varepsilon^{m\times n}$. Diberikan sistem persamaan linear $A \otimes x = b$, dengan $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{m\times n}$ dan $b \in \mathbb{R}_\varepsilon^{m}$. Konsep tentang himpunan bayangan sederhana dari suatu pemetaan linear dan matriks reguler kuat terkait dengan konsep tentang sistem persamaan linear. Tujuan penelitian ini adalah untuk mendeskripsikan himpunan bayangan sederhana dan matriks reguler kuat beserta penutup (*closure*) himpunan bayangan sederhana, termasuk kriteria untuk pemetaan reguler kuat. Dari hasil penelitian ini diperoleh pengertian tentang himpunan bayangan sederhana dan kriteria matriks reguler kuat, serta dapat disimpulkan bahwa penutup himpunan bayangan sederhana dari suatu pemetaan linear reguler kuat (matriks) *A* merupakan bayangan iterasi ke-*k* dari matriks *A* setelah matriks *A* dinormalkan.

Kata Kunci: *Aljabar maks-plus; Himpunan bayangan sederhana; Reguler kuat*

1. PENDAHULUAN

Menurut Baccelli *et al.*[2], Aljabar maks-plus didefinisikan sebagai himpunan $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\varepsilon = -\infty$ yang dilengkapi dua operasi biner maksimum ($\oplus$) dan plus ($\otimes$), dimana $a \oplus b = \max(a, b)$ dan $a \otimes b = a + b$. Aljabar maks-plus dinotasikan $\mathbb{R}_{max} = (\mathbb{R}_\varepsilon; \oplus, \otimes)$ dengan identitas operasi maks adalah $\varepsilon = -\infty$ dan identitas operasi plus adalah $e = 0$. Struktur aljabar maks-plus adalah semiring. Semiring adalah monoid abelian terhadap operasi $\oplus$ yang dilengkapi dengan operasi $\otimes$ bersifat asssosiatif, distributif terhadap $\oplus$, mempunyai elemen identitas dinotasikan dengan e dan ε adalah elemen penyerap yaitu $\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$. Lebih lanjut, semiring dinotasikan $\mathbb{R}_{max} = (\mathbb{R}_\varepsilon; \oplus, \otimes, \varepsilon, e)$.

Perkembangan yang lebih mutakhir tentang aljabar maks-plus adalah pembahasan mengenai sistem linear. Pada tahun 2000, Butkovic [3] mempublikasikan artikel yang membahas tentang matriks regular kuat dan himpunan bayangan sederhana pada pemetaan linear (maks,+). Selanjutnya pada tahun 2003, Butkovic [5] menunjukkan bahwa terdapat hubungan antara kombinatorik dan aljabar maks-plus. Kemudian pada tahun 2010, Tam [10] mempublikasikan tesisnya yang memuat sistem linear dalam aljabar maks-plus, matriks regular kuat, dan himpunan bayangan. Butkovic [3] dan Tam [10] menyebutkan bahwa pemetaan linear dalam aljabar maks-plus memiliki keterkaitan dengan matriks regular kuat dan himpunan bayangan. Selanjutnya dalam makalah ini dikaji ulang pemetaan linear, termasuk didalamnya himpunan bayangan sederhana, mulai dari kriteria sampai dengan matriks regular kuat yang telah dikaji oleh Butkovic [3]. Lebih lanjut, diberikan juga pembuktian yang belum dijelaskan dari teorema.

1.1 Struktur Aljabar Maks-Plus

Aljabar maks-plus didefinisikan sebagai himpunan $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\varepsilon = -\infty$ yang dilengkapi dua operasi biner maksimum ($\oplus$) dan plus ($\otimes$), dimana $a \oplus b = \max(a, b)$ dan $a \otimes b = a + b$. Aljabar maks-plus dinotasikan $\mathbb{R}_{max} = (\mathbb{R}_\varepsilon; \oplus, \otimes)$ dengan identitas operasi maks adalah $\varepsilon = -\infty$ dan identitas operasi plus adalah $e = 0$.

Definisi-definisi dan lema mengenai struktur aljabar maks-plus pada makalah ini mengacu kepada Akian[1], Baccelli *et al*[2], Farlow[8], dan Heidergott[9]

Definisi 1.1.1. *Monoid abelian K adalah suatu himpunan yang dilengkapi dengan operasi* $\oplus$ *bersifat assosiatif dan komutatif serta mempunyai elemen nol dinotasikan dengan* ε .

