KARAKTERISTIK GRUP YANG DIBANGUN OLEH MATRIKS N X N DENGAN ENTRI BILANGAN BULAT MODULO P, P PRIMA

Ibnu Hadi
Program Studi Matematika, Universitas Negeri Jakarta, Indonesia
ibnu_hadi@unj.ac.id , ibnu_unj@yahoo.co.id

Abstrak

Penelitian ini membahas konstruksi grup yang dibangun oleh matriks n x n dengan entri bilangan bulat modulo p, p prima. Studi pustaka dengan kajian teori dilakukan untuk mendapatkan penyelesaian pada penelitian ini. Himpunan matriks yang digunakan merupakan perumuman himpunan matriks modulo bilangan prima. Diberikan suatu nilai n positif yang merupakan bilangan bulat sebarang untuk dijadikan sebagai ukuran matriks n x n dan suatu bilangan prima sebarang p yang akan menentukan banyaknya matriks berukuran n x n modulo p. Jumlah matriks pada himpunan ditentukan menggunakan konsep rank matriks, kebebasan linier dan bergantung linier dengan mencari jumlah matriks singularnya terlebih dahulu. Jumlah matriks singular bergantung dari banyaknya matriks dengan rank 1, 2 sampai n – 1. Dengan melihat pola yang muncul, dapat ditentukan jumlah matriksnya secara keseluruhan. Selanjutnya, matriks yang digunakan pada grup merupakan matriks nonsingular dari himpunan matriks. Didapatkan bahwa grup yang terbentuk merupakan grup hingga. Subgrup nontrivial diberikan sebagai salah satu karakteristik yang muncul pada grup ini. Lebih lanjut, beberapa sifat yang mungkin dikaji disampaikan pada grup ini.

Kata Kunci: *modulo prima, rank matriks.*

1. PENDAHULUAN

Grup merupakan suatu struktur yang terdiri dari himpunan yang didalamnya terdefinisi suatu operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertutup, asosiatif, keberadaan identitas, invers. Pada teori grup, konstruksi suatu himpunan menjadi suatu grup menjadi hal menarik karena dapat memunculkan sifat-sifat baru yang berawal dari definisi grup itu sendiri. Pemilihan himpunan dan operasi yang terdefinisi didalamnya menentukan karakteristik suatu grup yang dibangun. Herstein, (1975) memunculkan contoh soal himpunan matriks nonsingular berukuran 2 x 2 dimana entri matriks-matriksnya merupakan bilangan bilangan bulat modulo prima p. Jika dipilih $p=2$, maka himpunan matrik tersebut memiliki 6 anggota. Lebih lanjut, jika dipilih $p=3$ maka himpunan tersebut memiliki 48 anggota. Permasalahannya adalah jika diambil bilangan prima p sebarang, maka matriks harus ditentukan sedemikian rupa sehingga didapatkan banyaknya anggota pada himpunan tersebut. Kerumitan pada himpunan ini terletak pada bagaimana menentukan banyaknya anggota yang mungkin ada. Hadi (2013) dan (2014) telah mendapatkan perumuman jumlah matriks untuk sebarang bilangan prima p untuk matriks 2 x 2 dan matriks yang berukuran 3 x 3. Sebagai kelanjutannya, maka penelitian ini akan memperluas himpunan matriks nonsingular menjadi berukuran n x n dimana entri dari matriks tersebut tetap bilangan-bilangan bulat modulo prima p. Jika diberikan suatu bilangan prima sebarang p, maka himpunan matriks nonsingular berukuran n x n merupakan himpunan hingga. Kerumitan yang muncul pertama kali adalah penentuan banyaknya anggota himpunan matriks tersebut. Karena banyaknya anggota himpunan ini bergantung dari nilai p, maka jumlah elemen himpunan ini akan relatif banyak. Pada himpunan seperti inilah akan didefinisikan suatu grup terhadap perkalian matriks dan akan ditelusuri karakteristik yang dapat dimunculkan dari grup tersebut. Grup ini juga akan menjadi contoh untuk jenis grup berorde hingga dengan karakteristik khusus yang relatif sulit untuk dikonstruksi. Lebih lanjut, hasil penelitian ini penting karena akan mendapatkan suatu perumuman dari kasus khusus pada teori grup. Dari hasil temuan ini diharapkan untuk dapat dikembangkan lebih lanjut menggunakan teori-teori yang ada di dalam aljabar pada umumnya.

