MATRIKS INVERS TERGENERALISIR

Tasari
Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Widya Dharma Klaten

ABSTRAK

Tujuan penelitian ini adalah : (1) untuk mengetahui pengertian invers tergeneralisir dari suatu matriks, (2) untuk menentukan invers tergeneralisir dari suatu matriks.

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur, yakni semua bahan diambil dari buku referensi yang mendukung, yaitu tentang matriks invers tergeneralisir.

Berdasarkan pembahasan dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Invers tergeneralisir dari sebuah matriks A adalah sebarang matriks G yang memenuhi persamaan $AGA = A$;
2. Untuk menentukan invers tergeneralisir dari suatu matriks A dapat dilakukan dengan beberapa cara, yaitu:
   a. Menentukan matriks P dan matriks Q dari matriks tersebut dengan cara operasi elementer, matriks P dicari dengan menggunakan operasi elementer baris, sedangkan matriks Q dicari dengan menggunakan operasi elementer kolom. Setelah matriks P dan matriks Q diketahui, diterapkan reduksi ke bentuk diagonal yang ditulis $PAQ = \Delta$. Analog dengan Δ didefinisikan Δ^- (Δ minus) yang dinyatakan dengan $\Delta^- = Q^{-1}A^{-1}P^{-1}$. Untuk menentukan matriks G dicari dengan $G = Q\Delta^-P$, matriks G merupakan invers tergeneralisir dari matriks A dimana $AGA = A$.
   b. Menentukan invers tergeneralisir dari matriks A, bila A simetris dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut:
      – Tentukan M, minor utama non singular ordo r dari matriks A, dimana $r(A) = r$;
      – Tentukan M^{-1};
      – Ganti setiap elemen M dalam A dengan elemen yang bersesuaian dalam M^{-1};
      – Ganti semua elemen lainnya dalam A dengan 0;
      – Diperoleh G invers tergeneralisir dari matriks A.

I. PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Untuk menentukan invers dari suatu matriks dapat dilakukan dengan berbagai cara, seperti menentukan invers matriks dengan adjoint, menentukan invers matriks dengan Metode Counter (operasi elementer) dan menentukan invers matriks dengan partisi. Selain cara-cara tersebut di atas ada cara lain yang dibahas dalam buku yang berjudul ***Matrix Algebra and its Aplications to Statistics and Econometrics*** dan ***Linear Models*** yakni tentang cara menentukan invers tergeneralisir dari suatu matriks. Oleh karena itu, pada kesempatan ini peneliti tertarik untuk mengangkat judul "*Matriks Invers Tergeneralisir*".

B. Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, maka peneliti merumuskan permasalahan sebagai berikut:

1. Apa pengertian invers tergeneralisir dari suatu matriks?
2. Bagaimana cara menentukan invers tergeneralisir dari suatu matriks ?

C. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui pengertian invers tergeneralisir dari suatu matriks.
2. Untuk menentukan invers tergeneralisir dari suatu matriks.

II. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur, yakni semua bahan diambil dari buku referensi yang mendukung.

Cara yang digunakan peneliti sehubungan dengan pengumpulan data adalah sebagai berikut:

1. Pengumpulan sumber data

Data diambil dari buku yang berjudul ***Matriks, Pengantar Matriks, Aljabar Linear, Teori-Soal Penyelesaian Aljabar Linear, Teori & Soal Pendahuluan Aljabar Linear, Matrix Algebra and its Applications to Statistic and Econometrics*** dan ***Linear Models.***

2. Pengkajian langsung sumber data

   Setelah data terkumpul kemudian data tersebut dikaji untuk diketahui data-data mana yang dapat dijadikan peneliti sebagai landasan (materi pendukung) dalam pembahasan.

3. Mempelajari data-data yang diperoleh dalam penelitian

III. PEMBAHASAN

Invers tergeneralisir dari sebuah matriks *A* adalah sebarang matriks *G* yang memenuhi suatu persamaan:

$$AGA = A \quad \ldots\ldots(1)$$

Matriks *G* yang terdefinisi pada persamaan (1) tidak tunggal, untuk sebarang matriks *A* yang diberikan.

