ISBN : 978.602.719.934.7

ANALISA KESTABILAN DAN KENDALI OPTIMAL PADA MODEL PEMANENAN PREY PREDATOR DENGAN FUNGSI REPON TIPE III

Mohammad Rifa'i, Subchan
ITS Surabaya, ITS Surabaya
vianditrivai@gmail.com, subchan@matematika.its.ac.id

ABSTRAK. Perilaku atau karakteristik prey predator dapat dimodelkan secara matematis dan telah dikembangkan sejak dahulu oleh para peneliti. Model dasar sistem prey predator secara umum, pertama kali diperkenalkan oleh Lotka-Voltera, kemudian dikembangkan oleh Leslie dan dilanjutkan oleh Holling-Tanner. Pada model Holling-Tanner dikembangkan suatu fungsi respon pada predator yang disebut fungsi Holling. Pada penelitian ini, dianalisa kestabilan dan kendali optimal pada model pemanenan prey predator dengan fungsi respon Holling III. Mengingat didalam ekosistem, terutama laut terdapat interaksi makan-dimakan, sehingga strategi panen yang tepat sangat diperlukan untuk mendapatkan keuntungan komersil yang maksimum dengan tetap menjaga kelestarian spesies tersebut. Dalam hal ini, jumlah pemanenan yang optimum didapatkan menggunakan Prinsip Maksimum Pontyagin dan kendali bang-bang. Dari hasil analisa dinamika populasi didapatkan bahwa sistem stabil pada kondisi ketika prey dan predator hidup bersama, sedangkan pada penyelesaian kendali optimal nilai dari kontrol E tidak tunggal tergantung dari kondisi fungsi switching. Kemudian dari hasil simulasi didapatkan bahwa dengan adanya kontrol panen sistem mengalami keseimbangan, artinya populasi prey dan predator tidak mengalami kepunahan walaupun dipanen secara terus menerus dibandingkan dengan sistem tanpa panen yang menyebabkan kondisi sistem menjadi tidak ideal.

Kata Kunci: model prey predator; fungsi respon Holling tipe III; pemanenan; prinsip maksimum Pontryagin; kendali bang-bang

1. PENDAHULUAN

Dalam ekosistem, terjadi hubungan antar-organisme dan juga lingkungannya yang cukup kompleks dan saling mempengaruhi satu sama lainnya. Hubungan antara unsur hayati dan juga non-hayati tersebut kemudian bermuara pada suatu sistem ekologis yang disebut eksosistem. Dalam pola interaksi hubungan tersebut ikut melibatkan terjadinya siklus biogeokimia, yaitu sejumlah aliran energi dan juga rantai makanan.

Rantai makanan adalah peristiwa makan dan dimakan dalam suatu ekosistem dengan urutan tertentu. Pada rantai makanan dikenal istilah prey dan predator. Prey merupakan suatu organisme yang dimakan, biasanya dikenal dengan istilah mangsa. Sedangkan predator merupakan suatu organisme yang memakan, biasanya dikenal dengan istilah pemangsa. Hubungan dinamis antara prey dan predator ini sangat menarik untuk dipelajari dan menjadi salah satu topik yang sering dibahas dikalangan peneliti.

Selama beberapa tahun terakhir, banyak peneliti telah mempelajari model prey predator, akan tetapi pengetahuan tentang pengaruh panen terhadap populasi prey predator masih terbatas, padahal sistem ekologi sering sangat terganggu dengan kegiatan eksploitasi manusia. Misalnya, karena kemajuan teknologi yang pesat serta peningkatan yang signifikan pada populasi manusia, jumlah ikan di dunia telah berkurang drastis. Hal ini terjadi akibat pemanenan yang berlebih pada sumber daya pangan di laut, sehingga dapat mengakibatkan kepunahan pada spesies tersebut. Mengingat di dalam ekosistem laut terdapat interaksi makan-dimakan, sehingga strategi panen yang tepat sangat diperlukan untuk mendapatkan keuntungan komersil yang maksimum dengan tetap menjaga kelestarian spesies tersebut.

