NILAI MAKSIMUM DAN MINIMUM PELABELAN- γ PADA GRAF LINTANG

RiaWahyu Wijayanti[1], DwiMaryono, S.Si., M.Kom[2]
MahasiswaPascaSarjana UNS[1], Dosen FKIP UNS[2]
riaa.ww@gmail.com[1], dwimarus@yahoo.com[2]

Abstrak

Pelabelan γ suatu graf G dengan order atau banyak vertex |V(G)| dan size atau banyak edge |E(G)| didefinisikan sebagai fungsi satu-satu $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, ..., |E(G)|\}$ yang menghasilkan sebuah pelabelan $f' : E(G) \rightarrow \{1, 2, ..., |E(G)|\}$, sebagai label edge diperoleh dari selisih label vertex pada kedua ujung edge, dinotasikan sebagai $f'(e) = |f(u) - f(v)|$ untuk setiap edge $e = (u, v)$ pada G. Nilai pada pelabelan γ adalah $val(f) = \sum_{e \in E(G)} f'(e)$. Nilai maksimum untuk pelabelan γ pada G dinotasikan $val_{max}(G) = max\{val(f)\}$. Sedangkan nilai minimum untuk pelabelan γ pada G dinotasikan $val_{min}(G) = min\{val(f)\}$. Tujuan penelitian ini adalah dapat menentukan nilai maksimum dan minimum pelabelan γ pada graf Lintang (L_n). Metode yang digunakan adalah studi literature tentang pelabelan γ pada suatu graf. Berdasarkan hasil pembahasan, diperoleh kesimpulan bahwa nilai maksimum pelabelan γ dari graf Lintang L_n yaitu :$val_{max}(L_n) = 3n^2$, dan nilai minimum pelabelan γ dari graf Lintang L_n yaitu : $val_{min} = \frac{n^2 + 4n - 1}{2}$, n ganjil dan $val_{min} = \frac{n^2+4n}{2}$, n genap.

Kata kunci : Graf, Graflintang, Nilaimaksimal, Nilai minimum, Pelabelan gamma.

1. PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang berkembang saat ini. Bidang teori graf yang berkembang saat ini mengenai pelabelan pada suatu graf. Menurut Chartrand dan Lesniak (1979), suatu graf G adalah himpunan tak kosong berhingga titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ yang disebut *vertex* dan himpunan tak kosong berhingga $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ merupakan himpunan pasangan tidak berurutan dari anggota-anggota $V(G)$ yang di sebut *edge*. Dari definisi tersebut dapat diketahui bahwa komponen-komponen dari suatu graf pada umumnya berupa *vertex* dan *edge* meskipun terdapat graf yang hanya terdiri dari satu *vertex*.

Komponen-komponen dari suatu graf, baik *vertex*, *edge*, maupun *vertex* dan *edge* dapat dilabeli berdasarkan aturan tertentu melalui suatu pelabelan graf. Pelabelan dari suatu graf *G (V,E)* adalah pemetaan satu-satu yang membawa elemen graf berupa himpunan *vertex V(G)* atau himpunan *edge E(G)* sebagai domain kebilangan-bilangan bulat positif sebagai kodomain, yang disebut label. Jika domain yang digunakan adalah himpunan *vertex* maka pelabelan disebut pelabelan *vertex* (*vertex*-labeling). Jika domain yang digunakan adalah himpunan *edge* maka pelabelan disebut pelabelan *edge* (*edge*-labeling). Jika domain yang digunakan adalah himpunan *edge* dan himpunan semua *vertex* maka disebut pelabelan total (*total*-labeling). Sebagai contoh, teori graf memberikan solusi dalam masalah penentuan rute terpendek dengan menggunakan pelabelan yang merupakan salah satu pokok bahasan dalam teori graf (Wijaya, 2004).

Ada bermacam-macam pelabelan graf. Jenis-jenis pelabelan graf yang berkembang saat ini adalah pelabelan ajaib (*magic*), pelabelan total ajaib, pelabelan anti ajaib, pelabelan selimut ajaib, pelabelan selimut anti ajaib, pelabelan super ajaib, pelabelan-γ dan lain sebagainya.

