DEFINISI INTEGRAL RIEMANN MELALUI PENDEKATAN BARISAN FUNGSI TANGGA

Muslich[1], Sutrima[2] dan Supriyadi Wibowo[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika FMIPA UNS,
muslich_mus@yahoo.com, zutrima@yahoo.com, supriyadi_w@yahoo.co.id

Abstrak

Pernyataan biimplikasi $f:[a,b]\to\mathcal{R}$ *terintegral Riemann pada* $[a,b]$ *ditulis* $f\in R[a,b]$ *jika dan hanya jika terdapat barisan fungsi tangga* $<\phi_n>$ *dan* $<\varphi_n>$ *pada* $[a,b]$ *sehingga* $\phi_n\le f\le\varphi_n$ *untuk semua n dan* $\lim_{n\to\infty}\int_a^b(\varphi_n-\phi_n)\to 0$ *dapat diangkat sebagai definisi deskriptif integral Riemann. Dari pernyataan tersebut dibahas sifat-sifat integral terkait dan diperoleh hasil antara lain* (i) $R[a,b]$ *merupakan ruang linear dan* (ii) *setiap fungsi tangga, fungsi kontinu dan fungsi monoton adalah terintegral Riemann.*

Kata Kunci: *fungsi tangga, integral Riemann, limit barisan fungsi.*

1. PENDAHULUAN

Bartle (1994) mendeskripsikan integral Riemann dengan konsep berikut, fungsi terbatas $f:[a,b]\to\mathcal{R}$ dikatakan terintegral Riemann pada $[a,b]$ ditulis dengan $f\in R[a,b]$ jika dan hanya jika $I=J$ atau nilai integral bawah Riemann sama dengan nilai integral atas Riemann fungsi f pada $R[a,b]$. Dengan diperkenalkan konsep tersebut diperoleh beberapa sifat terkait sebagaimana pada pembahasan teori integral pada umumnya, seperti Gordon (1994) dalam pembahasan sifat-sifat dasar dari integral dekriptif Lebesgue, integral konstruktif McShane maupun integral konstruktif Henstock. Demikian juga pembahasan integral Henstock oleh Lee Peng Yee (1989). Berdasarkan pada integral McShane tersebut, Jae Myung Park *et al.* (2010) juga berhasil mengkonstruksi integral M_α fungsi bernilai real $f:[a,b]\to\mathcal{R}$ dengan membahas sifat-sifat integral terkait. Hal ini dilanjutkan oleh Muslich (2012) dengan pembahasan sifat-sifat integral konstruktif M_α fungsi di ruang berdimensi–n atau $\mathcal{R}^n$. Penelitian teori integral berjalan terus seperti halnya Lee Peng Yee dan Rudolf Vyborne (2000) dalam tulisannya memberikan suatu problema (open problem) tentang konsep integral Riemann dengan versi beda yaitu bahwa fungsi $f:[a,b]\to\mathcal{R}$ terintegral Riemann pada $[a,b]$ jika dan hanya jika terdapat barisan fungsi tangga $<\phi_n>$ dan $<\varphi_n>$ pada $[a,b]$ sehingga $\phi_n\le f\le\varphi_n$ untuk semua $n=1,2,3,\ldots$ dan berlaku $\lim_{n\to\infty}\int_a^b(\varphi_n-\phi_n)\to 0.$ Dari problema tersebut penulis berkeinginan membuktikan pernyataan biimplikasi Lee Peng Yee dan Rudolf Vyborne (2000) dan selanjutnya mengkaji sifat-sifat integral Riemann terkait.

2. METODE PENELITIAN

Diberikan fungsi terbatas $f:[a,b] \to \mathcal{R}$ dan partisi $P_n = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\} \in \pi[a,b]$. Didefinisikan

$$m_i = \inf\{f(x): x \in [x_{i-1}, x_i]\} \text{ dan } M_i = \sup\{f(x): x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Untuk setiap $n = 1,2,3, \dots$ dikontruksikan fungsi tangga

$$\phi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i K_{[x_{i-1},x_i]}(x) : P_n \in \pi[a,b]$$