Untuk menunjukkan keberadaan/eksistensi dan ketidaktunggalan matriks *G*, dimulai dengan bentuk diagonal ekuivalensi dari matriks *A*. Jika *A* berordo *p x q*, reduksi ke bentuk diagonalnya dapat ditulis sebagai berikut:

$$P_{pxp}\, A_{pxq}\, Q_{qxq} = \Delta_{pxq} \equiv \begin{bmatrix} \mathrm{D}_{r\,x\,r} & \mathrm{O}_{r\,x\,(q-r)} \\ \mathrm{O}_{(p-r)\,x\,r} & \mathrm{O}_{(p-r)\,x\,(q-r)} \end{bmatrix}$$

Atau lebih singkatnya dapat ditulis sebagai berikut:

$$PAQ = \Delta = \begin{bmatrix} \mathrm{D}_r & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{bmatrix}$$

dimana *P* dan *Q* merupakan matriks-matriks yang diperoleh dari operasi elementer baris dan operasi elementer kolom dengan $r(A) = r$ dan D_r adalah matriks diagonal yang berordo *r*.

Secara umum apabila $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_r$ adalah elemen-elemen diagonal dari sebarang matriks diagonal *D*, dengan menggunakan notasi $D\{d_i\}$ untuk D_r, dapat dinyatakan:

$$D_r = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_r \end{bmatrix} \equiv \text{diag } \{di\} \text{ untuk i} = 1, 2, \ldots, r \quad \ldots\ldots (2)$$

Selanjutnya seperti dalam Δ, matriks nol akan dinyatakan dengan simbol O, dengan ordo ditentukan oleh konteks.

Penurunan matriks *G* diperoleh dari Δ. Analog dengan Δ, didefinisikan Δ^- (Δ minus) yang dinyatakan sebagai berikut:

Dari $P_{pxp}.A_{pxq}.Q_{qxq} = \Delta$, diperoleh $\Delta^- = Q^{-1}A^{-1}P^{-1}$

dapat dipandang bahwa:

$$G = Q\,\Delta^-\,P \quad \ldots\ldots (3)$$

Dari sini matriks *G* adalah invers tergeneralisir dari matriks *A*.

Pernyataan *G* yang diberikan pada persamaan (3) tidak tunggal, untuk sebarang *P* maupun *Q* yang diberikan; sehingga didapatkan $G = Q\,\Delta^-\,P$ tidak tunggal.

Sebelum ditunjukkan bahwa matriks *G* memenuhi persamaan (1), dari definisi Δ dan Δ^- yang diberikan di atas dapat diperoleh:

$$\Delta\,\Delta^-\,\Delta = \Delta \quad \ldots\ldots (4)$$

Sebagaimana persamaan (1) yaitu $AGA = A$, maka dapat dikatakan bahwa Δ^- merupakan invers tergeneralisir dari Δ. sehingga dari persamaan $PAQ = \Delta$, maka akan diperoleh persamaan baru, yaitu:

$$PAQ = \Delta$$
$$P^{-1}PAQQ^{-1} = P^{-1}\Delta Q^{-1}$$
$$A = P^{-1}\Delta Q^{-1} \quad \ldots\ldots (5)$$

Dimana P^{-1} dan Q^{-1} ada, karena P dan Q merupakan hasil dari operasi elementer. Maka dari definisi (3), (4) dan (5) akan diperoleh:

$$\begin{aligned} AGA &= P^{-1}\Delta Q^{-1}\, Q\Delta^{-} P\, P^{-1}\Delta Q^{-1} \\ &= P^{-1}\Delta\, \Delta^{-}\, \Delta Q^{-1} \\ &= P^{-1}\Delta Q^{-1} \\ &= A \end{aligned}$$

Jadi persamaan tersebut memenuhi persamaan (1) yaitu $AGA = A$, sehingga dapat dikatakan bahwa matriks G merupakan invers tergeneralisir dari matriks A, dan G tidak tunggal.

Contoh 1:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Kita cari P dan Q dengan operasi elementer:

- Untuk P dicari dengan operasi elementer baris:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & | & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} B_1 \leftrightarrow B_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & | & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_3 - 3B_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & | & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -12 & | & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} B_2\text{-}4B_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -18 & | & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -12 & | & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_3 - 2/3B_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -18 & | & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -2/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

- Untuk Q dicari dengan operasi elementer kolom:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \\ \_ & \_ & \_ \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} K_2 - K_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \\ \_ & \_ & \_ \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} K_3 - 6K_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \_ & \_ & \_ \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh,

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\tfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = Q\,\Delta^-\,P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -2/3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -2/3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1/3\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi $AGA = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = A$$