Pelabelan γ diperkenalkan pertama kali oleh Chartrand pada tahun 2005. Menurut Chartrand pelabelan γ suatu graf G dengan *order* atau banyak *vertex* $|V(G)|$ dan *size* atau banyak *edge* $|E(G)|$ didefinisikan sebagai fungsi satu-satu $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, ..., |E(G)|\}$ yang menghasilkan sebuah pelabelan $f' : E(G) \rightarrow \{1, 2, ..., |E(G)|\}$, sebagai label *edge* diperoleh dari selisih label *vertex* pada kedua ujung *edge*, dinotasikan sebagai $f'(e) = |f(u) - f(v)|$ untuk setiap *edge* $e = (u, v)$ pada G. Nilai pada pelabelan γ adalah $val(f) = \sum_{e\in E(G)} f'(e)$. Nilai maksimum untuk pelabelan γ pada G dinotasikan $val_{max}(G) = max\{val(f)\}$. Sedangkan nilai minimum untuk pelabelan γ pada G dinotasikan $val_{min}(G) = min\{val(f)\}$.

Pelabelan-γ sudah banyak diteliti oleh para peneliti di bidang teorigraf. Padatahun 2005, Chartrand menemukan pelabelan γ untuk graf *path*, graf *cycle*, graf lengkap, graf *star*, dan graf *tree*. Peneliti yang lain seperti Okamoto pada tahun 2007 juga menemukan pelabelan γ untuk graf *oriented*. Maka penulis juga tertarik untuk mendalami pelabelan γ, oleh karena itu dalam makalah ini akan dibahas bagaimana melakukan pelabelan γ pada graf *lintang* dengan $n \geq 1$. Graf lintang, dinotasikan L_n, adalah graf yang dibangun dari *join* antara *komplemen* K_2 dan *komplemen*K_n, sehingga dapat dituliskan $L_n = K_2 + K_n$, untuk $n \geq 1$

2. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan makalah ini adalah kajian pustaka yaitu dengan mengumpulkan referensi berupa buku-buku tentang pelabelan pada graf, skripsi dan jurnal-jurnal tentang pelabelan γ pada graf. Dari metode ini, penulis dapat menentukan rumus nilai minimum dan nilai maksimum pelabelan γ pada graf Lintang (L_n). Langkah-Langkah yang dilakukan dalam penelitian ini diuraikan sebagai berikut :

a. Mengkaji ulang pengertian dasar graf Lintang (L_n).
b. Melakukan pelabelan pada graf Lintang (L_n).
c. Menentukan selisih label *vertex* pada kedua ujung *edge* yaitu *f'(e)*.
d. Menjumlahkan semua *f'(e)* sampai ditemukan pola nilai minimum dan maksimum untuk graf Lintang (L_n).
e. Menentukan rumus umum nilai minimum dan maksimum untuk graf Lintang (L_n).
f. Membuat analisis dan kesimpulan.

3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

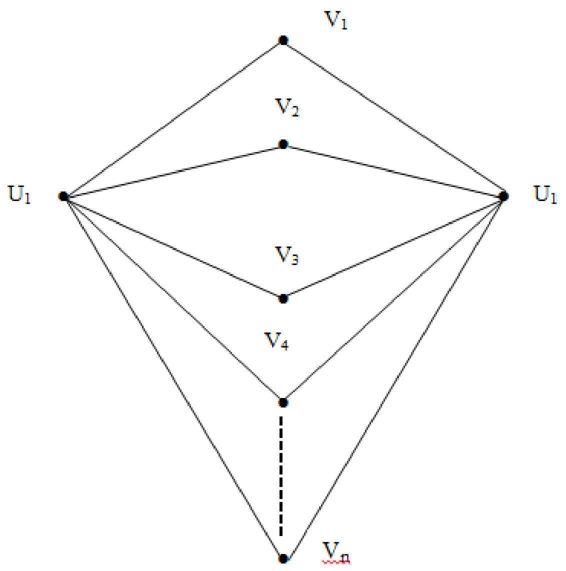
Pada bagian ini dibahas mengenai pelabelan untuk menentukan nilai maksimum dan minimum dari graf lintang L_n. Graf lintang L_n adalah graf yang dibangun dari *join* antara *komplemen* K_2 dan *komplemen* dari graf K_n.

Misalkan graf lintang L_n mempunyai himpunan *vertex* $V_1 = \{u_1, u_2\}$ sebagai *vertex* kutub dan $V_2 = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ sebagai *vertex* lintang, dengan $n \geq 1$. *Vertex* u_1 dan u_2 tidak *adjacent*, sedangkan *vertex-vertex* v_1, v_2, $v_3,,,,,v_n$ *adjacent* dengan *vertex* u_1 dan u_2.

