MASALAH BILLIAR AL HASSAN UNTUK TRAPESIUM SAMA KAKI

Imam Nulhakim, Oki Neswan
Institut Teknologi Bandung, Jl.Tamansari no 64, Bandung; imamnul@gmail.com
Institut Teknologi Bandung, Jl.Tamansari no 64, Bandung; oneswan@math.itb.ac.id

Abstrak

Masalah yang dibicarakan adalah salah satu bentuk dari Masalah Biliar Al Hassan atau Alhazen Billiard Problem. Misalkan terdapat sebuah meja billiar berbentuk trapesium sama kaki, sebut $ABCD$ dengan $AB \parallel CD$, dan sebuah bola putih terletak pada sisiABdari meja billiar, sebut di titik P. Pertanyaan yang akan dijawab adalahadakah titik Qpada sisi BC sehingga apabila bola putih ditembakan ke titik Q, maka bola akan memantul ke sisi CD, ke sisi DA, dan kembali ke titik P. Pada makalah ini diberikan syarat jarak P ke A, tergantung pada besar $\angle DAB$ dan panjang sisi AB, yang menjamin eksistensi titik Q tersebut di atas.Faktor penentu terhadap kembalinya bola dari titik P pada trapesium sama kaki ABCD ABCD jarak dari titik P pada sisi A, besar sudut yang terbentuk dari DAB harus $\alpha + 2\beta > \frac{\pi}{2}$, serta panjang dari sisi alas trapesium sama kaki $ABCD$ yaitu $< \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}$.

Kata Kunci : *Pencerminan;Trapesium sama kaki;pantulan*

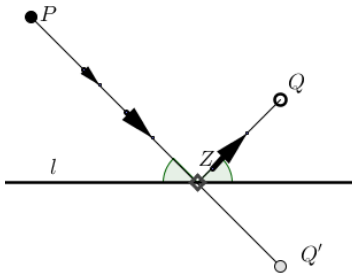
1. PENDAHULUAN

Telah umum diketahui bahwa lintasan terpendek antara dua titik adalah garis lurus yang menghubungkan ke dua titik. Pada masalah ini, lintasan yang akan ditentukan adalah lintasan yang mengalami pemantulan. Teknik yang digunakan untuk menentukan lintasan tersebut diambil dari geometritransformasi, yaitu pencerminan. Transformasi geometri memberikan pandangan yang mendalam terhadap banyak topik yaitu kongruensi, kesebangunan, dan simetri (Rawuh, 1993). Transformasi geometri digunakan untuk mengubah bentuk, posisi dan ukuran dari suatu objek geometri. Objek geometri yang ditransformasi berupa titik, garis atau suatu bangun pada bidang. Perubahan bentuk, posisi (letak) dan penyajian (ukuran) didasarkan menggunakan matriks, vektor dan gambar. Dalam geometri analitik, permasalahan geometri diterjemahkan ke dalam bahasa aljabar, lalu diselesaikan secara aljabar, kemudian hasilnya ditafsirkan kembali dalam bahasa geometri.

Ulasan mengenai pengembangan Alhazen Billiard Problem dapat ditemukan dalam berbagai literatur geometri, antara lain Zuoev (2007). Zouev meneliti masalah biliar mengenai dua buah bola pada meja biliar yang berbentuk lingkaran.Tujuan dari penelitian Zouev adalah menentukan lintasan terpendek dari sebuah bola yang ditembakan pada sisi-sisi meja biliar sehingga bola yang ditembakan, setelah memantul, dapat mengenai bola yang lain.

Misalkan terdapat dua buah bola berwarna putih dan bola berwarna hitam yang terletak dihadapan sebuah papan lurus dengan kedua bola tersebut tidak menempel pada papan. Akan dicari titik Zpada papan sehingga jika bola putih dilemparkan pada titik Z maka bola putih akan memantul ke arah bola hitam sehingga bola putih menabrak bola hitam.

Teorema 1. Misal terdapat dua titik sebidang dengan dibatasi oleh sebuah garis l, sebut titik P dan titik Q. Jika terdapat $Z \in l$ sehingga $P - Z - Q$ merupakan sebuah lintasan terpendek, maka arah pantulan titik P pada Z adalah titik$Q$.

