

METODE BEDA HINGGA PADA KESTABILAN PERSAMAAN DIFUSI KOMPLEKS DIMENSI SATU

Danar Ardian Pramana, M.Sc¹⁾

¹⁾DIV Teknik Informatika Politeknik Harapan Bersama
danar_ardian@ymail.com

Abstrak

Pada naskah makalah ini dibahas pendekatan beda hingga pada persamaan difusi. Persamaan differensial parsial dan masalah syarat awal dan syarat batas merupakan pokok bahasan terapan matematika yang salah satunya diterapkan dalam bidang fisika, sebagai contoh yaitu persamaan difusi dengan diikuti oleh syarat awal dan syarat batas. Persamaan difusi ini menggunakan bilangan kompleks pada konstantanya yang biasa disebut dengan persamaan difusi kompleks. Persamaan difusi dimensi satu berbentuk $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$, dengan koefisien $D = D_R + iD_I$, dengan D_R dan D_I adalah real. Kondisi stabilitas pada persamaan difusi kompleks dimensi satu akan diberikan. Stabilitas dari metode numeric adalah menjaga agar selisih antara hasil yang diperoleh dari pendekatan beda hingga dengan solusi eksaknya tidak membesar dengan bertambahnya waktu. Permasalahannya adalah mencari kondisi yang dapat menekan selisih antara solusi yang diperoleh dari pendekatan beda hingga dengan solusi analitik agar tetap berhingga pada saat waktu menuju tak hingga. Kondisi ini dapat ditentukan dengan memilih selang waktu Δt secara tepat. Metode penelitian yang digunakan dalam makalah ini adalah studi literatur. Untuk ilustrasi hasilnya, diberikan contoh numeric berdasarkan metode eksplisit pada persamaan difusi kompleks dimensi satu.

Kata Kunci: beda hingga kestabilan; persamaan difusi.

1. PENDAHULUAN

Proses difusi umum digunakan dalam bidang ilmu terapan. Metode beda hingga merupakan suatu metode yang digunakan untuk menentukan nilai turunan dari suatu fungsi pada titik tertentu, selanjutnya dapat diperoleh solusi menggunakan metode ini. Salah satunya adalah untuk mendapatkan solusi dari persamaan difusi diperoleh dari Humidan Miller (1992). Kestabilan persamaan difusi dengan konstanta kompleks diperoleh dengan memilih selang waktu Δt secara tepat agar selisih antara hasil yang diperoleh dari pendekatan beda hingga dengan solusi eksaknya tidak membesar dengan bertambahnya waktu yang diperoleh dari Crank(1975) dan Granvile (2005). Makalah ini akan membahas penerapan metode beda hingga pada persamaan difusi kompleks dimensi satu. Permasalahan yang akan dibahas pada makalah ini adalah membentuk pendekatan beda hingga untuk persamaan difusi kompleks mencari kondisi stabilitas pada pendekatan beda hingga untuk persamaan difusi kompleks seperti pada Aderito Ara'ujo, Sivia Barbeiro, Pedro Serranho (2012). Tujuan dari penelitian ini adalah mengetahui

pendekatan beda hingga untuk persamaan difusi kompleks dan mengetahui kondisi stabilitas pada pendekatan beda hingga untuk persamaan difusi kompleks. Sedangkan manfaat yang dapat diperoleh dari penelitian ini adalah memberikan pengetahuan tentang penggunaan pendekatan beda hingga untuk persamaan difusi kompleks dan memberikan kondisi stabilitas pada pendekatan beda hingga untuk persamaan difusi kompleks.

2. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam makalah ini adalah studi literatur. Penulis mempelajari konsep dasar persamaan difusi. Selain itu penulis mempelajari konsep dasar kestabilan. Penulis juga aktif dengan penulis *paper* yang menjadi acuan dalam penyelesaian makalah ini. Penulis mempelajari konsep dasar skema beda hingga dengan menggunakan Deret Taylor. Dalam makalah ini hanya digunakan syarat batas Neumann. Penelitian selanjutnya adalah menentukan kondisi stabilitas pada persamaan tersebut. Kemudian dibuat program untuk lebih menjelaskan hasil dari kondisi stabilitas persamaan difusi kompleks.