Banyak penelitian yang telah dilakukan terhadap sistem prey predator. Diantaranya adalah penelitian yang dilakukan oleh Tapan Kumar Kar (2005) yang menganalisis perilaku dinamis dari model mangsa-pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe-II dan menilai usaha pemanenan. Huang, dkk (2006) membahas model mangsa pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe-III menggabungkan perlindungan mangsa. Mereka telah menganalisis model dan membahas beberapa hasil kualitatif yang signifikan dari sudut pandang biologis. Tapasai Das (2007) membahas tentang pemanenan dari prey predator ikan di daerah yang terinfeksi racun. Lv Yunfei, dkk (2010) membahas pemanenan dari model Fitoplankton-Zooplankton. Tapan Kumar Kar (2012) meneliti tentang analisa kestabilan dan optimal kontrol pada model sistem prey predator dengan pemberian makanan alternatif pada predator. Chakraborty, dkk (2012) meneliti tentang analisis global dan bifurkasi sistem mangsa-pemangsa menggabungkan waktu perlindungan, dengan menggunakan fungsi respon Holling tipe-II. Dari hasil yang mereka peroleh bahwa keberadaan perlindungan memiliki efek penting pada eksistensi pemangsa dan populasi mangsa. Lusiana Pratiwi (2013) mengkaji tentang optimal kontrol pada model bioeconomic prey predator fungsi respon Holling II dengan waktu tunda.

Berdasarkan pada penelitian-penelitian tersebut, maka pada thesis ini dibahas suatu penelitian tentang analisa kestabilan dan kendali optimal pada model prey predator dengan fungsi respon Holling III. Analisa kestabilan yang dimaksud adalah mengetahui kestabilan dari berbagai titik setimbang, serta digunakan untuk mengetahui dinamika interaksi antar spesies dari suatu populasi. Sedangkan kendali optimal berperan untuk mendapatkan usaha pemanenan yang optimal sehingga dapat diperoleh keuntungan maksimum dari suatu pendapatan ekonomi.

2. METODE PENELITIAN

Adapun Metode penelitian dalam kasus ini adalah sebagai berikut :

1) Studi Literatur

Dalam tahap ini, dilakukan studi literatur dari beberapa buku, jurnal, dan penelitian sebelumnya mengenai model prey predator. Kemudian, mengkaji model dari sistem dinamik model prey predator dengan fungsi respon Holling tipe III.

2) Menentukan Daerah Penyelesaian Model

Tahap ini dilakukan untuk mendapatkan daerah penyelesaian model pemanenan dari sistem dinamik prey predator.

3) Menentukan Titik Setimbang dan Menganalisa Kestabilan Sistem

Tahap ini dilakukan untuk mengetahui titik setimbang dari sistem dinamik pada berbagai keadaan yaitu, titik setimbang saat kondisi kepunahan prey dan predator, titik setimbang saat kepunahan prey, dan titik setimbang saat kedua spesies prey dan predator hidup berdampingan atau terjadi interaksi. Kemudian dari beberapa titik setimbang tersebut dianalisa kestabilan dari model sistem dinamiknya.

4) Menyelesaikan Masalah Kendali Optimal

Pada tahap ini sistem dinamik model prey predator diselesaiakan menggunakan metode tak langsung yaitu dengan menerapkan teori kontrol optimal (prinsip maksimum Pontryagin) untuk mendapatkan upaya pemanenan yang optimal agar pendapatan atau keuntungan yang diperoleh juga optimal. Adapun langkah penyelesaian teori maksimum Pontryagin adalah sebagai berikut :

Langkah 1 : Membentuk fungsi Hamilton yang disimbolkan dengan H, yaitu:

Langkah 2 : Menyelesaikan persamaan kendali yaitu memaksimumkan H terhadap kontrol E atau $\frac{\partial H}{\partial E} = 0$ atau disebut kondisi stationer untuk mendapatkan nilai E.

Langkah 3 : Dengan menggunakan yang telah dihasilkan pada langkah 2, akan didapatkan fungsi Hamilton baru yang optimal H*.

Langkah 4 : Menentukan persamaan state dan co-state.