Misalkan didefinisikan himpunan matriks berukuran n x n dengan entri bilangan bulat modulo prima p, maka dapat dituliskan dengan notasi berikut

$$G=\left\{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \middle| a_{11},\ldots,a_{nn}\in Z_p, p\,prima, \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right)\neq 0\right\}$$

Perhatikan bahwa $I_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\in G$. Jadi $G\neq 0$. Lebih lanjut, jumlah matriks di dalam G (orde dari himpunan G) yaitu $o\left(G\right)=p^n$. Pertanyaannya adalah berapa banyak matriks pada G yang singular maupun singular ?

Pada kasus matriks berukuran 2x2, maka akan didapatkan himpunan matriks nonsingular

$$G=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

dengan masing-masing matriks merupakan bilangan bulat modulo 2. Dalam hal ini, jelas $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in G$. Dapat dikatakan bahwa ($o\left(G\right)=6$). Untuk matriks berukuran 2 x 2 dengan entri bilangan bulat modulo p, p bilangan prima, didapatkan dari Hadi, I, (2013) yaitu $o\left(G\right)=p^4-\left(\left(2p-1\right)^2+\left(p-1\right)^3\right)$ dan jika diambil $p=3$, maka akan didapat $o\left(G\right)=48$ dan untuk $p=5$ akan didapatkan $o\left(G\right)=480$. Selanjutnya, dari Hadi (2014) , untuk matriks berukuran 3 x3 , maka jumlah matriks nonsingularnya mengikuti bentuk $o(G)=\left(p-1\right)^3 p^3\left(p+1\right)\left(p^2+p+1\right)$. Rumusan ini menjadi berbeda secara signifikan untuk setiap nilai bilangan prima. Sebagai contoh, jika p = 2, maka akan didapat $o(G)=168$. Sedangkan untuk p = 3, akan didapat $o(G)=11232$. Jumlah yang cukup banyak untuk diperhitungkan secara manual dan mencari bentuk matriksnya menjadi membosankan. Karena itu perlu dicari suatu prosedur yang ringkas untuk menentukan jumlah matriks secara umum.

Berikut ini beberapa konsep yang akan digunakan dalam menyelesaikan permasalahan pada penelitian ini.

1.1 Definisi. Misalkan $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ adalah suatu himpunan tak kosong dari vektor, maka persamaan $k_1v_1+k_2v_2+\ldots+k_rv_r=0$ memiliki paling sedikit satu (trivial) penyelesaian yaitu $k_1=k_2=\ldots=k_r=0$. Jika hanya ini merupakan solusinya, maka S disebut himpunan bebas linear. Sebaliknya, S disebut himpunan yang bergantung linear.

1.1 Teorema. (Anton, 2005) Suatu himpunan S dengan dua atau lebih vektor merupakan

a. Bergantung linear jika dan hanya jika terdapat vektor di S yang dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari vektor lain yang ada di S.
b. Bebas linear jika dan hanya jika tidak ada vektor di S yang dapat ditulis sebagai kombinasi linear vektor-vektor di S.

1.2 Definisi. Dimensi dari ruang baris dan ruang kolom dari suatu matriks A disebut rank dari A dan dinotasikan dengan $rank(A)$.

1.2 Teorema. (Anton, 2005) Suatu matriks A berukuran m x m dikatakan nonsingular jika dan hanya jika $rank(A)=m$.

Perhatikan matriks berukuran n x n berikut.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Jika setiap entri dari matriks di atas merupakan bilangan bulat modulo bilangan prima p, maka akan didapat jumlah matriks sebanyak p^{n^2}. Jumlah yang cukup banyak jika diambil n, p yang cukup besar. Lebih lanjut, untuk menentukan matriks ini singular atau tidak juga merupakan hal yang tidak mudah dan memerlukan prosedur yang baik untuk memastikannya. Oleh karena itu, pada pembahasan akan diberikan suatu ide bagaimana memilah himpunan matriks G dengan $o(G)=p^{n^2}$ sedemikian sehingga didapatkan hanya matriks yang nonsingular saja.