3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

a. Metode Beda Hingga Persamaan Difusi Kompleks Dimensi Satu

Berikut akan diberikan konstruksi metode beda hingga terhadap waktu dan terhadap variabel x . Diberikan interval terbuka $\Omega \subset R$, dengan syarat batas $\Gamma = \delta\Omega, \Omega = (a, b)$ dengan $a, b \in R$. Diberikan $Q = \Omega \times (0, T]$, dengan $T > 0$, dan $u: \bar{Q} = \bar{\Omega} \times [0, T]$. Digunakan proses difusi nonlinear dengan koefisien

$$D = D_R + iD_I$$

Dengan D_R dan D_I adalah fungsi real. Asumsikan juga bahwa

$$D_R(x, t, u) \geq 0, (x, t) \in \bar{Q}. \tag{1}$$

Didefinisikan syarat awal dan syarat batas dari fungsi u

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ x &\in (0, L), t \in (0, T], \\ u(x, 0) &= u_0(x), x \in \bar{\Omega}, \\ \alpha u(x, t) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= 0, x \in \Gamma, t \in [0, T], \end{aligned} \tag{2}$$

Dengan $\frac{\partial u}{\partial x}$ dinotasikan sebagai turunan normal x ke Γ yang diperoleh dari Suli (2000).

Konstruksi *grid point* pada $\bar{Q} = \bar{\Omega} \times [0, T]$, yang merupakan interval tertutup berupa

$$0 = t^0 < t^1 < \dots < t^{M-1} < t^M = T,$$

Dengan $M \geq 1$ dan $t^{m+1} - t^m = \Delta t^m$, $m = 0, 1, \dots, M - 1$. h didefinisikan sebagai *space grid* dengan $N \geq 2, \Delta t = \max \Delta t^m$.

Diberikan titik-titik *grid*

$x_j = (a + jh)$, $j = 0, \dots, N$ dengan $h = \frac{(b-a)}{N}$. Titik-titik *grid* ini merupakan konstruksi dari mesh yang berupa $\bar{\Omega}_h = \{x_j | j = 0, \dots, N\}$.

Definisikan *mesh* pada $\bar{Q} = \bar{\Omega}_h \times [0, T]$ dinotasikan sebagai $\bar{Q}_h^{\Delta t}$ yang merupakan konstruksi dari *space grid* $\bar{\Omega}_h$ dan *grid* dengan domain waktu. Diambil $\Omega_h^{\Delta t} = \bar{Q}_h^{\Delta t} \cap Q$ dan $\Gamma_h^{\Delta t} = \bar{Q}_h^{\Delta t} \cap \Gamma \times [0, T]$. Dinotasikan V_j^m nilai dari fungsi *mesh* V , didefinisikan pada $\bar{Q}_h^{\Delta t}$ di titik (x_j, t^m) .

Didefinisikan pendekatan beda hingga maju dan mundur, terhadap waktu berturut-turut

$$\begin{aligned} \delta^+ V_j^m &= \frac{V_{j+1}^m - V_j^m}{h}, \\ \delta^- V_j^m &= \frac{V_j^m - V_{j-1}^m}{h}, \\ U_t &= \frac{U_j^{m+1} - U_j^m}{\Delta t^m}, \end{aligned}$$

diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{U_j^{m+1} - U_j^m}{\Delta t^m} &= D \delta_x^+ (\delta_x^- U_j^{m+\theta}) \\ x &\in (0, L), t \in (0, T), \\ U_j^0 &= u_0(x_j), \\ \alpha U_j^m + \frac{\beta}{2} (\delta_x^+ U_j^m + \delta_x^- U_j^m) &= 0, \\ x &\in \Gamma, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3)$$

Dengan U_j^m merupakan pendekatan dari $u(x_j, t^m)$. Untuk memudahkan, didefinisikan

$$U_j^{m+\theta} = \theta U_j^{m+1} + (1 - \theta) U_j^m,$$

$\theta \in [0, 1]$. Jika $\theta = 0$, maka metode bedahingga Persamaan (3) merupakan Metode Eksplisit, jika $\theta = 1$, maka Metode beda hingga Persamaan (3) merupakan metode Implisit, jika $\theta = \frac{1}{2}$, maka metode beda hingga Persamaan (3) merupakan Metode Crank-Nicolson yang terdapat pada Suli(2000).

b. Kestabilan Persamaan Difusi Kompleks Dimensi Satu

Teorema. Jika $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$ maka kondisi pada Persamaan (3) stabil tanpa syarat. Jika $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$, maka kondisi pada Persamaan (3) stabil, dengan

$$\begin{aligned} \Delta t^m &\leq \frac{h^2}{2(1 - 2\theta) \max_{D_R} |D|^2} \\ m &= 1, \dots, M - 1 \quad (*) \end{aligned}$$

Danter dapat ξ yang berlaku

$$0 < \xi \leq D_R \quad \forall j, m. \quad (**)$$

Bukti.