Definisi 1.1.2. *Semifield adalah suatu semiring dengan operasi* $\otimes$ *invertibel dalam K.= K \{ε}.*

Definisi 1.1.3. *Untuk setiap* $a, b, c \in \mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}, \varepsilon = -\infty$ *berlaku*

a. $a \oplus b = \max(a, b)$,
b. $a \otimes b = a + b$

Lema 1.1.1. *Untuk setiap* $a, b, c \in \mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}, \varepsilon = -\infty$ *berlaku*

a. *asosiatif,* $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$, *dan* $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$,
b. *komutatif,* $a \oplus b = b \oplus a$, *dan* $a \otimes b = b \otimes a$,
c. *distributif,* $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$,
d. *elemen nol,* $a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a$,*dengan* $\varepsilon = -\infty$,
e. *elemen satuan, ,* $a \oplus e = e \oplus a = a$,*dengan e = 0,*
f. *invers terhadap operasi penjumlahan,, jika* $a \neq \varepsilon$ *maka terdapat b tunggal dengan* $a \otimes b = e$,
g. *elemen penyerap* $a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$,
h. *idempoten, ,* $a \oplus A = a$.

Definisi 1.1.4. *Untuk* $a \in \mathbb{R}_\varepsilon$ *dan* $n \in \mathbb{N}$ *berlaku*

ISBN : 978.602.361.002.0

$$a^{\otimes n} = \underbrace{a \otimes a \otimes a \otimes a \otimes \ldots \otimes a}_{n\ kali} = \underbrace{a + a + a + a \ldots + a}_{n\ kali} = n \times a$$

1.2 Matriks dalam Aljabar Maks-Plus

Baccelli [2], Butkovic [3], Farlow [8] dan Cuningham-Green [6] telah membahas beberapa definisi yang terkait dengan matriks dalam aljabar maks-plus, yang digunakan dalam penelitian ini.

Definisi 1.2.1. Himpunan matriks berukuran $n \times m$ dalam aljabar mask-plus dituliskan engan $\mathbb{R}_{max}^{n\times m}$, yaitu $\mathbb{R}_{max}^{n\times m} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in \mathbb{R}_{max} \right) \right\}$ Elemen baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dari matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times m}$ dinyatakan oleh a_{ij} atau $[A]_{ij}$.

Definisi 1.2.2. *Untuk matriks A,B* $\in \mathbb{R}_{max}^{n\times m}$ *didefinisikan* $A \oplus B$, *dengan* $[A\oplus B]_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \max\,[a_{ij}, b_{ij}]$

Definisi 1.2.3. Untuk $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times k}$, $B \in \mathbb{R}_{max}^{k\times m}$ dapat didefinisikan $A\otimes B$ dengan $[A\otimes B]_{ij} = \max\limits_{i,j \in \{1,2,3,..\}} [a_{ij} + b_{ji}]$

Definisi 1.2.4. Transpose dari matriks *A* ditulis A^T dan didefinisikan $[A^T]_{ij} = [A]_{ji}$.

Definisi 1.2.5. Suatu matriks pada $\mathbb{R}_{max}$ disebut positif jika semua elemennya adalah positif. Demikian pula untuk matriks negatif, non positif dan non negatif.

Definisi 1.2.6. Matriks identitas dalam $\mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ didefinisikan $[E_n]_{ij} = \begin{cases} e, & jika\ i = j \\ \varepsilon, & jika\ i \neq j \end{cases}$

Definisi 1.2.7. Untuk sebarang matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times m}$ dan $\alpha \in \mathbb{R}_{max}$, $\alpha \otimes A$ didefinisikan oleh $[\alpha \otimes A]_{ij} = \alpha \otimes [A]_{ij}$.

Definisi 1.2.8. Untuk suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ dan bilangan bulat positif *k*, berlaku $A^{\otimes k} = A \otimes A \otimes \ldots \otimes A$ sebanyak *k* kali, $A^{\otimes 0} = E_n = I$ untuk $k = 0$.

Definisi 1.2.9. Didefinisikan himpunan $\mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ dilengkapi dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{max}^{n\times n} = (\mathbb{R}_{max}^{n\times n}, \oplus, \otimes)$.

Definisi 1.2.10. Suatu matriks persegi $D \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ disebut diagonal, dinotasikan dengan $D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ jika elemen diagonalnya adalah $d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ dan elemen yang lain ε.

Definisi 1.2.11. Matriks permutasi adalah matriks dengan setiap baris dan setiap kolom memuat tepat satu elemen jumlahnya sama dengan ε dan semua elemen yang lain jumlahnya sama dengan ε. Jika $\sigma: \{1, 2, \ldots, n\} \rightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ adalah permutasi maka dapat didefinisikan matriks permutasi $P_\sigma = [p_{ij}]$ dengan

$$[E_n]_{ij} = \begin{cases} e, jika\ i = \sigma(j) \\ \varepsilon, jika\ i \neq \sigma(j) \end{cases}$$

Jadi, kolom ke-j pada P_σ adalah e dalam baris ke- $\sigma(j)$.