Langkah 5 : Substitusi hasil-hasil yang diperoleh pada langkah 4 kedalam persamaan pada langkah 2 untuk mendapatkan kendali yang optimal. Namun pada kasus ini, persamaan Hamiltonian bergantung secara linear dengan kontrol E . Jika E muncul sebagai fungsi linear dalam Hamiltonian, maka E yang optimal tidak ditentukan melalui $H_E = 0$. Namum diselesaikan dengan kendali bang-bang.

Langkah 6 : Melakukan simulasi

Dalam tahap ini simulasi dilakukan dengan DOTcvp yang dapat langsung dipergunakan untuk memecahkan masalah kendali optimal dengan mendefinisikan masalah optimal control pada M-File yang disesuaikan dengan parameter yang diketahui. Simulasi yang dilakukan adalah dengan membandingkan state variabel dengan kontrol panen dan tanpa kontrol panen

3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

3.1 Model Prey Predator dengan Fungsi Respon Tipe III

Berikut ini diberikan model pemanenan prey predator dengan adanya faktor pemberian makanan.

$$\frac{dx}{dt} = r_1 x(1 - \frac{x}{k}) - \frac{\alpha A y x^2}{1 + x^2} - c_1 E x \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\beta \alpha A y x^2}{1 + x^2} - r_2 y + (1 - A) - c_2 E y \quad (2)$$

Pada persamaan (1) disebut model laju pertumbuhan populasi prey, model pertumbuhan tersebut dipengaruhi oleh laju pertumbuhan alami r_1 lalu berkurang seiring dengan adanya persaiangan antar sesama prey dan keterbatasana daya tampung k seta menurun dengan adanya pemangsaan dari predator serta adanya usaha pemanenan atau E. Sedangkan pada persamaan (2) disebut model laju pertumbuhan populasi predator, model pertumbuhan predator dipengaruhi oleh laju pemangsaan predator terhadap prey kemudian berkurang dengan adanya kematian prey dan dengan adanya faktor makanan A pada predator adan adanya usaha pemanenan E

3.2. Daerah penyelesaian model

Secara biologi model prey predator mempunyai penyelesaian pada kuadran pertama R+ dengan kondisi awal x>0 dan y>0. Untuk mendapatkan daerah penyelesaian model dari sistem prey predator pada persamaan dapat dinyatakan dengan teorema berikut ini.

Teorema 1 : Jika parameter c_2, E dan A memenuhi kondisi c_2 E+A>(1-r_2) maka semua penyelesaian dari sistem persamaan (1) dan (2) berada pada kuadran positif

3.3 Titik Kesetimbangan

Titik setimbang diperoleh dari kondisi $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ pada persamaan (1) dan (2), sehingga diperoleh titik setimbang sebagai berikut :

a) Titik setimbang kepunahan prey predator $x = y = 0$ adalah $S_0(x, y) = S_0(x_0, y_0)$

b) Titik setimbang kepunahan predator adalah $S_1(x_1, 0)$ is $x_1 = \frac{k}{r_1}(r_1 - c_1 E)$, dengan $E < \frac{r_1}{c_1}$.

c) Titik setimbang prey predator hidup bersama adalah $S_2(x_2, y_2) = \left(\sqrt{p}, \frac{r_1(1 - \frac{\sqrt{p}}{k}) - c_1 E}{\frac{\alpha A \sqrt{p}}{1+p}}\right)$ dengan $p = \frac{r_2 - 1 + A + c_2 E}{A\beta\alpha - r_2 + 1 - A - c_2 E}$ dan $c_2 E + A > 1 - r_2$