Persamaan dipisah berdasarkan bagian real dan bagian imajiner nya (U_R, U_I), dengan $U = (U_0, \dots, U_N)$. Akan dibuktikan kestabilan dengan pendekatan bedahingga, $U_j^m \approx u(x_j, t^m)$, $j = 0, \dots, N$, $m = 0, \dots, M$. Kemudian U_{Rj}^m merupakan bagian real dari U_j^m dan U_{Ij}^m merupakan bagian imajiner dari U_j^m . Demikian pula D_R merupakan bagian real dari D dan D_I merupakan bagian imajiner dari D . Diperoleh

$$\frac{U_j^m - U_j^{m-1}}{\Delta t^m} = D \delta_x^+ (\delta_x^- U_j^m),$$

Dapat dibentuk menjadi

$$\frac{U_{Rj}^{m+1} + IU_{Ij}^{m+1} - (U_{Rj}^m + IU_{Ij}^m)}{\Delta t^m} = (D_R + ID_I) \delta_x^+ (\delta_x^- (U_{Rj}^{m+\theta} + IU_{Ij}^{m+\theta})).$$

Pemisahan berdasarkan bagian real dan bagian imajiner nya:

$$\begin{aligned} \frac{U_{Rj}^{m+1} - U_{Rj}^m}{\Delta t^m} &= D_R \delta_x^+ (\delta_x^- U_{Rj}^{m+\theta}) - \delta D_{Ix}^+ (\delta_x^- U_{Ij}^{m+\theta}), \\ \frac{U_{Ij}^{m+1} - U_{Ij}^m}{\Delta t^m} &= ID_I \delta_x^+ (\delta_x^- U_{Rj}^{m+\theta}) + D_R \delta_x^+ (\delta_x^- IU_{Ij}^{m+\theta}), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} U_{Rj}^0 &= u_{Rj}^0(x_j), U_{Ij}^0 = u_{Ij}^0(x_j), \\ \delta_x^+ U_{R0}^m + \delta_x^- U_{R0}^m &= 0, \\ \delta_x^+ U_{RN}^m + \delta_x^- U_{RN}^m &= 0, \\ \delta_x^+ U_{I0}^m + \delta_x^- U_{I0}^m &= 0, \\ \delta_x^+ U_{RN}^m + \delta_x^- U_{RN}^m &= 0. \end{aligned}$$

(5)

Didefinisikan *inner product*

$$(U, V)_h = \frac{h}{2} U_0 \bar{V}_0 + \sum_{j=1}^{N-1} h U_j \bar{V}_j + \frac{h}{2} U_N \bar{V}_N \quad (6)$$

dan

$$(U, V)_{h^*} = \sum_{j=1}^N h U_j \bar{V}_j \quad (7)$$

Dengan didefinisikan norm

$$\begin{aligned} \|U\|_h &= (U, U)_h^{1/2} \text{ dan} \\ \|U\|_{h^*} &= (U, U)_{h^*}^{1/2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Kalikan kedua persamaan (4) dengan $U_R^{m+\theta}$ dan $U_I^{m+\theta}$ berturut-turut, menggunakan sifat hasil kali dalam $(\dots)_h$ yang diperoleh dari Anton(1995), dan menjumlahkan tiap bagian sehingga diperoleh

$$\frac{U_R^{m+1} - U_R^m}{\Delta t^m} - \delta_x^+ (D_R \delta_x^- U_R^{m+\theta}) = -\delta_x^+ (D_I \delta_x^- U_I^{m+\theta}).$$

Kalikan dengan $U_R^{m+\theta}$, sehingga diperoleh

$$\left(\frac{U_R^{m+1} - U_R^m}{\Delta t^m}, U_R^{m+\theta} \right)_h + \left\| (D_R)^{1/2} \delta_x^- U_R^{m+\theta} \right\|_{h^*}^2 = (D_I \delta_x^- U_I^{m+\theta}, \delta_x^- U_R^{m+\theta})_{h^*}. \quad (9)$$