Berikut ini adalah ide awal untuk menentukan nilai maksimum dan minimum pelabelan γ pada Graf Lintang dengan cara yang paling mudah :

a. Nilai Maksimum Dengan Pelabelan γ Pada Graf Lintang.

Dari ketiga penjabaran nilai pelabelan γ pada graf $L_2, L_3 \mathrm{dan} L_4$ dapat ditentukan barisan pelabelan γ pada graf L_n



Gambar 1. Graf L_n

$$\begin{aligned} val(L_n) = {} & |f(u_1) - f(v_1)| + |f(u_1) - f(v_2)| + |f(u_1) - f(v_3)| \\ & + |f(u_1) - f(v_4)| + \ldots.. + |f(u_1) - f(v_n)|) \\ & + (|f(u_2) - f(v_1)| + |f(u_2) - f(v_2)| \\ & + |f(u_2) - f(v_3)| \\ & + |f(u_2) - f(v_4)| + \ldots\ldots + |f(u_2) - f(v_n)|) \end{aligned}$$

Graf *Lintang* L_n adalah graf yang dibangun dari *join* antara *komplemen* K_2 dan *komplemen* K_n, *vertex* yang terbentuk dari *komplemen* K_2 disebut dengan *vertex* kutub ditulis dengan u_1 dan u_2, sedangkan *vertex* yang terbentuk dari *komplemen* K_n disebut dengan *vertex* lintang ditulis dengan v_1, v_2, $v_3, \ldots, v_n$. Sehingga Graf *Lintang* L_n memiliki jumlah *vertex* sebanyak $n + 2$ dan jumlah *edge* sebanyak $2n$.

Jika *vertex* u_1 dan u_2 pada graf Lintang L_n dilabeli dengan label 2*n-1* dan 2*n* maka graf Lintang L_n mempunyai pelabelan maksimum γ .
Bukti :Andai akan *vertex* u_1 dan u_2 tidak dilabeli dengan label 2*n-1* dan 2*n*, maka setiap *vertex* dapat dilabeli sebagai berikut :

$f(u_1) = n$ $\quad$ $f(v_i) = 2n$; $i = 1$

$f(u_2) = n-1$ $\quad$ $f(v_i) = i-2$; $i = 2,3,\ldots, n$

Sehingga, didapat :

$$val\ (L_n) = (|n-2n| + |n-0| + |n-1| + |n-2| + \cdots + |n-(n-2)|) + (|n-1-2n| + |n-1-0| + |n-1-1| + |n-1-2| + \cdots + |n-1-(n-2)|)$$

$$=(n + n + n - 1 + n - 2 + \cdots + 2) + (n + 1 + n - 1 + n - 2 + \cdots + 1)$$

$$= (n + n + 1) + \frac{n}{2}\ (n + 2\ ) + \frac{n}{2}\ \ (n - 1 + 1\ )$$

$$= (2n + 1) + \frac{n^2+2n}{2} + \frac{n^2}{2}$$

$$= (2n + 1) + \frac{2n^2+2n}{2}$$

$$= (2n + 1) + n^2 + n$$

$$= n^2 + 3n + 1$$

Karena pada contoh pelabelan γ graf L_2 di atas, nilai dari $n^2 + 3n + 1$ adalah 11 padahal masih ada nilai pelabelan yang lebih tinggi yaitu 12. Sedangkan, untuk pelabelanγgrafL_3nilaidari$n^2 + 3n + 1$ adalah 19 padahal masih ada nilai pelabelan yang lebih tinggi yaitu 27. Maka pengandaian bernilai salah, sehingga jika graf Lintang L_n mempunyai pelabelan maksimum γ maka *vertex*$u_1$dan$u_2$dilabelidengan label 2*n-1* dan 2*n.*

Maka dalam menentukan nilai maksimum pelabelan γ dari graf L_n dimulai dengan melabeli setiap *vertex* sebagai berikut :

$f(u_1) = 2n$ $\quad$ $f(v_i) = i-1$; $i = 1,2,3,\ldots, n$

$f(u_2) = 2n-1$

Sehingga, dari penjabaran dari val_{max} diatas maka didapat :

$$val_{max}(L_n) = (|2n - 1 - 0| + |2n - 1 - 1| + |2n - 1 - 2| + |2n - 1 - 3| \ldots + |2n - 1 - (n - 1)|) +$$