3.4 Analisa kestabilan Sistem di Titik Setimbang

Diberikan matriks Jacobian pada sistem prey predator sebagai berikut :

$$J = \begin{bmatrix} r_1 - \frac{2r_1 x}{k} - \frac{2xyA\alpha}{(1+x^2)^2} - c_1 E & -\frac{\alpha A x^2}{1+x^2} \\ \frac{2A\beta y x \alpha}{(1+x^2)^2} & \frac{A\beta\alpha x^2}{1+x^2} - r_2 + (1-A) - c_2 E \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Kemudian dari matriks jacobian tersebut dianalias kestabilan sistema dengan mendapatkan nilai karakteristik dari determinan matriks jacobian tersebut, sehingga diperoleh :

a) kestabilan di titik setimbang kepunahan prey predator

Berdasarkan matriks jacobian pada persamaan (3) maka diperoleh matriks jacobian pada kasus di titik setimbang kepunahan prey predator sebagai berikut :

$$\det\begin{bmatrix} r_1 - c_1 E - \lambda & 0 \\ 0 & -r_2 + (1-A) - c_2 E - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (r_1 - c_1 E - \lambda)\left(-r_2 + (1-A) - c_2 E - \lambda\right) = 0$$

Didapatkan $\lambda_1 = r_1 - c_1 E$ atau $\lambda_2 = -r_2 + (1-A) - c_2 E$

Agar sistem dalam kondisi stabil maka $\lambda_1 = r_1 - c_1 E < 0 \Leftrightarrow E > \frac{r_1}{c_1}$ padahal pada titik setimbang nilai $E < \frac{r_1}{c_1}$. Sehingga pada kondisi ini sistem selalu tidak stabil.

ISBN : 978.602.719.934.7

b) kestabilan di titik setimbang kepunahan predator

$$J=\begin{bmatrix} r_1-\dfrac{2r_1x_1}{k}-c_1E & -\dfrac{\alpha A{x_1}^2}{1+{x_1}^2} \\ 0 & \dfrac{A\beta\alpha{x_1}^2}{1+{x_1}^2}-r_2+(1-A)-c_2E \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik nya adalah :

$$\det\begin{bmatrix} r_1-\dfrac{2r_1x_1}{k}-c_1E-\lambda & -\dfrac{\alpha A{x_1}^2}{1+{x_1}^2} \\ 0 & \dfrac{A\beta\alpha{x_1}^2}{1+{x_1}^2}-r_2+(1-A)-c_2E-\lambda \end{bmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(r_1-\frac{2r_1x_1}{k}-c_1E-\lambda\right)\left(\frac{A\beta\alpha{x_1}^2}{1+{x_1}^2}-r_2+(1-A)-c_2E-\lambda\right)=0$$

Agar stabil maka kondisi nilai eigennya harus bernilai negatif sebagai berikut : $\lambda_1=r_1-\dfrac{2r_1x_1}{k}-c_1E$ atau $\lambda_2=\dfrac{A\beta\alpha{x_1}^2}{1+{x_1}^2}-r_2+(1-A)-c_2E$ .Sehingga diperoleh $\lambda_1=r_1-\dfrac{2r_1x_1}{k}-c_1E=<0$, $E>\dfrac{r_1}{c_1}$ padahal nilai dari $E<\dfrac{r_1}{c_1}$. Maka dalam kasus ini sistem juga dalam keadaan tidak stabil.

c) kestabilan di titik setimbang prey predator hidup bersama

$$J=\begin{bmatrix} r_1-\dfrac{2r_1x_2}{k}-\dfrac{2x_2y_2A\alpha}{(1+x^2)^2}-c_1E & -\dfrac{\alpha A{x_2}^2}{1+{x_2}^2} \\ \dfrac{2\beta Ay_2x_2\alpha}{(1+{x_2}^2)^2} & \dfrac{A\beta\alpha{x_2}^2}{1+{x_2}^2}-r_2+(1-A)-c_2E \end{bmatrix}$$

Persamaan Karakteristiknya adalah :

$$\det\begin{bmatrix} r_1-\dfrac{2r_1x_2}{k}-\dfrac{2x_2y_2A\alpha}{(1+x^2)^2}-c_1E-\lambda & -\dfrac{\alpha A{x_2}^2}{1+{x_2}^2} \\ \dfrac{2\beta Ay_2x_2\alpha}{(1+{x_2}^2)^2} & \dfrac{A\beta\alpha{x_2}^2}{1+{x_2}^2}-r_2+(1-A)-c_2E-\lambda \end{bmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow\left({}_1-\frac{2r_1x_2}{k}-\frac{2x_2y_2A\alpha}{(1+x^2)^2}-c_1E-\lambda\right)\left(\frac{A\beta\alpha{x_2}^2}{1+{x_2}^2}-r_2+(1-A)-c_2E-\lambda\right)+\left(\frac{\alpha A{x_2}^2}{1+{x_2}^2}\right)\left(\frac{2\beta Ay_2x_2\alpha}{(1+{x_2}^2)^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow a_0\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$$