1.3 Definisi. Suatu himpunan tak kosong G dikatakan membentuk suatu grup jika pada G terdefinisi suatu operasi biner, disebut *product* (hasil kali) dan dinotasikan dengan "$\cdot$" sedemikian sehingga berlaku:

a. Jika $a,b\in G$ maka $a\cdot b\in G$ (sifat tertutup pada grup).
b. Jika $a,b,c\in G$ maka $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ (sifat asosiatif pada grup).

c. Terdapat suatu elemen $e \in G$ sedemikian sehingga $a \cdot e = e \cdot a = a$ untuk semua $a \in G$ (eksistensi dari elemen identitas di G).

d. Untuk setiap $a \in G$ terdapat suatu elemen $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ (eksistensi invers di G).

Lebih lanjut, jika berlaku $a \cdot b = b \cdot a$ untuk setiap $a, b \in G$, maka grup tersebut di sebut grup komutatif (grup Abelian). (Herstein, 1975)

Jika himpunan pada grup merupakan himpunan hingga maka grup seperti ini dinamakan grup hingga. Jika hinpunan pada grup merupakan himpunan takhingga maka grup ini merupakan grup takhingga. Banyaknya himpunan pada suatu grup, disebut dengan orde dari grup, dinotasikan dengan $o(G)$. Misalkan G himpunan matriks bilangan bulat berukuran nxn. Tulis

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \middle| a_{11}, \ldots, a_{nn} \in \mathrm{Z} \right\}$$

Ambil $A, B \in G$. Dapat ditulis

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Dari teori matriks, maka $A \times B \in G$. Lebih lanjut, jika $A, B, C \in G$ maka berlaku $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C \in G$. Perhatikan bahwa $G \neq \emptyset$ karena $I_n \in G$. Akan tetapi jika diambil matriks nonsingular di G, maka matriks tersebut tidak memiliki invers. Jadi haruslah himpunan matriks G merupakan himpunan matriks nonsingular.

1.1 Lemma. (Herstein, 1975) Suatu subhimpunan tak kosong H dari grup G adalah suatu subgrup dari G jika dan hanya jika

a. Jika $a, b \in H$ maka $ab \in H$.

b. Jika $a \in H$ maka $a^{-1} \in H$.

1.4 Teorema. (Herstein, 1975) Jika G suatu grup hingga dan H suatu subgrup dari G, maka $o(H)$ suatu pembagi dari $o(G)$

1.4 Definisi. Jika G suatu grup dan $a \in G$, orde (periode) dari a adalah bilangan bulat positif terkecil m sedemikian sehingga $a^m = e$.

1.5 Definisi. Suatu subgrup N dari G dikatakan suatu subgrup normal dari G jika untuk setiap $g \in G$ dan $n \in N$ berlaku $gng^{-1} \in N$.

2. METODE PENELITIAN

Tulisan ini menggunakan metode penelitian kajian teori dari berbagai sumber yang relevan dengan materi yang dibahas. Penelitian ini dimulai dengan menemukan permasalahan tentang perluasan contoh suatu grup. Hadi (2013) dan (2014) sudah menemukan perumuman bentuk untuk kasus khusus bilangan prima dengan ukuran matriks 2 x 2 dan 3 x 3. Penelitian ini di mulai dengan mencari teori yang relevan dan paling mudah untuk digunakan dalam mencari jumlah matriks berukuran n x n modulo bilangan prima p. Dalam hal ini, teori yang dipilih menggunakan konsep rank matriks, kebebasan dan bergantung linier dari suatu vektor. Dapat dianggap bahwa elemen baris dari suatu matriks n x n merupakan vektor baris. Selanjutnya, banyaknya jumlah dari himpunan matriks ini dengan cara menentukan jumlah matriks singularnya terlebih dahulu. Ternyata, muncul beberapa kemungkinan bentuk dari matriks singular ini berdasarkan rank matriksnya. Selanjutnya, ditentukan suatu pola jumlah matriks dari setiap kasus yang muncul sehingga total jumlah matriks singular dapat ditemukan. Dari hasil inilah akan didapatkan jumlah matriks nonsingular yang nantinya akan dikonstruksi menjadi grup dan dicari beberapa karakteristiknya. Sebagai tambahan, penelitian ini masih belum selesai karena banyak sekali sifat dari grup yang belum dikaji. Masih terbuka kemungkinan pengembangan dari matriks ini dikaitkan dengan konsep grup, gelanggang ataupun konsep-konsep aljabar lainnya.