ISBN : 978.602.361.002.0

Definisi 1.2.12. Misalkan $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ dan $B = (b_{ij})$, A adalah matriks permutasi umum jika dan hanya jika ada
$A \otimes B = I = B \otimes A$
Definisi 1.2.13. Suatu matriks persegi *A* dan *B* memiliki orde yang sama jika berlaku $A = P \otimes B \otimes Q$ pada sejumlah matriks permutasi *P* dan *Q*. Matriks persegi *A* dan *B* yang memiliki orde yang sama dinotasikan dengan $A \sim B$.
Definisi 1.2.14. *Matriks* $A \in \mathbb{R}_{maks}^{n\times n}$ adalah *normal* jika elemen-elemen selain elemen diagonalnya adalah non-positif dan semua elemen diagonalnya adalah nol.
Definisi 1.2.15. *Matriks* $A \in \mathbb{R}_{maks}^{n\times n}$ adalah *strictly normal* jika elemen-elemen selain elemen diagonalnya adalah negatif dan semua elemen diagonalnya adalah nol.
Definisi 1.2.16. Misalkan $A \in \mathbb{R}_{maks}^{n\times n}$. Matriks $\hat{A}$ adalah matriks yang berasal dari A dan semua elemen diagonalnya diganti dengan $\varepsilon = -\infty$.
Definisi 1.2.17. Misalkan $A \in \mathbb{R}_{maks}^{n\times n}$ dan *k* adalah bilangan bulat positif. Matriks $A^{[k]} = I \oplus A \oplus A^2 \oplus \dots \oplus A^k$.
Teorema 1.2.18. Sistem $A \otimes x = b$ memiliki satu solusi tunggal jika dan hanya jika matriks $C = (a_{ij} \otimes b_i^{-1})$ memiliki tepat satu kolom maksimum pada setiap baris dan kolom serta terdapat satu permutasi $\pi \in P_n$ sedemikian sehingga $c_{\pi(j),j} > c_{ij}$ untuk setiap *j* dan setiap $i \neq \pi(j)$.
Definisi 1.2.19. Misalkan $A \in \mathbb{R}_{maks}^{m\times n}$ adalah suatu matriks yang memiliki paling sedikit satu elemen berhingga pada setiap baris. Matriks A disebut R-astic baris.
Definisi 1.2.20. Misalkan $A \in \mathbb{R}_{maks}^{m\times n}$ adalah suatu matriks yang memiliki paling sedikit satu elemen berhingga pada setiap kolom. Matriks A disebut R-astic kolom.
Definisi 1.2.21. Matriks A disebut doubly R-astic jika matriks A adalah R=astic baris dan R-astic kolom.

1.3 Graf dalam Aljabar Maks-Plus

Telah dibicarakan oleh Chartrand dan Lesniak [7], Cuningham-Green [6], dan Farlow [8] tentang graf dan digraf. Adapun definisi graf dan digraf beserta elemen-elemennya sebagai berikut.
Definisi 1.3.1. Misalkan objek-objek disebut *node* dan pasangan tidak berurutan dari node-node disebut dengan *edge*. Graf adalah himpunan tak kosong berhingga dari node-node dan himpunan edge (dimungkinkan kosong).
Definisi 1.3.2. Graf berarah D_A adalah himpunan tak kosong berhingga dari node-node bersama dengan himpunan (dimungkinkan kosong) *arcs* (edge berarah). Seperti dalam graf, himpunan node graf berarah D_A dinotasikan dengan $V(D)$ dan himpunan arcs dinotasikan dengan $E(D)$.
Definisi 1.3.3. Path adalah barisan node (N_{i1}, N_{1p}) sedemikian sehingga berlaku (N_{it}, N_{it+1}) dengan $t = 1, \dots, p-1$ dan $p \geq 2$.

ISBN : 978.602.361.002.0

Definisi 1.3.4. Misalkan $D_A = V(E)$ adalah suatu graf berarah, $\sigma = (v_1, .., v_p)$ disebut cycle jika σ adalah suatu path, $v_1 = v_p$ dan $p > 1$. Cycle mempunyai panjang $p - 1$. Suatu loop adalah cycle $\sigma = (v_1, .., v_p)$ dengan $v_1 = v_p$ dan memiliki panjang *l*.