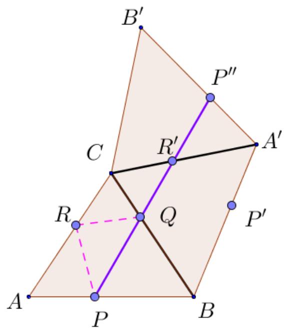


Gambar 1. Pantulan dan Lintasan Terpendek

Bukti. Misalkan Q' adalah hasil pencerminan titik Q oleh garis $l$dan Z adalah titik potong PQ' dan garis l. Maka dengan menggunakan sifat-sifat pencerminan, diketahui bahwa $ZQ = ZQ'$. Maka panjang lintasan $P - Z - Q$ sama dengan panjang ruas garis PQ'. Akan dibuktikan bahwa untuk tiap titik $Y \in l$, $PZ + ZQ \leq PY + YQ$. Karena $YQ = YQ'$, maka panjang lintasan $PY + YQ$ sama dengan panjang lintasan $P - Y - Q'$. Jelas bahwa untuk tiap $Y \in l$, $PZ + ZQ' \leq PY + YQ'$. Maka terbukti bahwa jika $P - Z - Q$ adalah lintasan terpendek, maka Z adalah titik pantulan. ∎

Pembahasan lintasan terpendek pada bidang datar diawali dari bidang datar dua dimensi yang paling sederhana yaitu segitiga. Misalkan terdapat sebuah segitiga ABC dan terdapat titik P pada sisi AB. Hal yang akan dicari adalah dimanakah titik Q dan R masing-masing pada sisi BC dan CD sehingga $P - Q - R - P$ merupakan lintasan terpendek. Masalah ini sama dengan masalah mencari titik Q pada BC dan R pada AC sehingga keliling ΔPQR adalah minimum. Untuk segitiga lancip, masalah ini dapat diselesaikan dengan gagasan pencerminan pada Teorema 1. Untuk itu, dibangun jejaring segitiga lancip ABC, pertama dengan mencerminkan terhadap sisi BC, diperoleh $\Delta A'BC$. Kemudian cerminkan segitiga ini terhadap sisi $A'C$ untuk memperoleh $\Delta A'B'C$, seperti pada Gambar 2. Bila P'' adalah hasil pencerminan oleh BC dan kemudian oleh $A'C$, maka garis PP'' dapat digunakan untuk membangun lintasan yang dimaksud. Telah dibuktikan bahwa segitiga pedal yang memuat titik P adalah jawab dari masalah ini.

Teorema 2. MisalkanΔABC adalah segitiga lancip dan titik P pada AB. Titik $Q \in BC$ dan $R \in CA$ sehingga keliling ΔPQR minimum adalah ΔPQR yang merupakan segitiga refleksi [definisi 1].



Gambar 2. Lintasan terpendek $P - Q - R - P$

Berikut adalah bukti informal dengan memanfaatkan gagasan jejaring segitiga tersebut di atas. Misal terdapat sebuah ΔABC dan sembarang titik P, Q, R masing masing pada sisi AB, BC, CA.Pandang titik P dan R serta ΔABC. Jika titik R' adalah hasil pencerminan dari titik R pada segmen BC.Berdasarkan **Teorema 1**, titik Q dapat ditemukan dariperpotongan segmen PR' dengan segmen BC sehingga $P - Q - R'$ merupakan sebuah garis lurus yang menghubungkan antara titik P dan titik R' melalui sisi BC. Misal P' merupakan hasil pencerminan dari titik P dan $\Delta A'BC$ merupakan hasil pencerminan ΔABC terhadap sisi BC. Pandang segitiga baru $A'BC$ dan titik R', Q, P' masing masing pada sisi $A'C, BC, A'B$. Berdasarkan sifat pencerminan yang mempertahankan kesimetrian, hal ini menjadikan segitiga ABC kongruen dengan segitiga $A'BC$ sehingga titik R pada sisi AC dapat diwakili oleh titik R' pada sisi $A'C$. Dengan cara yang serupa untuk mendapatkan titik Q, titik R dapat dietemukan dengan dicerminkannya titik P' pada sisi $A'C$ sehingga diperoleh P''. Berdasarkan **Teorema 1**, titik R' haruslah merupakan perpotongan antara segmen QP'' dengan segmen $A'C$. Dengan demikian diperoleh $Q - R' - P''$ berupa garis lurus dan juga telah diketahui bahwa $P - Q - R'$ merupakan sebuah garis lurus. Akibatnya $P - Q - R' - P''$ merupakan sebuah garis lurus.Hal ini menunjukan sebuah lintasan terpendek $P - Q - R - P$ pada segitiga ABC.