3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Misalkan diberikan himpunan matriks

$$G=\left\{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \middle| a_{11},\dots,a_{nn}\in Z_p, p\, prima, \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right)\neq 0\right\}$$

Akan ditentukan berapa jumlah matriks nonsingular pada G. Idenya adalah dengan melihat berapa banyak jumlah matriks singularnya lebih dulu. Dalam hal ini, beberapa kemungkinan matriks singular yang terbentuk yaitu

Kasus 1.
Untuk matriks dengan rank nol, maka akan didapat **satu dan hanya satu** matriks yaitu matriks nol berukuran n x n.

Kasus 2. Untuk matriks berukuran nxn dengan rank satu, terdapat beberapa kemungkinan yaitu

a. Jika baris pertama sampai baris ke – (n – 1) dari matriks berbentuk $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, maka baris ke – n dari matriks tidak boleh berbentuk $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$. Akibatnya, akan ada sebanyak $p^n - 1$ kemungkinan untuk matriks seperti ini. Perhatikan bentuk representasi matriks yang memenuhi kriteria ini.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0_{(n-1)1} & 0_{(n-1)2} & \cdots & 0_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

dengan $a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}$ tidak semua nol.

b. Jika baris pertama sampai baris ke – (n – 2) berbentuk $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, maka baris ke–n merupakan kelipatan dari baris ke – (n – 1). Misalkan baris ke–(n – 1) berbentuk $\begin{bmatrix} a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)n} \end{bmatrix}$, maka baris ke–n haruslah berbentuk $\begin{bmatrix} ka_{(n-1)1} & ka_{(n-1)2} & \cdots & ka_{(n-1)n} \end{bmatrix}$ dengan $k = 0,1,\ldots, p-1$. Karena terdapat $p^n - 1$ kemungkinan untuk menghasilkan baris ke – (n – 1), maka jumlah untuk matriks berukuran nxn dengan kasus ini sebanyak $\left(p^n - 1\right)p$. Sebagai ilustrasi, perhatikan matriks berikut.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)n} \\ ka_{(n-1)1} & ka_{(n-1)2} & \cdots & ka_{(n-1)n} \end{bmatrix}$$

dengan $a_{(n-1)1}, a_{(n-1)2}, \ldots, a_{(n-1)n}$ tidak semua nol dan $k = 0,1,\ldots, p-1$.

c. Jika baris pertama sampai baris ke – (n – 3) pada matriks n x n berbentuk $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ maka baris ke – n dan baris ke – (n – 1) merupakan kelipatan dari baris ke – (n – 2). Misalkan baris ke – (n – 2) berbentuk $\begin{bmatrix} a_{(n-2)1} & a_{(n-2)2} & \cdots & a_{(n-2)n} \end{bmatrix}$ maka baris ke – n dan baris ke – (n – 1) masing-masing akan berbentuk $\begin{bmatrix} ma_{(n-2)1} & ma_{(n-2)2} & \cdots & ma_{(n-2)n} \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} na_{(n-2)1} & na_{(n-2)2} & \cdots & na_{(n-2)n} \end{bmatrix}$ dengan $m, n = 0,1,\ldots, p-1$. Karena terdapat $p^n - 1$ kemungkinan untuk menghasilkan baris ke – (n – 2), maka jumlah untuk matriks berukuran nxn dengan kasus ini sebanyak $\left(p^n - 1\right)p^2$. Sebagai ilustrasi, perhatikan bentuk martiks berukuran nxn berikut

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{(n-2)1} & a_{(n-2)2} & \cdots & a_{(n-2)n} \\ ma_{(n-2)1} & ma_{(n-2)2} & \cdots & ma_{(n-2)n} \\ na_{(n-2)1} & na_{(n-2)2} & \cdots & na_{(n-2)n} \end{bmatrix}$$

dimana $a_{(n-2)1}, a_{(n-2)2}, \ldots, a_{(n-2)n}$ tidak semua nol dan $m, n = 0,1,\ldots, p-1$. Jika diperhatikan polanya, maka banyaknya matriks dengan rank 1 dapat ditulis dalam bentuk $\left(p^n - 1\right)\sum_{k=0}^{n-1} p^k$ dengan p bilangan prima, n ukuran matriks nxn.