Definisi 1.3.5. Misalkan $A \in \mathbb{R}_{maks}^{n \times n}$, graf komunikasi A adalah G_A dengan vertices $I = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ dan arcs $E = \{(i,j) | a_{ij} \neq \varepsilon\}$. Untuk $(i,j) \in E$ dengan $i, j = 1, 2, \ldots, n$, bobot arcs adalah a_{ij}.

Definisi 1.3.6. Barisan $\pi = (i_i, \ldots, i_p)$ adalah lintasan pada G_A dengan bobot π adalah $w(\pi, A)$ untuk *p > 1* dan ε untuk *p = 1*. Simbol $\lambda(A)$ adalah rata-rata cycle maksimum dari A, yaitu jika G_A memuat sekurang-kurangnya satu cycle maka

$$\lambda(A) =_{\sigma}^{maks} \mu(\sigma, A)$$

dengan nilai maksimum dihitung untuk semua cycle pada G_A dan

$$\mu(\sigma, A) = \frac{w(\sigma, A)}{k}$$

Menunjukkan rata-rata cycle $\sigma = (i_1, \ldots, i_k, i_k)$ dengan $w(\sigma, A)$ bobot cycle dan k adalah panjang cycle.

Definisi 1.3.7. Path dasar adalah path yang tidak memuat pengulangan node.

Definisi 1.3.8. Cycle adalah path dengan $N_{i1} = N_{1p}$.

Definisi 1.3.9. Cycle dasar adalah cycle yang tidak mengulang node, kecuali node awal.

2. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan makalah ini adalah studi literatur yaitu dengan mengumpulkan referensi berupa jurnal-jurnal, buku-buku maupun tulisan-tulisan yang dimuat pada situs website yang menyajikan beberapa sejumlah definisi dan teori-teori mengenai aljabar maks-plus yang berkaitan dengan himpunan bayangan sederhana dan pemetaan reguler kuat. Dengan metode studi literatur diharapkan penulis dapat memberikan penjelasan yang rinci mengenai himpunan bayangan sederhana dan matriks regular kuat beserta pembuktian teorema-teorema yang terkait dengan keduanya.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini dapat diuraikan sebagai berikut.

1. Memahami sifat-sifat struktur aljabar maks-plus.
2. Mempelajari definisi-definisi dan teorema aljabar maks-plus.
3. Mempelajari dan memahami himpunan bayangan sederhana.
4. Mempelajari dan memahami pemetaan reguler kuat.
5. Menyajikan ulang deskripsi himpunan bayangan sederhana, dari kriteria untuk pemetaan regular kuat.
6. Membuktikan penutup himpunan bayangan sederhana dari suatu pemetaan reguler kuat (matriks) *A*.

   .

3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

ISBN : 978.602.361.002.0

3.1 Himpunan Bayangan Sederhana dan Matriks Reguler Kuat

Pada penelitian ini disumsikan bahwa $\xi = (\mathbb{R}, \otimes, \preceq)$ adalah suatu orde linear nontrivial, gup komutatif dengan elemen netral *e* dan $\mathbb{R}$ adalah tak berhingga. Definisi, lema dan teorema yang digunakan pada subbab ini mengacu kepada Butkovic [3] dan Tam [10]. Pada subbab ini dibahas tentang definisi dan teorema yang terkait dengan kriteria untuk reguler kuat pada himpunan bayangan sederhana.

Definisi 3.1.1. *Misalkan* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *maka* $Im(A) = \{A \otimes x | x \in \mathbb{R}^n\}$ *adalah himpunan bayangan* (image set) *dari A.*

Pada suatu pemetaan $f: X \to Y$, yang dituliskan dengan secara matematis dengan $S_f = \{y \in Y; (\exists! x \in X) f(x) = y\}$, himpunan S_f dinamakan dengan himpunan bayangan sederhana. Jika pemetaan $f: x \mapsto A \otimes x$ maka himpunan S_f dituliskan sebagai S_A. Definisi dari himpunan bayangan sederhana diberikan oleh Tam [10].