Pada makalah ini, penelitian difokuskan pada trapesium sama kaki $ABCD$. Hal yang manarik pada bentuk trapesium $ABCD$ adalah jika terdapat sebuah titik Pyang mewakili salah satu titik pada sisi trapesium sama kaki $ABCD$, maka tidak selalu didapatkan lintasan terpendek atau pantulan pada sisi lainnya sehingga hasil pantulan titik Ptidak dapat kembali ke titik semula. Oleh karena itu akan diberikan syarat bagi trapesium $ABCD$ dan titik Psehingga hasil pantulan dari P yang memantul pada tiap sisi trapesium $ABCD$ dapat kembali ke titik kembali ke titik P.Misal titik P pada sisi AB. Pertanyaan yang akan dijawab ialah dimanakah letak titik Q pada sisi BC sehingga jika bola putih ditembakan ke titik Q maka bola akan memantul ke sisi CD, DA dan kembali ke titik P.

2. METODE PENELITIAN

Masalah biliar pada makalah ini merupakan variasi dari yang diulas oleh Dorrie [1] dan Zouev [7]dimana meja biliar tidak berbentuk lingkaran. Meja biliar pada masalah di sini berbentuk trapesium sama kaki, sebut $ABCD$ dengan $AB \parallel CD$. Misalkan sebuah bola putih yang terletak pada titik P, dengan $P \in AB, P \notin \{A, B\}$ dan terdapat titik Q, R, S masing-masing pada sisi BC, CD, DA. Alur dari penelitian ini adalah menemukan titik Q, R, S dengan menggunakan pencerminan sehingga lintasan $P - Q - R - S - P$merupakan lintasan tersebut merupakan lintasan terpendek dari trapsium sama kaki$ABCD$.Fungsi pencerminan oleh garis l yang melalui titik P dan memiliki vektor normal satuan N adalah

$$R_l(X) = X - 2\langle X - P, N\rangle N$$

dengan $\langle X, Y\rangle$ adalah hasil kali titik vektor X dan Y.Selanjutnya dengan geometri analitik diberikan syarat agar setiap bentuk trapesium sama kaki $ABCD$ dengan P pada salah satu sisinya akan menemukan pantulan sisi yang lain sehingga dapat kembali ke titik semula.

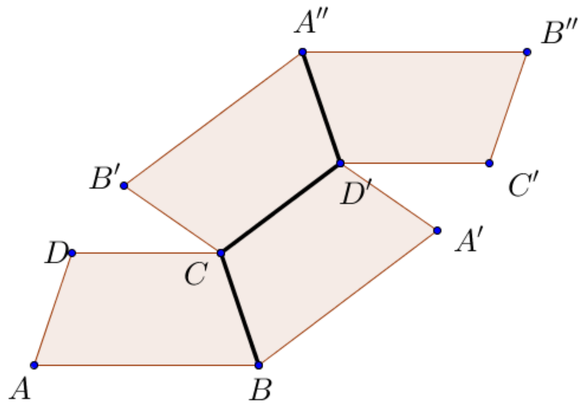
Definisi 1. Jika ABCD adalah segi-4. Segi-4 $PQRS$ dengan P, Q, R, S masing masing pada sisi Ab, BC, CD, DA disebut segi-4 refleksi jika pada tiap titik sudutnya, sisinya membentuk sudut sama besar. Segi-n (poligon) refleksi dari sebuah segi-n disebut poligon refleksi didefinisikan dengan cara serupa seperti definisi segi-4 refleksi untuk n=3,5,6,...

Definisi 2. Jaring-jaring pencerminan segi-n adalah pencerminan segi-n pada setiap sisinya.

3. PEMBAHASAN MEJA BILLIAR BERBENTUK TRAPESIUM SAMA KAKI

Setiap bidang datar dua dimensi pasti memiliki sudut [6]. Hal ini berlaku untuk Trapesium sama kaki $ABCD$. Tidak setiap besar sudut pada trapesium sama kaki $ABCD$ menjadikan titik P pada sisi AB dapat memantul ke sisi lainnya kemudian kembali lagi ke titik semula.