$(|2n-0| + |2n-1| + |2n-2| + |2n-3| \ldots + |2n-(n-1)|)$

$= \frac{n}{2}(2n-1+n) + \frac{n}{2}(2n+n+1)$

$= \frac{n}{2}(3n-1) + \frac{n}{2}(3n+1)$

$= \frac{3n^2-n}{2} + \frac{3n^2+n}{2}$

$= \frac{6n^2}{2}$

$= 3n^2$

Bila *vertex* u_1 dan u_2 dilabeli dengan dua bilangan tertinggi dan *vertex* v_1, v_2, $v_3, \ldots, v_n$ dilabeli dengan bilangan terkecil maka diperoleh selisih yang besar. Dan jika *vertex* v_1, v_2, $v_3, \ldots, v_n$ dilabeli dengan bilangan tertinggi maka akan diperoleh nilai pelabelan yang lebih kecil. Dengan demikian telah kita dapatkan bahwa :

$$val_{max}(L_n) = 3n^2$$

b. Nilai Minimum Dengan Pelabelan γ Pada Graf Lintang.

Jika f adalah pelabelan γ dari graf lintang L_n maka graf lintang L_n mempunyai pelabelan minimum, dengan $n \geq 1$. Di definisikan pelabelan minimum pada L_n sebagai berikut :

1) Kasus n ganjil

Pelabelan minimum pada graf lintang L_n dengan n ganjil dapat terjadi jika *vertex kutub* yaitu *vertex* u_1 dan u_2 dilabeli dengan label $\frac{n-1}{2} + 2i - 2$ dengan i=1,2. Karena untuk menghasilkan nilai pelabelan yang minimum pada graf lintang L_n dengan n ganjil maka *vertex* u_1 dan u_2 harus dilabeli dengan dua nilai di antara nilai tengah dari pelabelan *vertex*nya agar pelabelan *edge* yang dihasilkan nilainya minimum. Maka dalam menentukan nilai minimum pelabelan γ dari graf L_n dengan n ganjil dimulai dengan melabeli setiap *vertex* sebagai berikut:

$f(u_i) = \frac{n-1}{2} + 2i - 2 \qquad i = 1,2$

$f(v_i) = i - 1 \qquad i = 1,2,3, \ldots, \frac{n-1}{2}$

$f(v_i) = i \qquad i = \frac{n-1}{2} + 1$

$f(v_i) = i + 1 \qquad i = \frac{n-1}{2} + 2, \frac{n-1}{2} + 3, \ldots, n$

Setelah melabeli vertex-vertexnya, selanjutnya adalah menjumlahkan label edge-nya dengan aturan sebagai berikut :

$$val_{min}(L_n) = (|f(u_1) - f(v_1)| + |f(u_1) - f(v_2)| + |f(u_1) - f(v_3)| + \cdots + |f(u_1) - f(v_n)|) + (|f(u_2) - f(v_1)| + |f(u_2) - f(v_2)| + |f(u_2) - f(v_3)| + \cdots + |f(u_2) - f(v_n)|)$$

Sehingga diperoleh, val_{min} dari graf Lintang L_n dengan n bilangan ganjil sebagai berikut :

$val_{min} = \{ |\frac{n-1}{2} - 0| + |\frac{n-1}{2} - 1| + \ldots + |\frac{n-1}{2} - (\frac{n-1}{2} - 1)| \} + \{ |\frac{n-1}{2} - (\frac{n-1}{2} + 1)| \} +$

$\{ |\frac{n-1}{2} - (\frac{n-1}{2} + +2 + 1)| + |\frac{n-1}{2} - (\frac{n-1}{2} + 3 + 1)| + \ldots + |\frac{n-1}{2} - (n + 1)|\} +$

$\{ |\frac{n-1}{2} + 2 - 0| + |\frac{n-1}{2} + 2 - 1| + \ldots + |\frac{n-1}{2} + 2 - (\frac{n-1}{2} - 1)| \} +$

$\{ |\frac{n-1}{2} + 2 - (\frac{n-1}{2} + 1)| \} + \{|\frac{n-1}{2} + 2 - (\frac{n-1}{2} + 2 + 1)| + |\frac{n-1}{2} + 2 - (\frac{n-1}{2} + 3 + 1)| + \ldots . + |\frac{n-1}{2} + 2 - (n + 1)|\}$

$= \{ (\frac{n-1}{2} - 0) + (\frac{n-1}{2} - 1) + \ldots + (\frac{n-1}{2} - (\frac{n-1}{2} - 1)) \} + \{ \frac{n-1}{2} + 1 - (\frac{n-1}{2}) \} +$

$\{ ((\frac{n-1}{2} + +2 + 1) - \frac{n-1}{2}) + (\frac{n-1}{2} + 3 + 1 - (\frac{n-1}{2})) + \ldots + (n + 1 - (\frac{n-1}{2})\} +$