Definisi 3.1.2. (Tam[10]) *Misalkan* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. *Himpunan* $S_A = \{b \in \mathbb{R}^n | A \otimes x = b \; mempunyai \; penyelesaian \; tunggal\}$ *disebut himpunan bayangan sederhana* (simple image set) *dari A.*

Teorema 3.1.1 *Untuk* $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n\times n}$ *dan* $\pi \in P_n$ *, dengan* P_n *merupakan himpunan seluruh permutasi dari himpunan* $N = \{1, \dots, n\}$, *didefinisikan bobot dari permutasi* π *pada matriks* A *adalah*

$$w(A,\pi) = \prod_{i\in N}^{\otimes} a_i, \pi_{(i)} = a_1, \pi_1 \otimes a_2, \pi_2 \otimes \dots \otimes a_n, \pi_n$$

dan nilai permanen dari matriks A *dinotasikan dengan*

$$maper(A) = maks_{\pi\in P_n} w(A,\pi) = \sum_{\pi\in P_n}^{\oplus} w(A,\pi)$$

Definisi 3.1.3. *Matriks* $A \in \mathbb{R}_{maks}^{n\times n}$ adalah *definit* jika elemen-elemen selain elemen diagonalnya adalah nol dan tidak ada cycle dengan bobot positif pada digraf associated.

Definisi 3.1.4. *Vektor-vektor* $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}_\varepsilon^m$ *bebas linear kuat jika terdapat suatu* $b \in \mathbb{R}^m$ *sedemikian sehingga* b *dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linear dari* $A_1, \dots, A_n$ *secara tunggal.*

Definisi 3.1.5. *Untuk vektor-vektor* $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}_\varepsilon^m$ *yang bebas linear kuat, misalkan* $m = n$ *maka matriks* $A = (A_1, \dots, A_n)$ *disebut reguler kuat.* Dengan $ap(A) = \{\sigma \in P_n; w(A,\sigma) = \max_{\pi\in P_n} w(A,\pi)\}$ dan $w(A,\pi) = \sum_{i\in N} a_{i,\pi(i)}, \forall \pi \in P_n$.

Definisi 3.1.6. *Jika matriks* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *maka didefinisikan* $V_A(g) = \{v; A \otimes v \leq g \otimes v\}$.

Definisi 3.1.7. *Diberikan matriks* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *reguler kuat dan definit, maka penutup dari himpunan bayangan sederhana matriks* A *adalah* A.

Teorema 3.1.2. Misalkan $A \sim B$. Matriks A adalah matriks reguler kuat jika dan hanya jika B adalah matriks reguler kuat.

Bukti:

Ambil matriks diagonal $P = diag\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ dan $Q = diag\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$. Berdasarkan definisi telah diketahui jika matriks A dan B memiliki orde yang sama ($A \sim B$) maka matriks $A = P \otimes B \otimes Q$ pada permutasi matriks P dan Q. karena B adalah matriks reguler kuat

ISBN : 978.602.361.002.0

maka matriks B memiliki solusi tunggal, sehingga terdapat satu permutasi maksimum, misalkan *id*, yang lebih besar daripada permutasi yang lain. Karena *id* adalah permutasi maksimum, maka untuk setiap $\sigma \in P_n - \{id\}$ diperoleh

$$w(B,id) > w(B,\sigma) \Leftrightarrow \prod_{i\in N}^{\otimes} b_i, id_{(i)} > \prod_{i\in N}^{\otimes} b_i, \sigma_{(i)}$$

$$\Leftrightarrow \prod_{i\in N}^{\otimes} p_i \otimes b_i, id_{(i)} \otimes q_i > \prod_{i\in N}^{\otimes} p_i \otimes b_i, \sigma_{(i)} \otimes q_i$$

Karena diketahui bahwa $A \sim B$, maka

$$\Leftrightarrow w(B,id) > w(A,\sigma) \blacksquare$$

Terbukti bahwa matriks A adalah reguler kuat jika dan hanya jika B adalah matriks reguler kuat.

Lema 3.1.1. *Misalkan* $A, B \in \mathbb{R}_{maks}^{n\times n}$*. Jika* $A \sim B$ *maka ap(A) = ap(B)*

Bukti: Ambil matriks diagonal $P = diag\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ dan $Q = diag\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$. Berdasarkan definisi telah diketahui jika matriks A dan B memiliki orde yang sama ($A \sim B$) maka matriks $A = P \otimes B \otimes Q$ pada permutasi matriks P dan Q. berarti

$$ap(A) = \{\pi \in P_n | per(A) = w(A,\pi)\}$$

$$= \left\{\pi \in P_n | per(A) = \prod_{i\in N}^{\otimes} a_{i,\pi(i)}\right\}$$

$$= \left\{\pi \in P_n | per(A) = \prod_{i\in N}^{\otimes} (p_i \otimes b_{i,\pi(i)} \otimes q_i)\right\}$$

$$= \left\{\pi \in P_n | per(A) = \prod_{i\in N}^{\otimes} p_i \otimes \prod_{i\in N}^{\otimes} b_{i,\pi(i)} \otimes \prod_{i\in N}^{\otimes} q_i\right\}$$

$$= \left\{\pi \in P_n | per(A) = \prod_{i\in N}^{\otimes} p_i \otimes per(B) \otimes \prod_{i\in N}^{\otimes} q_i\right\}$$