Kasus 3.

Untuk matriks berukuran nxn dengan rank 2, maka kemungkinannya adalah

a. Jika baris pertama sampai baris ke – (n – 2) berbentuk $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ maka baris ke – (n – 1) dan ke – n keduanya tidak bisa berbentuk $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ dan saling bebas linier. Jadi jika baris ke – (n – 1) berbentuk $\begin{bmatrix} a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)n} \end{bmatrix}$ dan baris ke – n dapat berbentuk sebarang kecuali $\begin{bmatrix} la_{(n-1)1} & la_{(n-1)2} & \cdots & la_{(n-1)n} \end{bmatrix}$ dengan $l = 0,1,\ldots, p-1$. Lebih lanjut, karena terdapat $p^n - 1$ untuk membentuk baris ke – (n – 1) dan $p^n - p$ cara membentuk baris ke – n, maka terdapat sebanyak $\left(p^n - 1\right)\left(p^n - p\right)$ matriks yang memenuhi syarat ini.

b. Jika baris pertama sampai baris ke – (n – 3) berbentuk $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, baris ke – (n – 2) tidak berbentuk $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ dan baris ke – (n – 1) merupakan kelipatan dari baris ke – (n – 2), maka baris ke – n harus bebas linier terhadap baris ke – (n – 2). Karena terdapat $p^n - 1$ cara untuk membentuk baris ke – (n – 2), p cara untuk membentuk baris ke – (n – 1) dan $p^n - p$ cara membentuk baris ke – n, maka terdapat sebanyak $\left(p^n - 1\right)\left(p^n - p\right)p$ untuk matriks dengan jenis ini.

c. Jika pertama sampai baris ke – (n – 3) berbentuk $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ dan baris ke – (n – 2) tidak berbentuk $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, baris ke – (n – 1) bebas linier terhadap baris ke – (n – 2), maka baris ke – n harus merupakan kombinasi linier dari baris ke – (n – 2) dan baris ke – (n – 1). Jadi jika baris ke – (n – 2) berbentuk $\begin{bmatrix} a_{(n-2)1} & a_{(n-2)2} & \cdots & a_{(n-2)n} \end{bmatrix}$ dan baris ke – (n – 1) berbentuk $\begin{bmatrix} a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)n} \end{bmatrix}$ maka baris ke – n berbentuk $\begin{bmatrix} xa_{(n-2)1}+ya_{(n-1)1} & xa_{(n-2)2}+ya_{(n-1)2} & \cdots & xa_{(n-2)n}+ya_{(n-1)n} \end{bmatrix}$ dengan $x, y = 0,1,\ldots, p-1$. Karena terdapat p^n-1 cara untuk membentuk baris ke – (n – 2), sebanyak p^2 cara untuk membentuk baris ke – n, maka terdapat $\left(p^n-1\right)\left(p^n-p\right)p^2$ matriks dengan jenis ini. Jika ditotal, maka banyaknya matriks berukuran nxn dengan rank 2 sejumlah $\left(p^n-1\right)\left(p^n-p\right)\sum_{k=0}^{n-1} p^k$. Lebih lanjut, dengan cara yang serupa, banyaknya matriks berukuran n x n dengan rank 3 sejumlah $\left(p^n-1\right)\left(p^n-p\right)^2\sum_{k=0}^{n-1} p^k$ sehingga didapatkan jumlah matriks dengan rank (n-1) sebanyak $\left(p^n-1\right)\left(p^n-p\right)^{n-2}\sum_{k=0}^{n-1} p^k$. Jadi, jumlah seluruh matriks singular pada himpunan matriks G adalah

$$1+\left(p^n-1\right)\sum_{j=0}^{n-2}\left[\left(p^n-p\right)^j\sum_{k=0}^{n-1} p^k\right].$$

