

PROBLEMATIKA DALAM TEKNIK INTEGRASI SUBSTITUSI DAN PARSIAL SERTA ALTERNATIF PEMECAHANNYA

Kusnul Chotimah Dwi Sanhadi¹, Yoga Muhamad Muklis²

^{1,2}Universitas Sebelas Maret

¹choosenewl@gmail.com, ²yogamuklis@gmail.com

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mengidentifikasi problematika apa saja yang sering muncul dalam penyelesaian soal integral dengan teknik integrasi substitusi dan parsial beserta alternatif jawaban dari problematika tersebut. Penelitian ini dilakukan di SMA MTA Surakarta. Subjek penelitian ini adalah siswa kelas XII yang telah mempelajari materi integral pada semester I tahun akademik 2015/2016. Penelitian dilakukan dengan pemberian tes berkaitan dengan materi integral. Selanjutnya, diperoleh data dari hasil tes tersebut yang didukung dengan wawancara oleh peneliti kepada subjek penelitian. Permasalahan yang sering dialami siswa dalam menyelesaikan soal integral yakni (1) siswa merasa bingung harus menggunakan teknik pengintegralan yang mana, (2) fungsi mana yang harus dimisalkan dan mana yang tidak, dan (3) bagaimana cara memisalkannya. Oleh karena itu, untuk mengatasi problematika tersebut, maka guru sebaiknya membimbing siswa agar siswa dapat membuat kesimpulan sendiri tentang perbedaan teknik integrasi tersebut. Untuk membantu guru dalam membimbing siswa maka guru dapat membuat mendesain Lembar Kerja Siswa (LKS) terstruktur sehingga siswa dapat berlatih dan menganalisa soal-soal yang berhubungan dengan integral.

Kata Kunci: Teknik Integrasi, Parsial dan Substitusi

1. PENDAHULUAN

Penggunaan matematika dalam kehidupan sangat berguna untuk meningkatkan pemahaman dan penalaran, serta untuk memecahkan suatu masalah dan menafsirkan solusi dari permasalahan yang ada. Tanpa disadari ketika kita mempelajari matematika, kita memiliki ketelitian dan kecermatan yang sangat baik karena nilai-nilai pada matematika yang menggunakan nilai yang kompleks sehingga faktor ketelitian sangat diperlukan untuk menghitung suatu rumusan masalah. Integral merupakan suatu bagian dari matematika yang juga banyak berperan dalam perkembangan ilmu matematika dan penerapan diberbagai bidang (Kemendikbud, 2014). Ini berarti integral banyak diterapkan di kehidupan sehari-hari. Keterlibatan integral dalam terapan ilmu lain seperti geometri, teknologi, biologi, ekonomi sangat membantu untuk pengembangan ilmu pengetahuan.

Di Indonesia, konsep integral diberikan kepada siswa-siswa Sekolah Menengah Atas (SMA) yang meliputi: (1) pengertian integral; (2) integral tak tentu; (3) integral tertentu; (4) menentukan luas daerah; dan (5) menentukan volume benda putar. Meskipun materi tentang integral telah disampaikan oleh guru, namun pada kenyataannya banyak siswa yang masih belum memahami perbedaan antara teknik-teknik integrasi dalam menyelesaikan persoalan yang

berhubungan dengan integral. Hal ini dikarenakan integral menjadi salah satu materi yang dianggap sulit oleh kebanyakan siswa. Hal ini sering terjadi karena siswa kurang memahami langkah-langkah penyelesaian pada integral. Untuk dapat menyelesaikan persoalan integral siswa dituntut memahami langkah-langkah penyelesaian integral setelah itu siswa bisa mengaplikasikannya pada soal latihan.

Banyaknya persoalan yang ada pada integral, namun ada dua aturan yang ditawarkan agar siswa dapat mudah menyelesaikan persoalan tersebut. Aturan pertama kita menggunakan aturan integral parsial dan yang satu lagi kita bisa menggunakan aturan integral substitusi. Namun, hal ini sering kali jadi permasalahan karena siswa masih sulit membedakan mana persoalan yang bisa diselesaikan dengan integral parsial dan mana yang bisa diselesaikan dengan integral substitusi. Penulis menduga bahwa masalah tersebut karena siswa belum memahami dengan baik mengenai konsep teknik integrasi parsial dan substitusi, adapun beberapa siswa masih bingung darimana memulai pengintegralan.