Karena $\pi \in P_n$ yang memenuhi *per(A)* sama dengan $\pi \in P_n$ yang memenuhi *per(B)* maka *ap(A) = ap(B)*. ■

Teorema 3.1.3. Diberikan $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n\times n}$, maka $S_A = \{v; \tilde{A} \otimes v \le g \otimes v \; untuk \; g < e\}$ dan pada sejumlah kasus tertentu *A* adalah reguler kuat $\Leftrightarrow (\exists g < e)\{= \{v; \tilde{A} \otimes v \le g \otimes v\} \ne \emptyset$

Definisi 3.1.8. *Diberikan* $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n\times n}$ *, Matriks* $\tilde{A}$ *adalah matriks* A *dengan semua elemen diagonalnya diganti dengan* $\boldsymbol{\varepsilon}$.

ISBN : 978.602.361.002.0

Teorema 3.1.4. Misalkan $A \in \mathbb{R}_{maks}^{n\times n}$ definit, maka $A^* = \tilde{A}^*$.

Teorema 3.1.5. *Misalkan $A \in \mathbb{R}_{maks}^{n\times n}$ adalah matriks definit. Matriks A memiliki permanen kuat jika dan hanya jika setiap bobot cycle di $\tilde{A}$ adalah negatif.*

Bukti*:* Setiap permutasi yang berbeda dri identitas merupakan perkalian dari cycle terkecil. Salah satu cycle terebut memiliki panjang duat atau lebih. Oleh karena A memiliki permanen kuat jika dan hanya jika semua cycle di D_A dengan panjang dua atau lebih, memiliki bobot negatif jika dan hanya jika semua cycle di D_A memiliki bobobt negatif. ■

Teorema 3.1.6 Misalkan $A \in \mathbb{R}_{maks}^{n\times n}$ dan tidak ada cycle positif di D_A maka $A^{[k]}$ adalah matriks yang sama untuk setiap $k \geq n-1$ (dinotasikan dengan A^{θ}). Lebih lanjut, jika semua elemen dari matriks *A* adalah 0, maka $A^{\theta} = A^k$ untuk setiap $k \geq n-1$. Persoalan ini benar, terutama untuk matriks normal.

Bukti:

Suatu elemen (*i*,*j*) dari A^k adalah maksium $_{r1,\ r2,\ldots,rk1}a_{ir1} \otimes a_{r1r2} \otimes \ldots \otimes a_{rk-1j}$ dan dapat ditafsirkan sebagai panjang dari *path* yang terpanjang dari node *i* ke node *j* dengan menggunakan $k-1$ *intermediate node*. Elemen yang sama di $A^{[k]}$ adalah panjang dari *path* yang terpanjang dari node *i* ke node *j* dengan menggunakan $k-1$ *intermediate node*. Misalkan $i \neq j$ maka panjang maksimum dari *path* tidak dapat ditambah dengan menggunkan lebih dari $n-2$ *intermediate node*. Hal ini karena dapat mengakibatkan pengulangan node.
Jadi agar panjang maksimum dari *path* dapat ditambah dengan menggunakan kurang dari $n-2$ *intermediate node*, cycle yang dipakai harus berbobot nol atau negatif. Jika $i = j$ maka elemen (*i*,*j*) di semua matiks $A^{[k]}$ adalah panjang dari suatu cycle nonpositif dan di semua $A^{[k]}$ adalah nol, akibat matriks identitas *I*. jika semua elemen diagonal dari *A* sama dengan *e*, maka berakibat $I \leq A$, $A \leq A^2 \leq \cdots$. Jadi untuk setiap *k* berlaku $A^{[k]} = A^k$ untuk setiap $k \geq n-1$. ■

Definisi 3.1.9. *ξ disebut* dense *jika interval terbuka $(a,b) \neq \emptyset$ untuk setiap $a,b \in \mathbb{R}$ dan $a < b$.*

Definisi 3.1.10. *ξ disebut sparse jika ξ tidak dense.*

Definisi 3.1.11. *ξ disebut radicable jika dalam setiap $b \in \mathbb{R}$ dan setiap bilangan bulat positif k terdapat suatu elemen dari b yang memenuhi syarat ukup untuk $b^k = a$, dengan b^k merupakan simbol untuk iterasi $b \otimes b \otimes \ldots \otimes b$, sedemikian sehingga suatu elemen b adalah tunggal dan dituiskan sebagai $\sqrt[k]{a}$.*

Definisi 3.1.12. *ξ siklik jika $\mathbb{R} = \{g^k, k\ kali\}$ untuk sejumlah $g \in \mathbb{R}$, $g < e$ dinamakan dengan pembangkit (generator) dari $\mathbb{R}$.*

Teorema 3.1.7. Misalkan ξ adalah radicable, maka $A \in \mathbb{R}_{maks}^{n\times n}$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku

1. $\lambda(\alpha \otimes A) = \alpha \otimes \lambda(A)$
2. $\lambda(A) \leq e$ jika *A* adalah matriks nonpositif (pada kasus tertentu, *A* adalah matriks normal).