Selanjutnya pada bagian imajineranya kalikan dengan $U_I^{m+\theta}$, sehingga diperoleh

$$\left(\frac{U_I^{m+1} - U_I^m}{\Delta t^m}, U_I^{m+\theta}\right)_h + \left\| (D_R)^{1/2} \delta_x^- U_I^{m+\theta} \right\|_{h^*}^2 = (D_I \delta_x^- U_R^{m+\theta}, \delta_x^- U_I^{m+\theta})_{h^*}. \tag{10}$$

Dari penjumlahan persamaan (9) dan (10) diperoleh

$$\left(\frac{U_R^{m+1} - U_R^m}{\Delta t^m}, U_R^{m+\theta}\right)_h + \left(\frac{U_I^{m+1} - U_I^m}{\Delta t^m}, U_I^{m+\theta}\right)_h + \left\| (D_R)^{1/2} \delta_x^- U^{m+\theta} \right\|_{h^*}^2 = 0. \tag{11}$$

Dibentuk persamaan

$$U^{m+\theta} = \Delta t^m \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \frac{U^{m+1} - U^m}{\Delta t^m} + \frac{U^{m+1} + U^m}{2}. \tag{12}$$

Dari persamaan (11) dan (12) diperoleh

$$\begin{aligned} & \left(\frac{U_R^{m+1} - U_R^m}{\Delta t^m}, \Delta t^m \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \frac{U_R^{m+1} - U_R^m}{\Delta t^m} + \frac{U_R^{m+1} + U_R^m}{2}\right)_h + \\ & \left(\frac{U_I^{m+1} - U_I^m}{\Delta t^m}, \Delta t^m \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \frac{U_I^{m+1} - U_I^m}{\Delta t^m} + \frac{U_I^{m+1} + U_I^m}{2}\right)_h + \\ & \left\| (D_R)^{1/2} \delta_x^- U^{m+\theta} \right\|_{h^*}^2 = 0. \end{aligned}$$

Selanjutnya penjabaran pada ruas kiri,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{U^{m+1} - U^m}{\Delta t^m}, \Delta t^m \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \frac{U^{m+1} - U^m}{\Delta t^m} + \frac{U^{m+1} + U^m}{2}\right)_h + \\ & = \Delta t^m \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \left\| \frac{U^{m+1} - U^m}{\Delta t^m} \right\|_h^2 + \frac{\|U^{m+1}\|_h^2 - \|U^m\|_h^2}{2\Delta t^m}. \end{aligned}$$

Dari persamaan (11) diperoleh

$$\begin{aligned} & \Delta t^m \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \left\| \frac{U_R^{m+1} - U_R^m}{\Delta t^m} \right\|_h^2 + \frac{\|U_R^{m+1}\|_h^2 - \|U_R^m\|_h^2}{2\Delta t^m} \\ & + \Delta t^m \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \left\| \frac{U_I^{m+1} - U_I^m}{\Delta t^m} \right\|_h^2 + \frac{\|U_I^{m+1}\|_h^2 - \|U_I^m\|_h^2}{2\Delta t^m} \\ & + \left\| (D_R)^{1/2} \delta_x^- U^{m+\theta} \right\|_{h^*}^2 = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Untuk kasus $\theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \theta - \frac{1}{2} \leq 0$,

diperoleh

$$\begin{aligned} & \frac{\|U_R^{m+1}\|_h^2 - \|U_R^m\|_h^2}{2\Delta t^m} \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \|U_R^{m+1}\|_h^2 \leq \|U_R^m\|_h^2, \quad m = 0, \dots, M-1. \end{aligned}$$

dan

$$\frac{\|U_I^{m+1}\|_h^2 - \|U_I^m\|_h^2}{2\Delta t^m} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \|U_I^{m+1}\|_h^2 \leq \|U_I^m\|_h^2, \quad m = 0, \dots, M - 1. \tag{14}$$

Selanjutnya,

$$\left\| \frac{U^{m+1} - U^m}{\Delta t^m} \right\|_h^2 = \left\| \frac{U_R^{m+1}}{\Delta t^m} - \frac{U_R^m}{\Delta t^m} \right\|_h^2 + \left\| \frac{U_I^{m+1} - U_I^m}{\Delta t^m} \right\|_h^2. \tag{15}$$