$\{ (\frac{n-1}{2} + 2 - 0) + (\frac{n-1}{2} + 2 - 1) + \ldots + (\frac{n-1}{2} + 2 - (\frac{n-1}{2} - 1)) \} +$

$\{ (\frac{n-1}{2} + 2 - (\frac{n-1}{2} + 1)) \} + \{(\frac{n-1}{2} + 2 + 1 - (\frac{n-1}{2} + 2)) + (\frac{n-1}{2} + 3 + 1 - (\frac{n-1}{2} + 2)) + \ldots . + (n + 1 - (\frac{n-1}{2} + 2))\}$

$= \frac{\frac{n-1}{2}}{2}\left(\frac{n-1}{2} + \left(\frac{n-1}{2} - \left(\frac{n-1}{2} - 1\right)\right)\right) + 1 + \frac{\frac{n-1}{2}}{2}\left(\frac{n-1}{2} + +2 + 1 - \frac{n-1}{2} +\right.$

$\left.\left(n + 1 - \quad \left(\frac{n-1}{2}\right)\right)\right) + + \frac{\frac{n-1}{2}}{2}\left(\frac{n-1}{2} + 2 + \left(\frac{n-1}{2} + 2 - \left(\frac{n-1}{2} - 1\right)\right)\right) + 1$

$+ \frac{\frac{n-1}{2}}{2}\left(\frac{n-1}{2} + 2 + 1 - \left(\frac{n-1}{2} + 2\right) + \left(n + 1 - \left(\frac{n-1}{2} + 2\right)\right)\right)$

$= \frac{n-1}{4}\left(\frac{n-1}{2} + 1\right) + 1 + \frac{n-1}{4}\left(3 + \frac{n+3}{2}\right) + \frac{n-1}{4}\left(3 + \frac{n+3}{2}\right) + 1 + \frac{n-1}{4}\left(1 + \frac{n-1}{2}\right)$

$= \frac{n-1}{4}\left(\frac{n-1}{2} + 1 + 3 + \frac{n+3}{2} + 3 + \frac{n+3}{2} + 1 + \frac{n-1}{2}\right) + 2$

$= \frac{n-1}{4}\left(8 + \frac{n-1+n+3+n+3+n-1}{2}\right) + 2$

$= \frac{n-1}{4}\left(8 + \frac{4n+4}{2}\right) + 2$

$= \frac{n-1}{4}(8 + 2n + 2) + 2$

$= \frac{n-1}{4}(10 + 2n) + 2$

$= \frac{n-1}{2}(5 + 2n) + 2$

$= \frac{n^2 + 4n - 1}{2}$

Dengan demikian telah kita dapat kan bahwa untuk n bilangan ganjil, maka :

$$val_{min}(L_n) = \frac{n^2 + 4n - 1}{2}$$

2) Kasus n genap

Pelabelan minimum pada graf lintang L_n dengan n genap dapat terjadi jika *vertex kutub* yaitu *vertex* u_1 dan u_2 dilabeli dengan label $\frac{n}{2} + i - 1$ dengan I = 1 dan 2. Karena untuk menghasilkan nilai pelabelan yang minimum pada graf lintang L_n dengan n ganjil maka *vertex* u_1 dan u_2 harus dilabeli dengan dua nilai tengah dari pelabelan *vertex* nya agar pelabelan *edge* yang dihasilkan nilainya minimum. Maka dalam menentukan nilai minimum pelabelan γ dari graf L_n

dengan n genap dimulai dengan melabeli setiap *vertex* sebagai berikut :

$f(u_i) = \frac{n}{2} + i - 1$ $\quad i = 1,2$

$f(v_i) = i - 1$ $\quad i = 1,2,3, \dots, \frac{n}{2}$

$f(v_i) = i + 1$ $\quad i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n$

Setelah melabeli vertex-vertexnya, selanjutnya adalah menjumlahkan label edge-nya dengan aturan sebagai berikut :

$$val_{min}(L_n) = (|f(u_1) - f(v_1)| + |f(u_1) - f(v_2)| + |f(u_1) - f(v_3)| + \cdots + |f(u_1) - f(v_n)|) + (|f(u_2) - f(v_1)| + |f(u_2) - f(v_2)| + |f(u_2) - f(v_3)| + \cdots + |f(u_2) - f(v_n)|)$$