Bukti:

ISBN : 978.602.361.002.0

1. Untuk sembarang $A \in \mathbb{R}_{maks}^{n\times n}$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$
   $\lambda(\alpha \otimes A) =_{\sigma}^{maks} \mu(\alpha \otimes A, \sigma)$
   $=_{\sigma}^{maks} \alpha \otimes \lambda(A, \sigma)$
   $= \alpha \otimes_{\sigma}^{maks} \lambda(A, \sigma)$
   $= \alpha \otimes \lambda(A)$ ■
2. Berdasarkan definisi dari matriks normal, diketahui bahwa suatu matriks adalah normal jika elemen-elemennya adalah nonpositif dan semua elemen diagonalnya adalah nol. Karena elemen-elemen dari matriks *A* adalah nonpositif secara otomati nilai eigen (simbol $\lambda(A)$) juga nonpositif. ■

3.2 PENUTUP HIMPUNAN BAYANGAN SEDERHANA

Teorema 3.2.1. Jika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ adalah definit dan reguler kuat, maka $cl(S_A) = Im(A^*)$ (=$Im(A^k)$ untuk setiap $k \geq n-1$). Dengan cara yang sama, penutup himpunan bayangan sederhana dari suatu matrik definit dan reguler kuat adalah himpunan dari titik tetapnya.

Bukti: pembuktian teorema 3.2.1 berdasarkan pada tiga lema, yaitu:

Lema 3.2.1. Jika $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dan Jika $\lambda(B) \leq 0$ maka Jika $Im(B) = \{v; B \otimes v \leq v\} = V_B(0)$.

Bukti: *B* tidak memiliki cycle positif. Jika $v = B^* \otimes w$ maka (lihat teorema 3.1.6) $B \otimes v = B \otimes B^* \otimes w = (B \oplus ... \oplus B^n) \otimes w \leq (I \oplus B \oplus ... \oplus B^n) \otimes w = B^* \otimes w = v$. Jika $B \otimes v \leq v$ maka $v \geq B \otimes v \geq B^2 \otimes v \geq \cdots \geq B^{n-1} \otimes v$. Karena itu $v \geq B^* \otimes v$. Dengan kata lain, $B^* \geq 1$, lebih lanjut $B^* \otimes v \geq v$, diperoleh bahwa $B^* \otimes v = v$ dan juga $v \in Im(B^*)$.

Lema 3.2.2. Jika $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dan $\lambda(c) \leq \gamma < 0$ maka $V_C(\gamma) = Im(\gamma^{-1} \otimes C)^*$

Bukti: Berdasarkan lema 3.1.2 dengan menggunakn $B = \gamma^{-1} \otimes C$ dan $\lambda(B) = \gamma^{-1} \otimes \lambda(c)$ (lihat teorema 3.1.7)

Lema 3.2.3. Jika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ adalah definit dan reguler kuat, maka $Im(A)^* = cl(\bigcup_{\lambda(\breve{A}) \leq g < 0} Im(g^{-1} \otimes \breve{A})^*)$

Bukti: Jika $\lambda(\breve{A}) \leq g < 0$ maka dengan lema 3.1.3, teorema 3.1.3 dan lema 3.1.2 diperoleh $Im(g^{-1} \otimes \breve{A})^* = V_g \subseteq V_0 = Im(\breve{A}^*)$. Inklusi $\supseteq$ pada lema 3.1.4 sekarang mengikuti karena $Im(\breve{A}^*)$ tertutup (lihat lema 3.1.3). Andaikan sekarang

$$v = \breve{A}^* \otimes x = x \oplus \breve{A} \otimes x \oplus ... \oplus \breve{A}^{n-1} \otimes x$$

Himpunan $g_k = \left(\frac{1}{k}\right) \lambda(\breve{A})$ untuk $k \geq 1$, integer dan

$V_{g_k} = x \oplus (g_k^{-1} \otimes \breve{A}) \otimes x \oplus ... \oplus (g_k^{-1} \otimes \breve{A})^{n-1} \otimes x$ maka $V_{g_k} = (g_k^{-1} \otimes \breve{A})^* \otimes x \in Im(g_k^{-1} \otimes \breve{A})$ dan $\lambda(\breve{A}) \leq g_k < 0$ untuk setiap *k*. karena itu, $V_{g_k} \in \bigcup_{\lambda(\breve{A}) \leq g < 0} Im(g^{-1} \otimes \breve{A})^*$ untuk setiap *k* dan $V_{g_k} \to V(k \to \infty)$.