Dari Persamaan (4) diubah dalam bentuk Metode Eksplisit dan dengan menggunakan definisi norm, menggunakan syarat batas dan sifat $(a - b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, diperoleh

$$\begin{aligned} \left\| \frac{U_R^{m+1} - U_R^m}{\Delta t^m} \right\|_h^2 &= \frac{4}{h^2} (\|D_R \delta_x^- U_R^{m+\theta}\|_{h^*}^2 + \|D_I \delta_x^- U_I^{m+\theta}\|_{h^*}^2) - \\ &\quad \frac{8}{h} \sum_{j=1}^N D_R \delta_x^- U_{R_{j+1}}^{m+\theta} D_I \delta_x^- U_{I_j}^{m+\theta}. \end{aligned} \tag{16}$$

Dari Persamaan (4) diperoleh

$$\begin{aligned} \left\| \frac{U_I^{m+1} - U_I^m}{\Delta t^m} \right\|_h^2 &\leq \frac{4}{h^2} (\|D_I \delta_x^- U_R^{m+\theta}\|_{h^*}^2 + \|D_R \delta_x^- U_I^{m+\theta}\|_{h^*}^2) + \\ &\quad \frac{8}{h} \sum_{j=1}^N D_R \delta_x^- U_{R_{j+1}}^{m+\theta} D_I \delta_x^- U_{I_j}^{m+\theta}. \end{aligned} \tag{17}$$

Dari Persamaan (14), (16) dan (17) diperoleh

$$\left\| \frac{U^{m+1} - U^m}{\Delta t^m} \right\|_h^2 \leq \frac{4}{h^2} \max \frac{|D|^2}{D_R} \left\| (D_R)^{1/2} \delta_x^- U^{m+\theta} \right\|_{h^*}^2. \tag{18}$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned} &\frac{\|U_R^{m+1}\|_h^2 - \|U_R^m\|_h^2}{2\Delta t^m} + \frac{\|U_I^{m+1}\|_h^2 - \|U_I^m\|_h^2}{2\Delta t^m} + \left\| (D_R)^{1/2} \delta_x^- U^{m+\theta} \right\|_{h^*}^2 \\ &= \Delta t^m \left(\frac{1}{2} - \theta \right) \left\| \frac{U^{m+1} - U^m}{\Delta t^m} \right\|_h^2, \end{aligned}$$

Dengan asumsi (*), diperoleh persamaan

$$\begin{aligned} &\frac{\|U_R^{m+1}\|_h^2 - \|U_R^m\|_h^2}{2\Delta t^m} \leq 0 \\ \Leftrightarrow &\|U_R^{m+1}\|_h^2 \leq \|U_R^m\|_h^2, \\ &m = 0, \dots, M - 1 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} &\frac{\|U_I^{m+1}\|_h^2 - \|U_I^m\|_h^2}{2\Delta t^m} \leq 0 \\ \Leftrightarrow &\|U_I^{m+1}\|_h^2 \leq \|U_I^m\|_h^2, \\ &m = 0, \dots, M - 1. \end{aligned}$$

Diperoleh pada kasus $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, Persamaan (4) stabil dengan syarat (*).

c. Ilustrasi Hasil Metode Beda Hingga Persamaan Difusi Kompleks Dimensi Satu

Diberikan bentuk metode beda hingga pada persamaan difusi kompleks sdimensi satu:

$$\frac{U_j^{m+1} - U_j^m}{\Delta t^m} = D\delta_x^+(\delta_x^-U_j^{m+\theta}), x \in (O, L), t \in (O, T], U_j^0 = u_0(x_j),$$

$$\alpha U_j^m + \frac{\beta}{2}(\delta_x^+U_j^m + \delta_x^-U_j^m) = 0, x \in \Gamma, t \in [O, T].$$

Selanjutnya pada contoh persamaan difusi kompleks dimensi satu ini yang terdapat pada Aderito Ara'ujo, Sivia Barbeiro, Pedro Serranho (2012), diberikan $h = 1$, dan syarat awal