Oleh karena itu, penulis berkeinginan untuk membuat makalah yang membahas tentang permasalahan yang timbul dalam menyelesaikan persoalan yang berhubungan dengan teknik integrasi substitusi dan parsial, serta contoh soal dan alternatif pemecahannya.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian yang digunakan adalah penelitian kualitatif karena bertujuan untuk mendeskripsikan atau memberikan gambaran apa adanya atas suatu fenomena kehidupan nyata seperti yang dikemukakan oleh Moleong (2012) bahwa penelitian kualitatif adalah penelitian yang bermaksud untuk memahami fenomena tentang apa yang dialami oleh subjek penelitian (misalnya perilaku, persepsi, motivasi, tindakan, dan lain-lain) secara holistik (utuh) dan dengan cara deskripsi (dalam bentuk kata-kata dan bahasa). Selain itu, Sugiyono (2014) mengemukakan bahwa metode penelitian kualitatif digunakan untuk meneliti pada kondisi obyek yang alamiah, dimana peneliti adalah sebagai instrument kunci, teknik pengumpulan data dilakukan secara triangulasi (gabungan), analisis data bersifat induktif/kualitatif, dan hasil penelitian kualitatif lebih menekankan makna daripada generalisasi. Dalam penelitian ini, peneliti melakukan penelitian untuk mengidentifikasi problematika apa saja yang sering muncul dalam penyelesaian soal matematika pada materi integral menggunakan teknik integrasi substitusi dan parsial, serta alternatif jawaban yang mungkin dari problematika tersebut. Penelitian ini menggunakan penelitian kuantitatif yang berjenis studi kasus.

Penelitian ini dilakukan di SMA MTA Surakarta. Subjek penelitian ini adalah siswa kelas XII IPA yang telah mempelajari materi integral pada mata pada semester I tahun akademik 2015/2016. Pengambilan subjek dilakukan dengan teknik random. Teknik ini dilakukan karena peneliti menganggap semua mahasiswa memiliki kemampuan matematis yang sama dan penelitian ini hanya mendeskripsikan tentang problematika apa saja yang dialami mahasiswa ketika mengerjakan soal integral dengan teknik integrasi parsial

dan substitusi terlepas dari kemampuan matematisnya. Pengambilan subjek penelitian ini dilakukan secara acak hingga terambil 3 siswa dari 137 siswa yang ada.

Penelitian dilakukan dengan pemberian tes berkaitan dengan materi integral. Dalam menjawab soal, subjek penelitian tersebut diberikan waktu maksimal 20 menit. Selanjutnya, hasil tes dianalisis untuk mendiagnosis problematika apa saja yang dialami siswa. Hasil diagnosis dari beberapa subjek penelitian tersebut kemudian dicek kebenarannya dan dilengkapi kekurangannya melalui kegiatan wawancara yang dilakukan peneliti kepada masing-masing subjek. Setelah tahap wawancara selesai, maka permasalahan tersebut dirangkum dan dibuat kesimpulan. Kemudian berdasarkan permasalahan tersebut, peneliti mencari alternatif penyelesaian yang mungkin dapat menanggulangi permasalahan tersebut.

Dalam penelitian ini terdapat dua jenis instrumen yaitu instrumen utama dan instrumen bantu. Instrumen utama dalam penelitian ini adalah peneliti sendiri. Peneliti mencari dan mengumpulkan data langsung dari sumber data. Sebagai instrumen utama, peneliti akan berinteraksi langsung dengan subjek penelitian. Kemampuan peneliti yang cakap dalam mencari dan menggali informasi secara mendalam akan sangat bermanfaat dalam mencari data yang diperlukan. Instrumen bantu yang digunakan dalam penelitian ini yaitu lembar tes dan pedoman wawancara. Tes berisi soal induksi matematika yang berbentuk uraian sebanyak 4 soal. Selain itu, pedoman wawancara berisi butir-butir pertanyaan atau pernyataan yang bersifat mengeksplor informasi yang dibutuhkan oleh peneliti. Dalam penelitian ini, wawancara bertujuan untuk mengetahui dengan jelas alur pikiran siswa dalam menjawab tes soal integral yang diberikan.