Dengan

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = -r_1 + \frac{2r_1x_2}{k} + \frac{2\alpha A x_2 y_2}{(1+x^2)^2} + c_1E - \frac{A\beta\alpha x_2{}^2}{(1+x^2)^2} + r_2 - (1-A) + c_2E$$

$$a_2 = -r_1r_2 + r_1(1-A) - r_1c_2E + c_1Er_2 - c_1E(1-A) + c_1c_2E^2 - \frac{2A\beta\alpha r_1 x_2{}^3}{k(1+x_2{}^2)} +$$

$$\left(\frac{2r_1r_2x_2 - 2r_1x_2(1-A) + 2r_1x_2c_2E}{k}\right) + \left(\frac{r_1A\beta\alpha x_2{}^2 - c_1E\beta\alpha A x_2{}^2}{1+x_2{}^2}\right) + \left(\frac{2\alpha A x_2 y_2(r_2 - (1-A))}{(1+x_2)^2}\right) = 0$$

Untuk menentukan kestabilan pada kasus ini diperoleh melalui kriteia kestabilan Routh-Hurwitz, sehingga pada titik setimbang $S_2(x_2, y_2)$ dikatakan stabil jika $a_1 > 0$ and $a_2 > 0$

3.5 Penyelesain kendali optimal

Fungsi objektif atau tujuan dari kasus ini adalah menyelesaiakan kendali optimal dengan kontrol panen dengan harapan mendapatkan keuntungan yang optimal sebagai berikut :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (p_1c_1xE + p_2c_2yE - CE)e^{-\delta t}dt \tag{4}$$

Kemudian dengan penyelesaian kendali optimal menggunakan prinsip Maksimum Pontryagin, didapatkan hal sebagai berikut :

a) Fungsi Hamiltonian

$$H = (E(t),\ x(t),\ y(t),\ \lambda_1, \lambda_2)$$

b) Kondisi Stationer

$$\frac{\partial H}{\partial E} = (p_1c_1xE + p_2c_2yE - CE)e^{-\delta t} - \lambda_1c_1x - \lambda_2c_2y = 0$$

c) Persamaan State

$$\dot{x}(t) = r_1x - \frac{r_1x^2}{k} - \frac{\alpha yAx^2}{1+x^2} - c_1Ex$$

$$\dot{y}(t) = \frac{\beta\alpha Ayx^2}{1+x^2} - r_2y + (1-A)y - c_2Ey$$

d) Persamaan co-state

$$\dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial y}$$

e) Kendali bang-bang dan singular

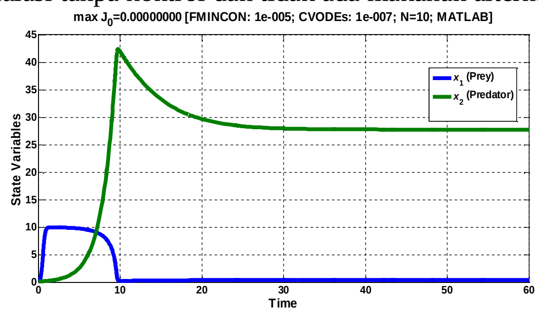
$$E(t) = \begin{cases} E_{max} & \text{jika } H_E < 0 \\ E_{sing} & \text{jika } H_E = 0 \\ E_{min} & \text{jika } H_E > 0 \end{cases}$$

Dengan H_E adalah fungsi Switching yang didefinisikan sebagai berikut : $(p_1 c_1 xE + p_2 c_2 yE - CE)e^{-\delta t} - \lambda_1 c_1 x - \lambda_2 c_2 y$. Kemudian untuk mendapatkan nilai optimum dari E maka fungsi switching tersebut diturunkan terhadap variabel waktu t secara berulang sampai nilai E muncul sebagai fungsi waktu.