Jadi $G = 1/3\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ adalah invers tergeneralisir dari $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Contoh 2:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 15 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Seperti contoh di atas P dicari dengan operasi elementer baris:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 15 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 5 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; B_1 \leftrightarrow B_2 \; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 15 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 5 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2\text{-}4B_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 15 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -18 & -60 & | & 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -12 & -40 & | & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_3\text{-}2/3B_2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 15 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -18 & -60 & | & 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -2/3 & -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}$

Q dicari dengan operasi elementer kolom:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 15 \\ 0 & -3 & -18 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} K_2\text{-}K_1 \\ \\ K_3\text{-}5K_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -18 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ 1 & -1 & -5 & -15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} K_3\text{-}6K_2 \\ \\ K_4\text{-}20K_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh,

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PBQ = \Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \Delta^{-} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = Q\Delta^{-}P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1/3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi $BGB = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 15 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 15 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 15 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 15 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = B$$

Jadi $G = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ adalah invers tergeneralisir dari $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 15 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

Algoritma

Ada cara lain untuk menghitung *G* yang didasarkan pada rank matriks *A*. Misal rank dari *A* adalah *r* dan *A* dapat dipartisi sehingga didapatkan *r x r* non singular, yaitu:

$$A_{pxq} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Dimana A_{11} berordo *r x r*, sehingga invers tergeneralisir dari matriks *A* adalah:

$$G_{q \times p} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dimana matriks nol mempunyai ordo yang sesuai, sehingga bisa terbentuk *G* dengan ordo qxp. Untuk membuktikan bahwa *G* adalah invers tergeneralisir dari matriks *A* dapat dilihat:

$$AGA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

Matriks *A* dipartisi $[A_{21} \quad A_{22}] = K\,[A_{11} \quad A_{12}]$, untuk suatu matriks *K*. Sehingga $K = A_{21}A_{11}^{-1}$ dan $A_{22} = KA_{12} = A_{21}\,A_{11^{-1}}\,A_{12}$, dan diperoleh $AGA = A$.

Contoh 3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Akan dicari rank dari matriks *A* sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \mathrm{B_2\text{-}3B_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \mathrm{B_3\text{-}B_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rank matriks $A = 2$

Ambil minor pertama dari matriks *A*, dimana $r(A) = 2$

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ \hline 0 & 1 & -13 & -2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{A_{11}} & \mathrm{A_{12}} \\ \hline \mathrm{A_{21}} & \mathrm{A_{22}} \end{array}\right]$$

$$A_{11(2x2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A_{11}^{-1} = \frac{1}{7-6} \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh $G = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Minor ordo *r* non singular tidak harus pada posisi pertama (A_{11}), dari matriks *A* (kecuali apabila *A* simetris).

Misal, diambil ordo *r* non singular, yang bukan minor pertama.

Misal *R* operasi elementer baris yang membawa minor ordo *r* ke posisi pertama, dan *S* operasi elementer kolom yang membawa minor ordo *r* ke posisi pertama, maka *R* dan *S* merupakan hasil dari operasi elementer dimana:

$$RAS = B = \begin{bmatrix} \mathrm{B_{11}} & \mathrm{B_{12}} \\ \mathrm{B_{21}} & \mathrm{B_{22}} \end{bmatrix}$$

dimana B_{11} non singular dengan ordo *r*.

maka diperoleh:

$$F = \begin{bmatrix} \mathrm{B_{11}^{-1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

F merupakan invers tergeneralisir dari matriks *B* dan $G_{qxp} = SFR$ adalah invers tergeneralisir dari *A*.

R dan *S* merupakan hasil dari operasi elementer yang mempertukarkan baris atau kolom. Dengan kata lain *R* dan *S* merupakan matriks identitas dengan baris atau kolom yang berbeda urutan dengan baris atau kolom pada *I*.

R dan *S* dikenal sebagai matriks *permutasi* dan *R* dan *S ortogonal*, yaitu:

R = *I* dengan urutan baris berbeda

= Matriks Permutasi

dan $R'R = I$ …………………………………………………………………………………...… (6)
Analog untuk S. sehingga dari $RAS = B$, dapat diperoleh:
$R'RASS' = R'BS'$

$$A = R'BS' = R'\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} S'$$

Operasi di atas akan mengembalikan B_{11} ke posisi di dalam matriks A. kemudian dapat ditentukan G:

$$G = SFR = (R'F'S')' = \left\{ R' \begin{bmatrix} (B_{11}^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S' \right\}$$

Analog dengan bentuk $A = R'BS'$, hasil yang melibatkan R' dan S' di dalam G', akan mengembalikan elemen $(B_{11}^{-1})'$ ke posisi yang bersesuaian pada G' di mana elemen-elemen dari B_{11} terletak dalam A.