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i K_{[x_{i-1},x_i]}(x) : P_n \in \pi[a,b]$$

dengan $K_{[x_{i-1},x_i]}(x)$ adalah fungsi karakteristik pada $[a,b]$ yang bersesuaian dengan partisi $P_n = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\} \in \pi[a,b]$ dan notasi

$$I = \sup\{\textstyle\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}): P_n \in \pi[a,b]\} = \sup\{\int \phi_n : \phi_n \le f\} = \underline{\int_a^b} f$$

$$J = \inf\{\textstyle\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}): P_n \in \pi[a,b]\} = \inf\{\int \varphi_n : \varphi_n \ge f\} = \overline{\int_a^b} f$$

berturut-turut disebut integral bawah Riemann dan integral atas Riemann fungsi f pada $R[a,b]$. Untuk keperluan pembahasan terdapat beberapa rujukan pernyataan antara lain oleh Bartle (1994) dalam bentuk teorema maupun definisi berikut.

Teorema 2.1 ***J****ika $f:[a,b] \to \mathcal{R}$ kontinu pada $[a,b]$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi tangga φ pada $[a,b]$ sehingga $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$.* .

Definisi 2.2. *Diberikan fungsi terbatas $f:[a,b] \to \mathcal{R}$. Fungsi f terintegral Riemann pada $[a,b]$ ditulis $f \in R[a,b]$ jika $I = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = J$.*

Konsep fungsi tangga dan Definisi 2.2 digunakan untuk membuktikan kebenaran pernyataan biimplikasi Lee Peng Yee dan Rudolf Vyrborne (2000), sedangkan Teorema 2.1 digunakan untuk menunjukkan setiap fungsi kontinu adalah terintegral Riemann. Selanjutnya dengan terbuktinya kebenaran pernyataan biimplikasi yang menyatakan fungsi $f:[a,b] \to \mathcal{R}$ terintegral Riemann pada $[a,b]$ jika dan hanya jika terdapat barisan fungsi tangga $< \phi_n >$ dan $< \varphi_n >$ pada $[a,b]$ sehingga $\phi_n \le f \le \varphi_n$ untuk semua $n = 1,2,3, \dots$ dan berlaku $\lim_{n\to\infty} \int_a^b (\varphi_n - \phi_n) \to 0$ dalam matematika analisis dapat diangkat menjadi sebuah definisi. Langkah berikutmya adalah mengkaji beberapa sifat terkait hubungannya dengan keintegralan Riemann berdasarkan pada pernyataan biimplikasi Lee Peng Yee dan Rudolf Vyrborne (2000) tersebut yang tertulis dalam Teorema 3.1.

3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Teorema 3.1 berikut merupakan pernyataan biimplikasi dari Lee Peng Yee dan Rudolf Vyrborne (2000) yang merupakan problema yang akan dibuktikan kebenarannya. Pernyataan biimplikasi tersebut berhubungan dengan masalah keintegral Riemann maka biimplikasi itu dapat diangkat sebagai definisi deskriptif untuk integral Riemann.

Teorema 3.1. *Diberikan fungsi terbatas* $f:[a,b]\to\mathcal{R}$. *Fungsi* f *terintegral Riemann pada* $[a,b]$ *ditulis* $f\in R[a,b]$ *jika dan hanya jika terdapat barisan* barisan fungsi tangga $<\phi_n>$ dan $<\varphi_n>$ pada $[a,b]$ sehingga $\phi_n\le f\le\varphi_n$ untuk semua n dan $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b(\varphi_n-\phi_n)\to 0$.

Bukti: 1. Syarat perlu. Diketahui $f\in R[a,b]$ menurut Definisi 2.2 maka berlaku $I=\underline{\int_a^b} f=\overline{\int_a^b} f=J$, dengan

$$I=\underline{\int_a^b} f=\sup\{\textstyle\sum_{i=1}^n m_i(x_i-x_{i-1}):P_n\in\pi[a,b]\}$$

$$J=\overline{\int_a^b} f=\inf\{\textstyle\sum_{i=1}^n M_i(x_i-x_{i-1}):P_n\in\pi[a,b]\}$$