Langkah-langkah analisis data pada penelitian ini didasarkan pada pendapat Miles dan Huberman (dalam Sugiyono, 2014) yakni pengumpulan data, pereduksian data, penyajian data, dan penarikan kesimpulan. Pada tahap pengumpulan data, subjek ke- i ($i = 1,2,3$) akan diberikan soal tes tertulis mengenai materi yang bersangkutan. Selanjutnya, subjek diminta untuk mengerjakan soal tersebut berdasarkan ide dan pemikiran masing-masing. Selanjutnya dilakukan wawancara oleh peneliti untuk menanyakan penjelasan subjek secara langsung tentang bagaimana cara subjek tersebut menjawab soal tes yang diberikan. Sehingga diperoleh data lisan dan data tertulis. Reduksi data yaitu proses merangkum, memilih hal-hal yang pokok, menyederhanakan data dengan membuang yang tidak perlu serta membuat abstrak. Dengan demikian, data yang telah direduksi akan memberikan gambaran yang lebih jelas mengenai bagaimana cara siswa dalam menjawab soal induksi matematika tersebut. Penyajian data yaitu menyusun informasi dengan cara tertentu sehingga memungkinkan penarikan kesimpulan atau pengambilan tindakan. Penyajian data bisa dilakukan dalam bentuk uraian singkat, bagan, hubungan antar kategori, *flowchart* dan sejenisnya. Penarikan kesimpulan adalah langkah terakhir yang meliputi pemberian makna data yang memungkinkan diprediksi hubungan sebab akibatnya melalui hukum-hukum

empiris. Kesimpulan awal yang dikemukakan masih bersifat sementara, dan dikatakan valid jika ditemukan bukti kuat yang mendukungnya.

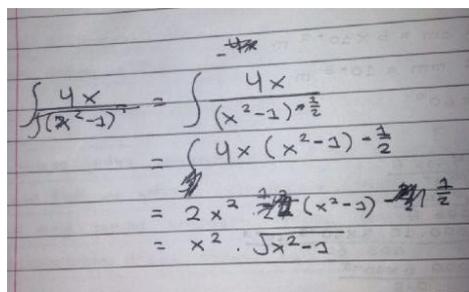
3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Setelah subjek menyelesaikan tes tertulis, diperoleh data uraian tentang cara subjek menjawab soal-soal integral. Selanjutnya, data tersebut dianalisis sehingga terlihat problematika yang dialami subjek tersebut.

A. Problematika Teknik Integrasi dengan Substitusi

Contoh Soal 1

Tentukan hasil dari $\int \frac{4x}{\sqrt{x^2-1}} dx$!



Gambar 1. Contoh Pengerjaan Siswa

Jawab:

<p>Masalah 1</p>	<p>Berdasarkan jawaban siswa di atas, terlihat bahwa siswa telah menguasai tentang sifat bilangan berpangkat dan bilangan akar yakni</p> <p>(i) Untuk $a \in R$ dan $a \neq 0$ berlaku:</p> $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ <p>(ii) Jika $a, p, q \in R$ dan $a, q > 0$ maka</p> $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ <p>Namun siswa belum menggunakan teknik integrasi substitusi untuk menyelesaikan soal di atas, tetapi siswa menggunakan teknik integrasi sederhana. Hal ini dapat disebabkan karena siswa belum memahami perbedaan teknik integrasi sederhana dan substitusi.</p>
<p>Penyelesaian 1</p>	<p>Soal diatas dapat diselesaikan dengan teknik integrasi substitusi karena fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ mempunyai pangkat yang berbeda derajatnya serta fungsi $f(x)$ mengandung turunan dari fungsi $g(x)$ sehingga dilakukan permisalan terhadap fungsi $g(x)$. Setelah dilakukan permisalan, siswa dapat mensubstitusikan hasil permisalan ke dalam bentuk</p> $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$

Penyelesaian yang tepat untuk soal diatas adalah

$$\int \frac{4x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \int 4x(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} dx$$

Misal:

$$u = x^2 - 1 \Rightarrow du = 2x dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{2x} = dx$$

sehingga

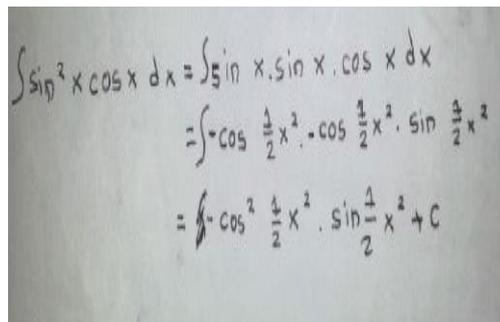
$$\begin{aligned} \int 4x(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} dx &= \int 4x \cdot u^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{2x} \\ &= \int 2 \cdot u^{-\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{2}{-\frac{1}{2} + 1} \cdot u^{-\frac{1}{2} + 1} + c \\ &= \frac{2}{\frac{1}{2}} \cdot u^{\frac{1}{2}} + c \\ &= 4 \cdot u^{\frac{1}{2}} + c \end{aligned}$$

Selanjutnya, permisalan dikembalikan ke bentuk semula sehingga diperoleh

$$\int 4x(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} dx = 4(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} + c$$

Contoh Soal 2

Tentukan hasil dari $\int \sin^2 x \cos x dx$!