Lemma 1. Jika trapesium sama kaki $ABCD$dengan hasil jaring jaring pencerminan akhir trapesium sama kaki $A''B''C'D'$ maka $AB \parallel A''B''$.



Gambar 3. Pencerminan sisi trapesium

Bukti. Misal trapesium sama kaki $ABCD$ memiliki koordinat $A(0,0), B(k,0), C(k - \cos\theta, \sin\theta), D(-\cos\theta, \sin\theta)$ dengan $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

Jika trapesium $A'BCD'$ merupakan hasil pencerminan trapesium sama kaki $ABCD$ pada sisi BC, maka koordinat dari trapesium $A'BCD'$ adalah sebagai berikut:

$$A' = (2k\sin^2\theta, 2\sin\theta\, kcos\theta)$$
$$B = (k, 0)$$
$$C = (k - \cos\theta, \sin\theta)$$
$$D' = (4\cos^3\theta - 2\cos^2\theta\, k - 3\cos\theta + 2k, -sin\theta(4\cos^2\theta - 2k\cos t - 1))$$

Pada jejaring trapesium sama kaki pada gambar diatas, cerminkan trapesium sama kaki $A'BCD'$ sisi CD' menghasilkan trapesium sama kaki $A''B'CD'$. Adapun trapesium $A''B'CD''$ memiliki koordinat

$$A'' = (-2\sin^2\theta\,(2\cos\theta - k), -2(2\cos^2\theta - k\cos\theta - 1)\sin\theta)$$
$$B' = (4\cos^3\theta - 4\cos\theta + k, -2(2\cos^2\theta - 1)\sin\theta)$$
$$C = (k - \cos\theta, \sin\theta)$$
$$D' = (4\cos^3\theta - 2\cos^2\theta\, k - 3\cos\theta + 2k, -sin\theta(4\cos^2\theta - 2k\cos t - 1))$$

Dengan cara yang serupa, cerminkan trapesium sama kaki $A''B'CD'$ pada sisi $D'A''$ sehingga diperoleh trapesium sama kaki $A''B''C'D'$ dengan koordinat

$$A'' = (-2\sin^2\theta\,(2\cos\theta - k), -2(2\cos^2\theta - k\cos\theta - 1)\sin\theta)$$
$$B'' = (4\cos^3\theta - 2k\cos^2\theta - 4\cos\theta + 3k, -2\sin\theta\,(2\cos^2\theta - k\cos\theta - 1))$$
$$C' = (4\cos^3\theta - 2k\cos^2\theta - 4\cos\theta + 3k, -(4\cos^2\theta - 2k\cos\theta - 1)\sin\theta)$$
$$D' = (4\cos^3\theta - 2\cos^2\theta\, k - 3\cos\theta + 2k, -sin\theta(4\cos^2\theta - 2k\cos\theta - 1))$$

Pandang ordinat dari A'' dan B''. Gradien yang terbentuk dari $A''B''$ adalah 0. Hal ini menunjukan bahwa segmen $A''B''$ sejajar dengan sumbu-x. Disisi lain, bahwa segmen AB berhimpit dengan sumbu-x. Hal ini memberikan membukti bahwa garis $AB \parallel A''B''$.

Lemma 2. Misal jajaran genjang $ABCD$ dengan koordinat $A(0,0), B(k,0), C(k - \cos\theta, \sin\theta), D(\cos\theta, \sin\theta)$besar. Untuk $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$hasil pencerminan jaring-jaring trapesium $ABCD$adalah trapesium sama kaki $A''B''C'D'$, maka AB segaris $A''B''$ jika dan hanya jika $k = \frac{\cos 2\theta}{\cos t}$. Untuk $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ hasil pencerminan jarring-jaring trapesium sama kaki $ABCD$ dengan $k > \frac{1}{\cos\theta}$

Bukti. Pada jaring-jaring pencerminan trapesium $ABCD$ terdapat titik A''yang merupakan salah satu titik pada jaring-jaring pencerminan trapesium $ABCD$. Jika AB segaris dengan $A''B''$ akan dibuktikan bahwa $k = \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$. Karena segemen AB berhimpit dengan sumbu-x, menjadikan $-2(2\cos^2\theta - k\cos\theta - 1)\sin\theta = 0$, pandang