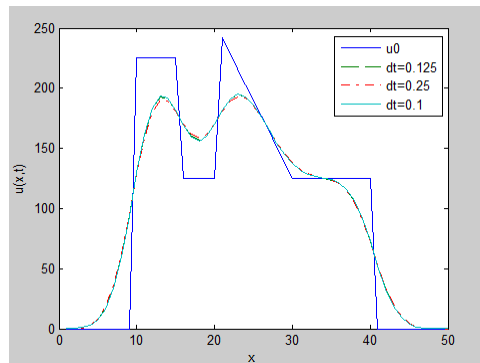
$$U(x, 0) = 255, \quad 10 \leq x \leq 15$$

$$U(x, 0) = 155, \quad 15 < x \leq 20$$

dan $30 \leq x \leq 45$

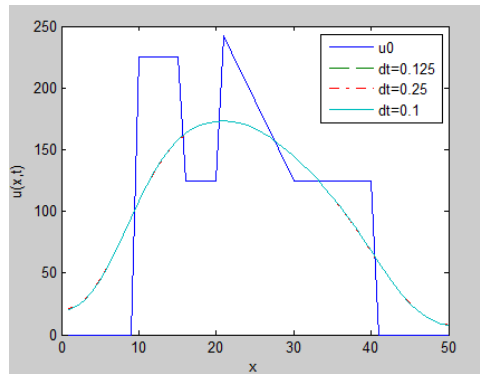
$$U(x, 0) = \frac{255(30 - x)}{10} + \frac{125}{10}(x - 20), 20 \leq x \leq 30.$$

Proses numeric menggunakan bantuan program Matlab. Pertama menggunakan variasi Δt , yaitu $\Delta t = 0.1, \Delta t = 0.125, \Delta t = 0.25, T = 2$, dan koefisien difusi $d = 1 + i$, didapat-kan output seperti pada Gambar 1. Pada Gambar 1, ilustrasi meng-gunakan 3 step dengan permukaan grafik yang kasar. Berdasarkan Teorema 3.1, metode beda hingga stabil dengan syarat $\Delta t \leq 0.25$. Selanjutnya pada $\Delta t = 0.1, \Delta t = 0.125, \Delta t = 0.25$ metode stabil.



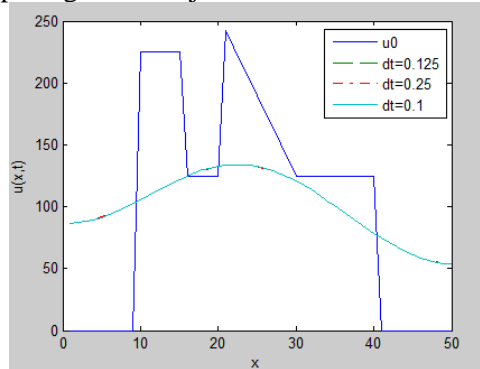
Gambar 1. $\Delta t = 0.1, \Delta t = 0.125, \Delta t = 0.25, T = 2$

Kedua menggunakan $\Delta t = 0.1, \Delta t = 0.125, \Delta t = 0.25, T = 10$, dan koefisien difusi $d = 1 + i$ didapatkan output seperti pada Gambar 2. Pada Gambar 2, ilustrasi menggunakan 3 step. Berdasarkan Teorema 3.1, metode beda hingga stabil dengan syarat $\Delta t \leq 0.25$. Selanjutnya pada $\Delta t = 0.1, \Delta t = 0.125, \Delta t = 0.25$, metode stabil dan permukaan lebih halus.



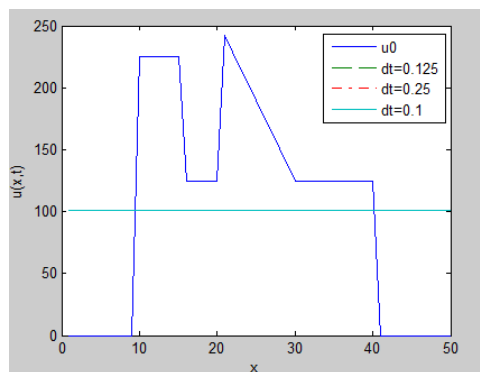
Gambar 2. $\Delta t = 0.1, \Delta t = 0.125, \Delta t = 0.25, T = 10$

Ketiga menggunakan $\Delta t = 0.1, \Delta t = 0.125, \Delta t = 0.25, T = 50$ dan koefisien difusi $d = 1 + i$ didapatkan output seperti pada Gambar 3. Pada Gambar 3, ilustrasi menggunakan 3 step. Berdasarkan Teorema 3.1, metode beda hingga stabil dengan syarat $\Delta t \leq 0.1$. Telihat pada grafik menjadi lebih halus dari ketika $T = 50$.