Untuk setiap $n=1,2,3,\dots$ didefinisikan fungsi tangga

$$\phi_n(x)=\textstyle\sum_{i=1}^n m_iK_{[x_{i-1},x_i]}(x)\ \text{ sesuai } P_n\in\pi[a,b]$$

$$\varphi_n(x)=\textstyle\sum_{i=1}^n M_iK_{[x_{i-1},x_i]}(x)\ \text{ sesuai } P_n\in\pi[a,b]$$

dimana $K_{[x_{i-1},x_i]}(x)$ adalah fungsi karakteristik pada $[a,b]$ yang bersesuaian dengan $P_n\in\pi[a,b]$. Karena untuk setiap $x\in[x_{i-1},x_i]$ berlaku $m_i\le f(x)\le M_i$, $1\le i\le n$ maka $\phi_n\le f\le\varphi_n$ untuk semua $n=1,2,3,\dots$ dan berlaku

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_a^b(\varphi_n-\phi_n)&=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\textstyle\sum_{i=1}^n(M_i-m_i)\,K_{[x_{i-1},x_i]}(x)dx\\&=inf\{\textstyle\sum_{i=1}^n M_i(x_i-x_{i-1}):P_n\in\pi[a,b]\}\\&\quad-sup\{\textstyle\sum_{i=1}^n m_i(x_i-x_{i-1}):P_n\in\pi[a,b]\}\\&=inf\{\int\varphi_n:\varphi_n\ge f\}-sup\{\int\phi_n:\phi_n\le f\}\\&=(\overline{\int_a^b} f-\underline{\int_a^b} f)\to 0.\end{aligned}$$

2. Syarat cukup. Dari hipotesis terdapat barisan fungsi tangga $<\phi_n>$ dan $<\varphi_n>$ pada $[a,b]$ sehingga $\phi_n\le f\le\varphi_n$ untuk semua $n=1,2,3,\dots$ dan $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b(\varphi_n-\phi_n)\to 0$.

Misalkan fungsi tangga ϕ_n dan φ_n pada $[a,b]$ berturut-turut adalah

$$\phi_n(x)=\textstyle\sum_{i=1}^n c_iK_{[x_{i-1},x_i]}(x)\ \text{ sesuai } P_n\in\pi[a,b] \text{ dan } c_i \text{ konstan,}$$

$$\varphi_n(x)=\textstyle\sum_{i=1}^n C_iK_{[x_{i-1},x_i]}(x)\ \text{ sesuai } P_n\in\pi[a,b] \text{ dan } C_i \text{ konstan.}$$

Karena $\phi_n\le f\le\varphi_n$ maka $c_i\le f\le C_i$ untuk semua $n=1,2,3,\dots$ dan berlaku

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b(\varphi_n-\phi_n)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\textstyle\sum_{i=1}^n(C_i-c_i)\,K_{[x_{i-1},x_i]}(x)dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\sum_{i=1}^n C_i\,K_{[x_{i-1},x_i]}(x)dx-\lim_{n\to\infty}\int_a^b\sum_{i=1}^n c_i\,K_{[x_{i-1},x_i]}(x)dx$$

$$=\inf\left\{\sum_{i=1}^n C_i(x_i-x_{i-1}):P_n\in\pi[a,b]\right\}-\sup\left\{\sum_{i=1}^n c_i(x_i-x_{i-1}):P_n\in\pi[a,b]\right\}\to 0$$

$$inf\left\{\sum_{i=1}^n C_i(x_i-x_{i-1}):P_n\in\pi[a,b]\right\}=sup\left\{\sum_{i=1}^n c_i(x_i-x_{i-1}):P_n\in\pi[a,b]\right\}$$

$$inf\left\{\int\varphi_n:\varphi_n\ge f\right\}=sup\left\{\int\phi_n:\phi_n\le f\right\}$$

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$$

Berakibat $J = I$, menurut Definsi 2.2 maka $f \in R[a,b]$. Dengan demikian teorema terbukti. □

Teorema 3.2 *$R[a,b]$ merupakan ruang linear yaitu jika $f, g \in R[a,b]$ dan $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ maka $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$ dan berlaku $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.*