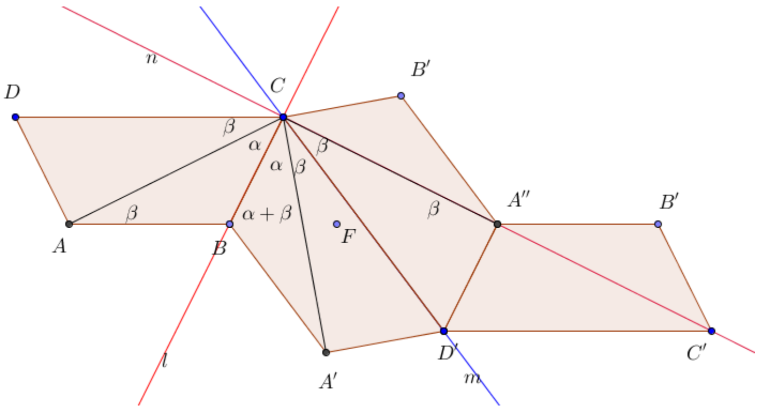
$$-2(2\cos^2\theta - k\cos\theta - 1)\sin\theta = 0$$
$$\Leftrightarrow\ k = \frac{2\cos^2\theta - 1}{\cos t} = \frac{\cos 2t}{\cos t}$$

Sekarang akan ditunjukan sebaliknya jika $k = \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$ maka AB sejajar dengan $A''B''$.

Pandang ordinat dari A''. Substitusikan nilai $k = \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$ pada $-2(2\cos^2\theta - k\cos\theta - 1)\sin\theta$ didapatkan hasil 0. Berdasarkan **Lemma 1,** maka AB sejajar dengan $A''B''$.

Lemma 3. Misal pada trapesium sama kaki $ABCD$, sudut yang terbentuk dari $\angle BAC = \beta$, $\angle ACB = \alpha$. $2\beta + \alpha = 90^o$ maka AB segaris dengan $A''B''$

Bukti.



Gambar 4. Ilustrasi lemma 3

Berdasarkan sifat dari pencerminan yang merupakan sebuah isometri, isometri menjadikan besar sudut dari $CA''B' = \beta$ dan $CA''D' = \alpha$. Misalkan terdapat garis p yang melewati segmen $A''C$ yang mencerminkan titik B pada garis p. Misal pencerminan pada garis p dilambangkan dengan M_p, dapat diperoleh pencerminan dari titik B pada garis p dengan $M_p(B) = F$. Karena pencerminan bersifat isometri menjadikan $\angle CA''F = \beta$. Karena C, B, A'' tak segaris maka dapat dibentuk sebuah segitigaCBA''. Karena jumlah setiap sudut dari segitiga adalah 180^o, dan $\angle BCA'' = 2\beta + \alpha = 90^o$, dengan besar sudut pelurus dari ABC adalah $\alpha + \beta$ serta besar sudut dari $CA''F = \beta$, maka penjumlahan CBA'' dan $CA''F$ haruslah 90^o. Akibatnya titik F berada pada sisi BA'' menjadikan titik A'' sejajar dengan segmen AB.■

Pada meja biliar yang berbentuk trapesium sama kaki ini, diterapkan koordinat kartesius. Jika alas dari trapesium sama kaki$ABCD$ adalah sisi AB yang memiliki panjang k untuk $k \geq 1$ dan garis AB berhimpit dengan sumbu-x serta sisi AD memiliki panjang 1 dengan $\angle BAD = \theta$ dengan θ merupakan sudut tumpul dengan jarak dari titik A pada bola putih adalah t. Berikut ada lain bentuk lain dari syarat eksistensi solusi.Terdapat 3 kasus untuk menemukan solusi bagi trapesium sama kaki

KASUS 1

Misal terdapat jajaran genjang $ABCD$ dengan $AB \parallel CD$,$AB < CD$ serta sebuah titik $P \in AB$. Segi empat reflesi mengharuskan terpotongnya sisi BC, CD', DA'' oleh segmen PP'''. Berdasarkan **Lemma 1, Lemma 2, Lemma 3** jelas bahwa akan terdapat segi-4 refleksi jika nilai ordinat dari $A'' > 0$ yaitu nilai $k < \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$ serta nilai dari 2 β $+\alpha > 90^o$.