Sehingga, diperoleh val_{min} darigraf L_n dengan n genap sebagai berikut :

val_{min}= { $|\frac{n}{2} - 0| + |\frac{n}{2} - 1| + \dots + |\frac{n}{2} - (\frac{n}{2} - 1)|$ } + { $|\frac{n}{2} - (\frac{n}{2} + 1 + 1)| +$
$|\frac{n}{2} - (\frac{n}{2} + +2 + 1)| + \dots + |\frac{n}{2} - (n + 1)|$} + { $|\frac{n}{2} + 1 - 0| + |\frac{n}{2} + 1 - 1| + \dots +$
$|\frac{n}{2} + 1 - (\frac{n}{2} - 1)|$ } + { $|\frac{n}{2} + 1 - (\frac{n}{2} + 1 + 1)| + |\frac{n}{2} + 1 - (\frac{n}{2} + 2 + 1)| + \dots +$
$|\frac{n}{2} + 1 - (n + 1)|$ }

= { $(\frac{n}{2} - 0) + (\frac{n}{2} - 1) + \dots + \frac{n}{2} - (\frac{n}{2} - 1)$ } + { $(\frac{n}{2} + 1 + 1 - \frac{n}{2}) +$
$(\frac{n}{2} + +2 + 1 - \frac{n}{2}) + \dots + (n + 1 - \frac{n}{2})$ } + {$(\frac{n}{2} + 1 - 0) + (\frac{n}{2} + 1 - 1) + \dots +$
$(\frac{n}{2} + 1 - (\frac{n}{2} - 1))$} + { $\left((\frac{n}{2} + 1 + 1\right) - (\frac{n}{2} + 1)) + (\frac{n}{2} + 2 + 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right)) +$
$\dots + -(n + 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right))$}

$= \frac{\frac{n-1}{2}}{2}\left(\frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2} - \frac{n}{2} + 1\right)\right) + \frac{\frac{n-1}{2}}{2}\left(\frac{n}{2} + 1 + 1 - \frac{n}{2} + \left(n + 1 - \frac{n}{2}\right)\right) +$

$\frac{\frac{n-1}{2}}{2}\left(\frac{n}{2} + 1 +\right.$

$\left(\frac{n}{2} + 1 - \left(\frac{n}{2} - 1\right)\right) + \frac{\frac{n-1}{2}}{2}\left(\frac{n}{2} + 1 + 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) + -(n + 1 -\right.$

$\left.\left(\frac{n}{2} + 1\right)\right))$

$= \frac{n}{4}\left(\frac{n}{2} + 1\right) + \frac{n}{4}\left(\frac{n}{2} + 3\right) + \frac{n}{4}\left(\frac{n}{2} + 3\right) + \frac{n}{4}\left(\frac{n}{2} + 1\right)$

$= \frac{n}{4}\left(\frac{n}{2} + \frac{n}{2} + \frac{n}{2} + \frac{n}{2} + 1 + 3 + 3 + 1\right)$

$= \frac{n}{4}(2n + 8)$

$= \frac{2n^2 + 8n}{4}$

$= \frac{n^2 + 4n}{2}$

Dengan demikian telah kita dapatkan bahwa untuk n bilangan genap, maka :

$$val_{min} = \frac{n^2 + 4n}{2}$$

4. SIMPULAN

Berdasarkanuraianpadapembahasan, maka dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

(1) Nilai maksimum pelabelan γ dari graf Lintang L_n yaitu :

$$val_{max}(L_n) = 3n^2$$

(2) Nilai minimum pelabelan γ darigraf LintangL_n yaitu :

$$val_{min}(L_n) = \begin{cases} \frac{n^2 + 4n - 1}{2}, & n \ ganjil \\ \frac{n^2 + 4n}{2}, & ngenap \end{cases}$$

5. DAFTAR PUSTAKA

Chartrand, Gary. (1997). *Introductory Graph Theory*.New York: Dover Publications.

Chartrand, G. and L. Lesniak.(1979). *Graphs and Digraphs*, 2nd ed. California: Wadsworth Inc.

Budiyasa, Ketut.(2001). *Matematika diskrit I*. Surabaya: UNESA University Press.

Munir, Rinaldi. (2005). *Matematika Diskrit*. Bandung :Informatika.

Chartrand, Erwin, Vanderjagt, & Zhang.(2005). *γ- Labellingog Graphs, Bulletin of the ICA 44 51-68.*

Indriati, Diari. (2010). *On γ- Labelling of (n,t)- Kite Graph.* Jurnal Matematika & Sain Vol. 16 Nomor3.