$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos x dx &= \int (1 - \cos^2 x) \cos x dx \\ &= \int \cos x dx - \int \cos^3 x dx \\ &= \sin x - \int \cos^2 x \cdot \cos x dx \\ &= \sin x - \int \cos^2 x \cdot \sin x dx + C \end{aligned}$$

Gambar 2. Contoh Pengerjaan Siswa

Masalah 2	Berdasarkan jawaban siswa diatas terlihat bahwa dalam menyelesaikan soal tersebut siswa menggunakan teknik integrasi sederhana. Akibatnya, hasil pengerjaan siswa tersebut menjadi belum tepat. Hal ini terjadi karena siswa belum memahami perbedaan antara teknik integrasi sederhana dan substitusi.
Penyelesaian 2	Soal seperti ini dapat dikerjakan dengan menggunakan pengintegralan dengan substitusi, karena salah satu fungsi merupakan turunan dari fungsi yang lain atau dapat dikatakan $f(x) = g'(x)$. Sehingga fungsi yang memiliki pangkat lebih tinggi yang akan dimisalkan.

Penyelesaian yang tepat untuk soal diatas adalah

Misal

$$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{\cos x} = dx$$

Berarti

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int u^2 \cos x \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int u^2 du$$

$$= \frac{1}{2+1} u^{2+1} + c$$

$$= \frac{1}{3} u^3 + c$$

Sehingga diperoleh

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x + c$$

B. Problematika Teknik Integrasi dengan Parsial

Contoh Soal 3

Tentukan hasil dari $\int (x+1) \cos 2x dx$!

Gambar 3. Contoh Pengerjaan Siswa

Masalah 3	Berdasarkan jawaban siswa di atas, terlihat bahwa siswa menyelesaikannya dengan menggunakan teknik integrasi sederhana sehingga jawaban yang diperoleh belum tepat. Hal ini dapat terjadi karena siswa tidak memahami perbedaan teknik integrasi sederhana dan parsial.
Penyelesaian 3	Soal seperti ini dapat dikerjakan dengan menggunakan pengintegralan parsial, karena tidak adanya hubungan derivatif dan anti turunan antara kedua fungsi. Sehingga soal di atas akan dimisalkan dalam bentuk $\int u dv$ dimana fungsi yang dimisalkan sebagai u akan diturunkan, sedangkan fungsi yang dimisalkan sebagai dv akan diintegalkan. Selanjutnya, setelah dilakukan permisalan, hasil permisalan tersebut disubstitusikan ke dalam bentuk $\int u dv = uv - \int v du$

Penyelesaian yang tepat untuk soal diatas adalah

Misal:

$$u = x + 1 \Rightarrow du = dx$$

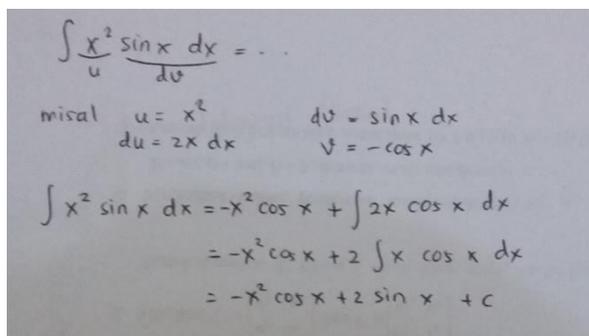
$$dv = \cos 2x dx \Rightarrow v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + c$$

sehingga

$$\begin{aligned} \int (x + 1) \cos 2x dx &= (x + 1) \frac{1}{2} \sin 2x - \int \frac{1}{2} \sin 2x dx \\ &= \frac{1}{2} (x + 1) \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx \\ &= \frac{1}{2} (x + 1) \sin 2x - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) + c \\ &= \frac{1}{2} (x + 1) \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + c \end{aligned}$$

Contoh Soal 4

Tentukan hasil dari $\int x^2 \sin x dx$!