KASUS II

Pada Trapesium sama kaki ABCD, $AB \parallel CD$ dengan panjang $AB > CD$. Jika titik P berada pada sisi AB dengan sisi AB dengan koordinattrapesium sama kaki ABCD yang dianyatakan sebagai $A(0,0), B(k, 0), C(k - cos\,\theta\,, sin\,\theta), D(cos\,\theta\,, sin\,\theta)$ dengan titik $P(b, 0)$.

Jika trapesium $A'BCD'$ merupakan hasil pencerminan trapesium sama kaki $ABCD$ pada sisi BC, maka koordinat dari trapesium $A'BCD'$ adalah sebagai berikut:

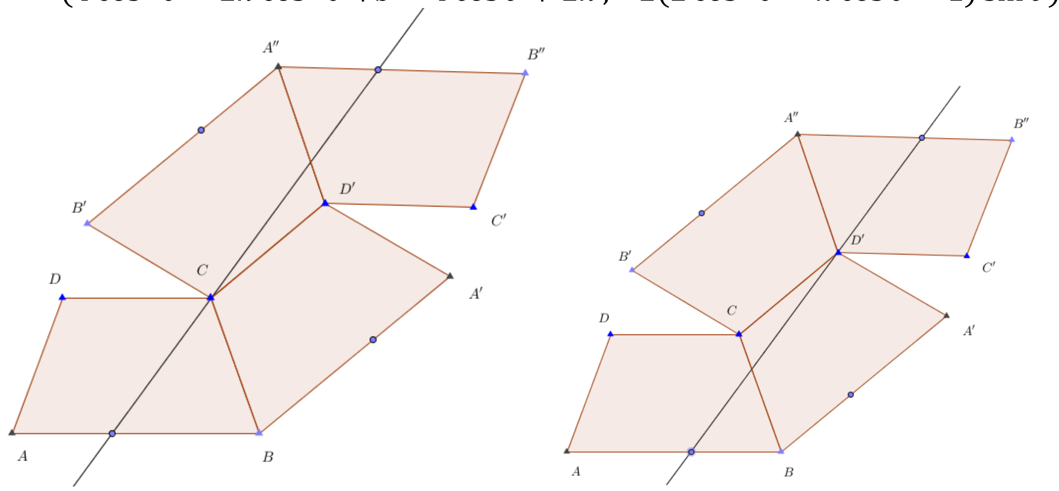
$$A' = (2k\sin^2\theta\,, 2\sin\theta\, kcos\theta)$$
$$B = (k, 0)$$
$$C = (k - \cos\theta\,, \sin\theta)$$
$$D' = (4\cos^3\theta - 2\cos^2\theta\, k - 3\cos\theta + 2k, -sin\theta(4\cos^2\theta - 2k\cos t - 1))$$
$$P' = (2b\cos^2\theta - 2\cos^2\theta\, k - b + 2k, -2\sin\theta(b - k)\, cos\theta)$$

Pada jejaring trapesium sama kaki pada gambar diatas, cerminkan trapesium sama kaki $A'BCD'$ sisi CD' menghasilkan trapesium sama kaki $A''B'CD'$. Adapun trapesium $A''B'CD''$ memiliki koordinat

$$A'' = (-2\sin^2\theta\,(2\cos\theta - k), -2(2\cos^2\theta - k\cos\theta - 1)\sin\theta)$$
$$B' = (4\cos^3\theta - 4\cos\theta + k, -2(2\cos^2\theta - 1)\sin\theta)$$
$$C = (k - \cos\theta\,, \sin\theta)$$
$$D' = (4\cos^3\theta - 2\cos^2\theta\, k - 3\cos\theta + 2k, -sin\theta(4\cos^2\theta - 2k\cos t - 1))$$
$$P''' = ((2b\cos^2\theta + 4\cos^3\theta + 2\cos^2\theta\, k - b - 4\cos\theta + 2k), -2(2\cos^2\theta + \cos\theta\, b - k\cos\theta - 1)sin\theta))$$