Dari sini, disimpulkan banyaknya anggota himpunan yaitu

$$p^{n^2}-\left[1+\left(p^n-1\right)\sum_{j=0}^{n-2}\left[\left(p^n-p\right)^j\sum_{k=0}^{n-1} p^k\right]\right]$$

atau

$$o\left(G\right)=p^{n^2}-\left[1+\left(p^n-1\right)\sum_{j=0}^{n-2}\left[\left(p^n-p\right)^j\sum_{k=0}^{n-1} p^k\right]\right]$$

Dari hal ini, maka dapat grup dengan himpunan matriks berukuran nxn dengan entri bilangan bulat modulo prima p dapat dibentuk. Grup ini merupakan grup hingga dengan orde bergantung pemilihan nilai n dan p.

Lebih lanjut, grup yang dibangun oleh himpunan matriks G merupakan grup non-Abelian (tidak komutatif) karena berdasarkan sifat-sifat pada teori matriks, terdapat $A, B \in G$ sedemikian sehingga $A\cdot B \neq B\cdot A$. Jika dimisalkan

$$H=\left\{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \middle| a_{11},\ldots,a_{nn}\in \mathbb{Z}_p,\, p\,prima, \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right)=1\right\}$$

maka dapat dibuktikan bahwa H membentuk subgrup dari G.

Permasalahan selanjutnya yang dapat dikaji adalah jika diambil sebarang $A \neq I_n \in G$, misalkan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Akan ditentukan bilangan bulat positif terkecil m sedemikian sehingga $A^m = I_n$. Artinya, harus ditemukan suatu pangkat dari matriks A sedemikian sehingga hasil kalinya merupakan matriks identitas di G. Jika $A = A^{-1}$, maka $A^2 = I$. Permasalahan ini menjadi menarik dan terbuka untuk diselesaikan. Diharapkan pada penulisan selanjutnya, dapat ditemukan bilangan bulat positif terkecil m sehingga $A^m = I_n$ untuk $A \neq A^{-1} \neq I_n$.Permasalahan lain yang mungkin bisa dikaji adalah mencari koset dari grup G jika diketahui orde dari subgrup H. Dalam hal ini, penulis belum mendapatkan hasil yang relevan. Diharapkan jika sudah diketahui kaitan antara grup, subgrup dan kosetnya, akan ditemukan karakteristik dari grup G terutama terkait kenormalan dari subgrup-subgrupnya.

4. SIMPULAN

Kesimpulan pada penelitian ini antara lain bahwa grup yang dibangun dari matriks berukuran n x n dengan entri bilangan bulat modulo prima p merupakan grup hingga dengan jumlah elemen bergantung dari nilai n dan p. Grup ini jelas memiliki subgrup trivial. Tetapi untuk mengkonstruksi subgrup nontrivialnya diperlukan pembahasan lebih lanjut. Orde dari setiap elemennya perlu ditemukan bentuknya secara umum.

Sebagai tindak lanjutnya penelitian, disarankan agar semua sifat yang sudah dikenal di dalam teori grup dapat ditelaah pada grup ini.

5. DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard dan Chris Rorres, (2005), *Elementary Linear Algebra 9nd ed.*, John Wiley and Sons, New York

Burton, David M, (2002), *Elementary Number Theory*,McGraw Hill

Durbin, John R, (2005), *Modern Algebra An Introduction 6nd ed*, John Wiley and Sons, New York

Herstein, I.N, (1975), *Topics in Algebra*, John Wiley and Sons, New York

Hungerford, Thomas W, (1974), *Algebra*, Springer-Verlag, New York

Hadi, I, (2013), *Karakteristik Grup yang Dibangun oleh Himpunan Matriks Berukuran 2x2 Dengan Entri Bilangan Bulat Modulo P*, Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika, Malang, 18 Mei 2013.

Hadi, I., Mahatma, Y (2014), *The Properties of Group of 3x3 Matrices Over Integers Modulo Prime Numbers*, Proceeding of International Conference On Research, Implementation And Education Of Mathematics And Sciences 2014, Yogyakarta State University. 18-20 May 2014.