Gambar 4. Contoh Pengerjaan Siswa

Masalah 4	Berdasarkan jawaban siswa di atas, terlihat bahwa siswa menyelesaikannya dengan menggunakan teknik integrasi parsial dan dalam melakukan permisalan juga sudah tepat. Namun, karena soal tersebut perlu dilakukan teknik integrasi parsial secara berulang sehingga jawaban yang diperoleh belum tepat. Hal ini dapat terjadi karena siswa belum memahami teknik integrasi parsial secara berulang.
Penyelesaian 4	Soal seperti ini dapat dikerjakan dengan menggunakan pengintegralan parsial secara berulang, sehingga setelah memperoleh bentuk $\int u dv = uv - \int v du$ selanjutnya $\int v du$ diintegrasikan kembali dengan teknik integrasi parsial, begitu selanjutnya hingga diperoleh jawaban akhir yang sudah tidak mengandung pengintegralan.

Penyelesaian yang tepat untuk soal diatas adalah

$$\int x^2 \sin x dx = \dots$$

Misal:

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$$

$$dv = \sin x dx \Rightarrow v = \int \sin x dx = -\cos x$$

sehingga

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x dx &= -x^2 \cos x - \int -2x \cos x dx \\ &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx \rightarrow \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c \end{aligned}$$

dilakukan teknik integrasi secara parsial

Dari beberapa soal yang tertera sebelumnya, secara umum terlihat ada beberapa masalah yang sering terjadi dalam melakukan pengintegralan baik pengintegralan dengan substitusi maupun parsial. Masalah-masalah tersebut akan diuraikan lebih jelas pada paragraf berikut. Ketika siswa dihadapkan dengan soal integral, mereka cenderung masih merasa bingung harus menyelesaikan dengan teknik apa; apakah dengan pengintegralan sederhana, pengintegralan substitusi atau pengintegralan parsial. Selain itu, siswa juga merasa bingung dengan bagaimana cara melakukan permisalan dan apa yang harus dimisalkan agar soal tersebut dapat diselesaikan.

Pada masalah 1 dan 2, terlihat bahwa siswa belum menggunakan teknik integrasi substitusi tetapi masih menggunakan teknik integrasi sederhana. Hal ini dapat terjadi karena siswa belum memahami sepenuhnya perbedaan antara teknik integrasi sederhana dan substitusi.

Pada masalah 3, terlihat bahwa siswa belum menggunakan teknik integrasi parsial tetapi masih menggunakan teknik integrasi sederhana. Hal ini dapat terjadi karena siswa belum memahami sepenuhnya perbedaan antara teknik integrasi sederhana dan parsial.

Pada masalah 4 terlihat bahwa siswa sudah menggunakan teknik integrasi parsial. Namun, siswa melakukan beberapa kesalahan dalam

penyelesaiannya. Pada masalah tersebut, siswa belum menggunakan teknik integrasi berulang. Hal ini dapat terjadi karena siswa belum memahami teknik integrasi secara berulang.

4. SIMPULAN

Berdasarkan paparan materi dan pembahasan contoh soal pada bab sebelumnya, dapat ditarik beberapa kesimpulan, sebagai berikut:

- a. Problematika yang terjadi secara umum dalam penyelesaian soal integral antara lain:
 - 1) Siswa merasa bingung harus menggunakan teknik pengintegralan yang mana; dengan teknik integrasi sederhana, parsial maupun substitusi.
 - 2) Siswa merasa bingung tentang fungsi mana yang harus dimisalkan dan mana yang tidak atau bagaimana cara memisalkannya.
 - 3) Siswa belum memahami teknik integrasi parsial secara berulang.
- b. Untuk mengatasi problematika tersebut, terdapat alternatif pemecahannya adalah guru sebaiknya membimbing siswa agar siswa dapat membuat kesimpulan sendiri tentang perbedaan teknik integrasi tersebut. Untuk membantu guru dalam membimbing siswa maka guru dapat membuat mendesain Lembar Kerja Siswa (LKS) terstruktur sehingga siswa dapat berlatih dan menganalisa soal-soal yang berhubungan dengan integral. Hal ini diharapkan dapat membantu siswa dalam menentukan teknik integrasi mana yang dapat digunakan untuk menyelesaikan soal integral yang dihadapi, fungsi mana yang seharusnya dilakukan permisalan dan fungsi mana yang tidak serta pemikiran-pemikiran awal yang diperlukan sehingga siswa tidak mengalami kesulitan dalam menyelesaikan soal yang berhubungan dengan integral.

5. DAFTAR PUSTAKA

- Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan. (2014). *Matematika SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI*. Jakarta: Balitbang.
- Moleong, L.J. (2012). *Metodologi Penelitian Kualitatif*. Edisi Revisi. Bandung: Remaja Rosdakarya.
- Sugiyono. (2014). *Metode Penelitian Kuantitatif Kualitatif dan R&D*. Bandung: Alfabeta