Bukti: Karena f dan g terintegral Riemann pada $[a,b]$ maka terdapat barisan fungsi tangga $< \phi_n >$ dan $< \varphi_n >$ pada $[a,b]$ sedemikian hingga $\phi_n \leq f \leq \varphi_n$ dan berlaku $\lim_{n\to\infty} \int_a^b (\varphi_n - \phi_n) \to 0$, dan barisan fungsi tangga tangga $< \phi_n^* >$ dan $< \varphi_n^* >$ pada $[a,b]$ sedemikian hingga $\phi_n^* \leq g \leq \varphi_n^*$ dan berlaku $\lim_{n\to\infty} \int_a^b (\varphi_n^* - \phi_n^*) \to 0$. Diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (\alpha\varphi_n + \beta\varphi_n^*) - (\alpha\phi_n + \beta\phi_n^*) = \alpha \lim_{n\to\infty} \int_a^b (\varphi_n - \phi_n) + \beta \lim_{n\to\infty} \int_a^b (\varphi_n^* - \phi_n^*) \to 0$$

Menurut Teorema 3.1 maka $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$ dan berlaku

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\alpha f + \beta g) &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b (\alpha\varphi_n + \beta\varphi_n^*) \\
&= \alpha \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n + \beta \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n^* = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g. \\
&= \alpha \sup\left\{\int_a^b \phi_n : \phi_n \text{ fungsi tangga}, \phi_n \leq f\right\} \\
&\quad + \beta \sup\left\{\int_a^b \phi_n^* : \phi_n^* \text{ fungsi tangga}, \phi_n^* \leq g\right\} \\
&= \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g
\end{aligned}$$

Dengan demikian teorema terbukti. □

Teorema 3.3 *Jika $f: [a,b] \to \mathcal{R}$ fungsi tangga maka $f \in R[a,b]$.*

Bukti: Untuk setiap $n = 1,2,3,\ldots$ didefinisikan fungsi tangga $\phi_n = \varphi_n = f$ maka berlaku $\phi_n \leq f \leq \varphi_n$ dan berakibat $\lim_{n\to\infty} \int_a^b (\varphi_n - \phi_n) \to 0$. Menurut Teorema 3.1 maka $f \in R[a,b]$. Dengan demikian teorema terbukti.□

Teorema 3.4 *Jika $f: [a,b] \to \mathcal{R}$ kontinu maka $f \in R[a,b]$.*

Bukti: Karena f kontinu pada $[a,b]$ maka menurut Teorema 2.1 untuk setiap bilangan $n = 1,2,3,\ldots$ terdapat fungsi tangga s_n pada [a,b] sehingga berlaku $|f(x) - s_n(x)| < \frac{1}{n}$ dan berakibat $s_n(x) - \frac{1}{n} < f(x) < s_n(x) + \frac{1}{n}$.

Untuk setiap $n = 1,2,3,\ldots$ didefinisikan fungsi tangga $\phi_n(x) = s_n(x) - \frac{1}{n}$ dan $\varphi_n(x) = s_n(x) + \frac{1}{n}$ jelas bahwa $\phi_n \leq f \leq \varphi_n$ dan berlaku

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (\varphi_n - \phi_n) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b ((s_n + \tfrac{1}{n}) - (s_n - \tfrac{1}{n}))$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_a^b \frac{2}{n} dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}(b-a) \to 0.$$

Menurut Teorema 3.1 maka $f \in R[a,b]$. Jadi teorema terbukti. □

Teorema 3.5 *Diberikan fungsi* $f:[a,b] \to \mathcal{R}$. *Jika f monoton pada* [a,b] *maka* $f \in R[a,b]$.

Bukti: Dibuktikan untuk *f* fungsi monoton naik, sedangkan untuk *f* monoton turun dibuktikan secara analog. Untuk setiap $n = 1,2,3,\ldots$ didefinisikan partisi $P_n = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$ dengan $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$. Diambil $m_i = f(x_{i-1})$ dan $M_i = f(x_i)$ dan didefinisikan fungsi tangga

$$\phi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i K_{[x_{i-1},x_i]}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\, K_{[x_{i-1},x_i]}(x)$$

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} M_i K_{[x_{i-1},x_i]}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, K_{[x_{i-1},x_i]}(x)$$

Jelas bahwa $\phi_n \le f \le \varphi_n$ dan berlaku

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (\varphi_n - \phi_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\ \frac{b-a}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a) \to 0.$$

Menurut Teorema 3.1 maka $f \in R[a,b]$ Jadi teorema terbukti. □

Teorema 3.6 *Diberikan fungsi* $f, g:[a,b] \to \mathcal{R}$ *Jika f dan g terintegral Riemann pada* $[a,b]$ *dengan* $f \le g$ *maka* $\int_a^b f \le \int_a^b g$.