Bukti Teorema 3.2.3.: Ingat bahwa $\lambda(\breve{A}) < 0$ karena ξ adalah radicable dan $A \in G^{n\times n}$ adalah matrik definit maka *A* adalah matrik reguler kuat jika dan hanya jika $\lambda(\breve{A}) < e$. Berdasarkan teorema 3.1.3, 3.1.4, dan 3.1.2 maka

$$S_A \subseteq \{x; \breve{A} \otimes x \leq x\} = Im(\breve{A}^*) = Im(A^*).$$

ISBN : 978.602.361.002.0

$Im(A^*)$ tertutup dan oleh karena itu $cl(S_A) \subseteq Im(A^*)$. Ambil sembarang $z \in Im(g^{-1} \otimes \breve{A})^*$, dan $\lambda(\breve{A}) \leq g < 0$. Berdasarkan teorema 3.1.4 dan lema 3.1.4, yang dimana kedua torema tersebut merupakan syarat cukup untuk membuktikan bahwa $z \in S_A$. Dengan menggunakan lema 3.3.2 diperoleh hasil

$$Im(g^{-1} \otimes \breve{A})^* = \{v; \breve{A} \otimes v \leq g \otimes v\}$$

Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa $\breve{A} \otimes z \leq g \otimes z$ dan hasil akhirnya akan diperoleh dengan menggunakan teorema 3.1.3 ■

Akibat teorema 3.2.1 dan 3.2.2 adalah jika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ adalah matrik reguler kuat, Q adalah suatu matrik permutasi, dan $A \otimes Q$ adalah definit, maka $cl(S_A) = Im(A \otimes Q)^k$ untuk setiap $k \geq n - 1$. Secara ekuivalen, penutup dari himpunan bayangan sederhana adalah suatu matrik reguler kuat *A* adalah himpunan titik tetap dari matrik *A* yang diperoleh dengan normalisasi.

4 SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut.

1. Untuk $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ adalah matrik reguler kuat, Q adalah suatu matrik permutasi, dan $A \otimes Q$ adalah definit, maka $cl(S_A) = Im(A \otimes Q)^k$ untuk setiap $k \geq n - 1$.
2. Penutup dari himpunan bayangan sederhana adalah suatu matrik reguler kuat *A* adalah himpunan titik tetap dari matrik *A* yang diperoleh dengan normalisasi.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Akian, M., G. Cohen, S. Gaubert, J.P. Quadrat and M. Viot, *Max-Plus Algebra and Applications toSystem Theory and Optimal Control*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (1994), 1502-1511.

[2] Baccelli, F., G. Cohen, G.J. Olsder, and J.P. Quadrat. 1992. *Synchronization and Linearity, An Algebra for Discrete Event System*. Boston: John Wiley and Sons Inc.

[3] Butkovic, P., *Simple Image Set of (max,+) Linear Mappings*, Discrete Applied Mathematics (2000), no. 105, 73-86.

[4] Butkovic, P., *Strong Regularity of Matrices-A Survey of Results*, Discrete Applied Math. 48 (1994), 45-68.

[5] Butkovic, P., *Max-Algebra: The Linear Algebra of Combinatorics?*, Linear Algebra and Application 367 (2003), *313-335.*

ISBN : 978.602.361.002.0

[6] Butkovic, P. and R.A. Cunninghame-Green, *On Matrix Power in Max-Algebra*, Linear Algebra and Its Applications (2007), no. 421, 370-381.

[7] Chartrand, G. and L. Lesniak. 1979. *Graph and Digraph, second ed.*, California: Wadsworth Inc.

[8] Farlow, K.G., *Max-Plus Algebra, Master's Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polythecnic Institute and State University in Partial fulfillment of the requirements for the degree of Masters in Mathematics*, 2009.

[9] Heidergott, B. *Max-Plus Algebra and Queues*, Master Thesis, Vrije Universitetit, 2005.

[10] Tam, K.P., *Optimizing and Approximating Eigen Vectors in Max-Algebra*, Ph.D. thesis, University of Birmingham, 2010.