Dari uraian di atas, dapat diberikan ketentuan (cara-cara) dalam menentukan invers tergeneralisir dari matriks A sebagai berikut:

1. Tentukan M, sebarang minor non singular ordo r dari matriks A, di mana $r(A) = r$;
2. Tentukan $(M^{-1})'$;
3. Ganti setiap elemen M dalam A dengan elemen yang bersesuaian dalam $(M^{-1})'$. Contoh: jika $a_{ij} = m_{st}$ elemen ke (s,t) dari M, maka ganti a_{ij} dengan m_{ts}, elemen ke (t,s) dari M^{-1};
4. Ganti semua elemen lainya dalam A dengan 0;
5. Transposekan matriks yang diperoleh;
6. Diperoleh G invers tergeneralisir dari matriks A.

Perlu diperhatikan bahwa cara-cara yang diberikan di atas sebenarnya tidak ekuivalen, untuk A simetris. Oleh karena itu di bawah ini akan diberikan cara-cara menentukan invers tergeneralisir dari matriks A yang lebih sederhana yaitu :

1. Tentukan M, minor utama non singular ordo r dari matriks simetris A, dimana $r(A)=r$;
2. Tentukan M^{-1} ;
3. Ganti setiap elemen M dalam A dengan elemen yang bersesuaian dalam M^{-1};
4. Ganti semua elemen lainnya dalam A dengan 0;
5. Diperoleh G invers tergeneralisir dari matriks A.

IV. PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan di depan dapat ditarik beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Invers tergeneralisir dari sebuah matriks A adalah sebarang matriks G yang memenuhi persamaan $AGA = A$.
2. Untuk menentukan invers tergeneralisir dari suatu matriks A dapat dilakukan dengan beberapa cara, yaitu:
   a. Menentukan matriks P dan matriks Q dari matriks tersebut dengan cara operasi elementer, matriks P dicari dengan menggunakan operasi elementer baris, sedangkan matriks Q dicari dengan menggunakan operasi elementer kolom. Setelah matriks P dan matriks Q diketahui, diterapkan reduksi ke bentuk diagonal yang ditulis $PAQ = \Delta$. Analog dengan Δ didefinisikan Δ^{-}(Δ minus) yang dinyatakan dengan $\Delta^{-} = Q^{-1}A^{-1}P^{-1}$. Untuk menentukan matriks G dicari dengan $G = Q\Delta^{-}P$, matriks G merupakan invers tergeneralisir dari matriks A dimana $AGA = A$.
   b. Menentukan invers tergeneralisir dari matriks A, bila A simetris dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut:
      - Tentukan M, minor utama non singular ordo r dari matriks A, dimana $r(A) = r$;
      - Tentukan M^{-1};
      - Ganti setiap elemen M dalam A dengan elemen yang bersesuaian dalam M^{-1};
      - Ganti semua elemen lainnya dalam A dengan 0;

- Diperoleh *G* invers tergeneralisir dari matriks *A*.

B. Saran

Pada penelitian ini, peneliti hanya membahas tentang invers tergeneralisir dari suatu matriks. Bagi pembaca yang tertarik dengan topik aljabar dapat melanjutkan pembahasan tentang invers penrose dan jenis-jenis invers yang lain serta penerapannya dalam penyelesaian sistem persamaan linier.

DAFTAR PUSTAKA

Assauri S., 1980, *Aljabar Linear*, Jakarta : C.V. Rajawali.

Ayres F., 1984, *Matriks*, Jakarta : Erlangga.

Mundit A.K., 1986, *Teori-Soal Penyelesaian Aljabar Linear*, Bandung : CV. Armico.

Rao R. & Bhaskara R.M., 1998, *Matrix Algebra and its Applications to Statistic and Econometrics*, Singapore : World Scientific.

Searle S.R., 1971, *Linear Models*, New York : JOHN WILEY & SONS

Subagio S., 1986, *Matriks*, Jakarta : Universitas Terbuka.

Supranto J., 1998, *Pengantar Matriks*, Jakarta : PT. Rineka Cipta.

Suryadi S., & Machmudi., 1990, *Teori dan Soal Pendahuluan Aljabar Linear*, Jakarta : Ghala Indonesia.