Bukti: Karena *f* dan *g* terintegral Riemann pada $[a,b]$ maka terdapat barisan fungsi tangga $< \phi_n >$ dan $< \varphi_n >$ pada $[a,b]$ sedemikian hingga $\phi_n \le f \le \varphi_n$ dan barisan fungsi tangga $< \phi_n^* >$ dan $< \varphi_n^* >$ pada $[a,b]$ sedemikian hingga $\phi_n^* \le g \le \varphi_n^*$. Jadi

$$\sup\left\{\int_a^b \phi_n : \phi_n \text{ fungsi tangga}, \phi_n \le f\right\} \le \sup\left\{\int_a^b \phi_n^* : \phi_n^* \text{ fungsi tangga}, \phi_n^* \le g\right\}$$

berakibat $\underline{\int_a^b} f \le \underline{\int_a^b} g$. Berdasarkan asumsi *f* dan *g* terintegral Riemann pada $[a,b]$ maka $\underline{\int_a^b f} = \int_a^b f$ dan $\underline{\int_a^b g} = \int_a^b g$. Berakibat $\int_a^b f \le \int_a^b g$. Dengan demikian teorema terbukti. □

Teorema 3.7 *Diberikan fungsi* $f:[a,b] \to \mathcal{R}$ *terbatas dan* $c \in (a,b)$. *Fungsi f terintegral Riemann pada* $[a,b]$ *jika dan hanya jika f terintegral Riemann pada* $[a,c]$ *dan* $[c,b]$ *dan berlaku* $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Bukti: (1) Syarat perlu. Karena f terintegral Riemann pada $[a,b]$ maka terdapat barisan fungsi tangga $< \phi_n >$ dan $< \varphi_n >$ pada $[a,b]$ sedemikian hingga $\phi_n \le f \le \varphi_n$ dan berlaku $\lim_{n\to\infty} \int_a^b (\varphi_n - \phi_n) \to 0$. Jelas bahwa $\phi_n \le f \le \varphi_n$ pada $[a,c]$ dan berlaku $\lim_{n\to\infty} \int_a^c (\varphi_n - \phi_n) \to 0$ dan $\phi_n \le f \le \varphi_n$

pada $[c,b]$ dan berlaku $\lim_{n\to\infty}\int_c^b(\varphi_n-\phi_n)\to 0$. Dengan demikian fungsi f terintegral Riemann pada $[a,c]$ dan $[c,b]$ dan berlaku

$$\begin{aligned}\int_a^b f &= \sup\left\{\int_a^b \phi_n : \phi_n \text{ fungsi tangga}, \phi_n \le f\right\}\\ &= \sup\left\{\int_a^c \phi_n : \phi_n\, fungsi\ tangga, \phi_n \le f\right\}\\ &\quad + \sup\left\{\int_c^b \phi_n : \phi_n \text{ fungsi tangga}, \phi_n \le f\right\}\\ &= \int_a^c f + \int_c^b f\ .\end{aligned}$$

(2) Syarat cukup. Menurut hipotesa *f* terintegral Riemann pada $[a,c]$dan $[c,b]$ maka terdapat barisan fungsi tangga $<\phi_{1n}>$ dan $<\varphi_{1n}>$ pada $[a,c]$ sedemikian hingga $\phi_{1n}\le f\le\varphi_{1n}$ dan berlaku $\lim_{n\to\infty}\int_a^c(\varphi_{1n}-\phi_{1n})\to 0$ dan terdapat barisan fungsi tangga $<\phi_{2n}>$ dan $<\varphi_{2n}>$ pada $[c,b]$ sedemikian hingga $\phi_{2n}\le f\le\varphi_{2n}$ dan berlaku $\lim_{n\to\infty}\int_c^b(\varphi_{2n}-\phi_{2n})\to 0$.
Didefinisikan barisan fungsi tangga $<\phi_n>$ dan $<\varphi_n>$ pada $[a,b]$ dengan