Gambar 3. $\Delta t = 0.1, \Delta t = 0.125, \Delta t = 0.25, T = 50$

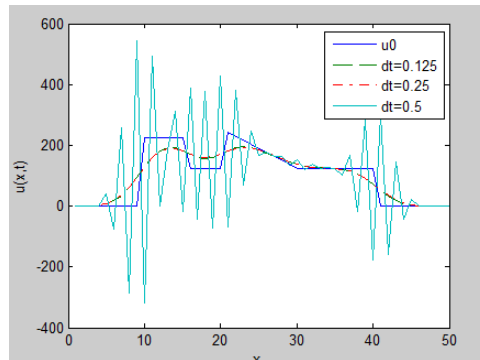
Selanjutnya $T = 1500$ seperti pada Gambar 4 terlihat pada grafik menjadi garis lurus, yang sesuai dengan syarat Neumann.



Gambar 4. $\Delta t = 0.1, \Delta t = 0.125, \Delta t = 0.25, T = 1500$

Selanjutnya menggunakan $\Delta t = 0.125, \Delta t = 0.25, \Delta t = 0.5, T = 2$, dan koefisien difusi $d = 1 + i$ di-dapatkan output seperti pada Gambar 5. Pada

Gambar5, ilustrasi menggunakan 3 step. Berdasarkan Teorema 3.1, metode beda hingga stabil dengan syarat $\Delta t \leq 0.25$. Selanjutnya pada $\Delta t = 0.5 > 0.25$, metode tidak stabil terlihat dari permukaan yang kasar.



Gambar 5. $\Delta t = 0.125$,
 $\Delta t = 0.25, \Delta t = 0.5, T = 2$

4. SIMPULAN

- a. Diberikan interval terbuka $\Omega \subset R$ dengan syarat batas $\Gamma = \delta\Omega$,

$$\Omega = (a, b)$$

dengan $a, b \in R$. Diberikan $Q = \Omega \times (0, T]$, dengan $T > 0$, dan $u: \bar{Q} = \bar{\Omega} \times [0, T]$. Digunakan proses difusi nonlinear dengan koefisien $D = D_R + iD_I$, dengan D_R dan D_I adalah fungsi real. Asumsikan juga bahwa

$$D_R \geq 0.$$

Diberikan MSAB dari fungsi u

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, (x, t) \in Q, D \in R \\ u(x, 0) = u_0(x), x \in \bar{\Omega}, \\ \alpha u(x, t) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0, x \in \Gamma, t \in [0, T], \end{cases}$$

Dengan $\frac{\partial u}{\partial x}$ dinotasikan sebagai turunan normal x ke Γ .

Bentuk metode beda hingga dari MSAB di atas adalah

$$\frac{U_j^{m+1} - U_j^m}{\Delta t^m} = D \delta_x^+ (\delta_x^- U_j^{m+\theta})$$

$$U_j^0 = u_0(x_j)$$

$$\alpha U_j^m + \frac{\beta}{2} (\delta_x^+ U_j^m + \delta_x^- U_j^m) v = 0$$

Dengan U_j^m merupakan pendekatan dari $u(x_j, t^m)$.

- b. Diberikan kondisi stabilitas pada MSAB di atas yaitu sebagai berikut:

Jika $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$ maka kondisi pada metode beda hingga di atas stabil tanpa syarat.

Jika $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$, maka kondisi pada metode beda hingga di atas stabil dengan

$$\Delta t^m \leq \frac{h^2}{2(1-2\theta) \max \frac{|D|^2}{D_R}}, \quad m = 1, \dots, M-1$$

Dan terdapat ξ yang berlaku

$$0 < \xi \leq D_R \quad \forall j, m.$$

5. DAFTAR PUSTAKA

- Anton, Howard.(1995), *Aljabar Linear Elementer*. Erlangga: Jakarta.
- Crank.(1975). *mathematics of difusion*. Oxford University Press: London.
- Granvile.(2005).*The Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations*.AJOHAN WILEY &SONS, INC., PUBLICATION: Texas.
- Humi, M., and Miller, W.B.(1992).*Boundary Value Problems and Partial Differen-tial Equations*. United Stated of America: PWS KENT Publi-shing Company,.
- Suli.(2000). *Finite Element Methods for Partial Differential Equations, Lecture notes*.Universityof Oxford, Oxford, UK.
- Aderito Ara'ujo, SiviaBarbeiro, Pedro Serranho. (2012). *Stability of Finite Diffrence Schemes for Complex Diffusion Processes*.Siam J. Numer.Anal.Vol. 50, No. 3, pp. 1284–1296