3.6 Simulasi

Pada tahap simulasi dibandinga sistem dengan kontrol panen dan tanpa kontrol panen sebagai berikut :

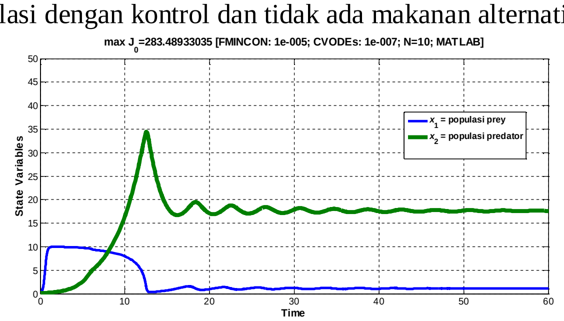
a) Simulasi tanpa kontrol dan tidak ada makanan alternatif



Gambar.1 Tanpa kontrol

Pada gambar.1 dapat dijelaskan bahwa populasi prey mulanya naik mencapai laju pertumbuhan maksimum, lalu seiring dengan pertumbuhan predator prey mengalami penurunan dan akhirnya mendekati nol atau punah. Denga tidaka adanya kontrol panen populasi predator punah akibat dimakan oleh predator secara berlebih.

b) Simulasi dengan kontrol dan tidak ada makanan alternatif



Gambar.2 Dengan Kontrol Panen

Pada gambar.2 dapat dijelaskan bahwa populasi prey mulanya naik mencapai laju pertumbuhan maksimum, lalu seiring dengan pertumbuhan predator prey mengalami penurunan. Kemudian, dengan adanya kontrol panen populasi predator tidak punah, karena ada aktifitas pemanenan untuk prey dan predator, namun tetap menjaga kelestarian dan kelangsungan prey predator. Dari hasil simulasi juga didapatkan nilai keuntungan atau pendapatan sebesar 283,489 satuan laba.

ISBN : 978.602.719.934.7

4. SIMPULAN

Dari pembahasan tersebut didapatkan hasil bahwa sistem dinamis prey predator dengan fungsi Holling III di hadapan faktor panen dan alternatif makanan tambahan untuk predator akan stabil jika populasi predator mangsa hidup bersama. Sehingga terjadi interaksi antara dua spesies. Sedangkan dalam masalah kendali optimal didaptkan nilai kontrol E yang tidak tunggal tergantung dari fungsi switching. Dari Hasil simulasi juga didapatakan sistem dengan adanya kontrol lebih stabil dari pada yang tidak ada nilai kontrolnya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anisya, A.F. (2013). *Analisa Kestabilan dan Kendali Optimal pada Model Pemanenan Fitoplankton-Zooplankton*. Jurusan Matematika ITS Surabaya.

[2] Huu Du N, Minh Mann N, dan Trung T.T. (2007). *Dynamics Of Predator- Prey Population With Modified Leslie-Gower And Holling Type-II Schemes*. Acta Mathematica Vietnamica, volume 32 number 1, pp. 99-111.

[3] Huang Y, Chen F, Zhong L. (2006). *Stability Analysis Of A Prey-Predator Model With Holling Type III Response Function Incorporating A Prey Refuge*. Journal of Applied Mathematics and Computation 182 (2006) 672-683.

[4] Kar, T.K.,Ghosh, B.(2012). *Sustainability and Optimal Control of an Exploited Prey and Predator System Through Provision of Alternative Food to Predator* .Elsevier. BioSystems.Hal.220-232

[5] Prastiwi L. (2013). *Kontrol Optimal Model Bioekonomi Mangsa-Pemangsa Dengan Waktu Tunda*. Tesis S2 Pasca Matematika ITS, Surabaya.

[6] Tapasi Das, R.N.Mukherjee, dan K.S. Chaudhuri. (2009). *Harvesting of a Prey Predator Fishery in the Presence of Toxicity*. Journal Applied Modelling 33 (2009) 2282-2292.