$$\phi_n(x)=\begin{cases}\phi_{1n}(x), & x\in[a,c)\\ \phi_{2n}(x), & x\in[c,b]\end{cases} \text{ dan } \varphi_n(\mathrm{x}) = \begin{cases}\varphi_{2n}(\mathrm{x})\ , & x\in[a,c)\\ \varphi_{2n}(\mathrm{x})\ , & x\in[c,b]\end{cases}$$

maka $\phi_n\le f\le\varphi_n$ pada $[a,b]$ dan berlaku

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b(\varphi_n-\phi_n)=\lim_{n\to\infty}\int_a^c(\varphi_{1n}-\phi_{1n})+\lim_{n\to\infty}\int_c^b(\varphi_{2n}-\phi_{2n})\to 0$$

Menurut Teorema 3.1 maka $f\in R[a,b]$ dan berlaku

$$\begin{aligned}\int_a^c f+\int_c^b f &= \sup\left\{\int_a^c \phi_{1n} : \phi_{1n} \text{ fungsi tangga}, \phi_{1n}\le f\right\}\\ &\quad + \sup\left\{\int_c^b \phi_{2n} : \phi_{2n} \text{ fungsi tangga}, \phi_{2n}\le f\right\}\\ &= \sup\left\{\int_a^b \phi_n : \phi_n \text{ fungsi tangga}, \phi_n\le f\right\}=\int_a^b f.\end{aligned}$$

Jadi teorema terbukti. □

Integral Riemann telah dikenal sebagai integral tipe konstruktif. Namun pada tulisan ini semua pembahasan integral Riemann didekati melalui barisan fungsi tangga. Tepatnya pembahasan integral Riemann melalui kebenaran biimplikasi yang menyatakan bahwa fungsi *f* terintegral Riemann pada $[a,b]$ jika dan hanya jika terdapat barisan fungsi tangga $<\phi_n>$ dan $<\varphi_n>$ pada $[a,b]$ sehingga $\phi_n\le f\le\varphi_n$ untuk semua *n* dan $\lim_{n\to\infty}\int_a^b(\varphi_n-\phi_n)\to 0$ bisa dijadikan sebuah definisi deskriptif untuk integral Riemann. Hal demikian menambah cara pandang dalam pembahasan integral Riemann dengan pendekatan model baru secara deskriptif.

4. SIMPULAN

Pernyataan biimplikasi bahwa fungsi *f* terintegral Riemann pada $[a,b]$ jika dan hanya jika terdapat barisan fungsi tangga $<\phi_n>$ dan $<\varphi_n>$ pada $[a,b]$ sehingga $\phi_n\le f\le\varphi_n$ untuk semua *n* dan $\lim_{n\to\infty}\int_a^b(\varphi_n-\phi_n)\to 0$ dapat diangkat sebagai definisi deskriptif integral Riemann. Berdasarkan pembahasan diperoleh hasil tentang sifat-sifat integral terkait antara lain (i) $R[a,b]$ merupakan ruang linear dan (ii) setiap fungsi tangga, fungsi kontinu dan fungsi monoton adalah terintegral Riemann.

5. DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R. G. (1994). *Introduction to Real Analysis*. Second Edition, John Willey & Sons, Singapore.

Gordon, R. A. (1994). *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock.* Graduate Studies in Mathematics. Volume 4. American Mathematical Society.

Jae Myung Park, Hyung Won Ryu, and Hoe Kyung Lee, (2010). The-M_α Integral. *Journal of The Chungcheong Mathematical Society*. 23(1), 99-108.

Lee Peng Yee. (1989). *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*. Series in Real Analysis Vo.2. World Scientific, Singapore.

Lee Peng Yee and Rudolf Vyborny. (2000). *Integral*: *An Easy Approach After Kurzweil And Henstock.* University Press, Cambridge.

Muslich. (2012). Lemma Henstock pada Integral M_α di Ruang Berdimensi-*n*. *Prosiding Konferensi Nasional Matematika XVI*. Diselenggarakan oleh FMIPA UNPAD Bandung, ISBN: 978-602-19590-2-2, 18 Juli 2012 (hal. 177-184).