Dengan cara yang serupa, cerminkan trapesium sama kaki $A''B'CD'$ pada sisi $D'A''$ sehingga diperoleh trapesium sama kaki $A''B''C'D'$ dengan koordinat

$$A'' = (-2\sin^2\theta\,(2\cos\theta - k), -2(2\cos^2\theta - k\cos\theta - 1)\sin\theta)$$
$$B'' = (4\cos^3\theta - 2k\cos^2\theta - 4\cos\theta + 3k, -2\sin\theta\,(2\cos^2\theta - k\cos\theta - 1))$$
$$C' = (4\cos^3\theta - 2k\cos^2\theta - 4\cos\theta + 3k, -(4\cos^2\theta - 2k\cos\theta - 1)\sin\theta)$$
$$D' = (4\cos^3\theta - 2\cos^2\theta\, k - 3\cos\theta + 2k, -sin\theta(4\cos^2\theta - 2k\cos t - 1))$$
$$P''' = (4\cos^3\theta - 2k\cos^2\theta + b - 4\cos\theta + 2k\,, -2(2\cos^2\theta - k\cos\theta - 1)\sin\theta)$$



Gambar 4. Ilustrasi batas minimum dan maksimum keberadaan titik P pada trapesium sama kaki ABCD

Dari ilustrasi pada gambar 4. Keberadaan titik P tidak selalu ada pada setiap titik pada sisi AB. Akan didapatkan nilai b minimum sedemikian sehingga terdapat segi-4 reflesi jika gradien dari segmen $P'''C$ memiliki kemiringan yang sama dengan CP dan terdapat nilai b maksimum jika kemiringan segmen $P'''D'$ sama dengan $D'P$. Diperoleh nilai

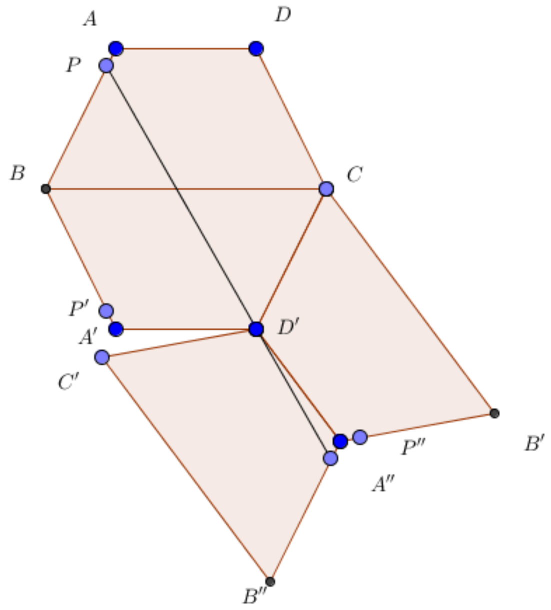
$$b_0 = \frac{\cos\theta\,(2k\cos\theta - k^2 - 1)}{2\cos^2\theta - k\cos\theta - 1}$$
$$b_1 = \frac{-k + \cos\theta}{2\cos^2\theta - k\cos\theta - 1}$$

Dimana b_o merupakan batas untuk mendapatkan nilai b minimum dan b_1 merupakan batas untuk mendapatkan nilai b maksimum.

Kasus III

Dengan cara yang serupa pada kasus I, gunakan trapesium sama kaki dengan koordinat Sebuah trapsium ABCD dengan maing-masing titik dijabarkan sebagai koordinat $A(\cos\theta\,, \sin\theta), B(0,0), C(k,0)\,, D(k - \cos\theta\,, \sin\theta)\,, P(t\cos\theta\,, t\sin\theta)$.

 ISSN: 2502-6526



Gambar 6. titik P berada di sisi yang tidak paralell

Misalkan terdapat garis f yang merupakan persamaan garis yang melewati titik A dan B, persamaan garis $f: y = 0$.Didapatkan hasil pencerminan

$M_f(A) \quad = \quad M_f(\cos\theta\,, \sin\theta)$

$A' \quad = \quad (\cos\theta\,, -\sin\theta)$

$M_f(B) \quad = \quad M_f(0{,}0)$

$B' \quad = \quad (0{,}0) = B$

$M_f(C) \quad = \quad M_f(k, 0)$

$C' \quad = \quad (k, 0) = C$

$M_f(D) \quad = \quad M_f(k - \cos\theta\,, \sin\theta)$

$D' \quad = \quad (k - \cos\theta\,, -\sin\theta)$

$M_f(P) \quad = \quad M_f(t\cos\theta\,, t\sin\theta)$

$P' \quad = \quad ((t\cos\theta\,, -t\sin\theta))$

Persamaan garis yang melewati BC' adalah $(r\sin\theta)x + (r\cos\theta)y - r\sin\theta = 0$

Didapatkan hasil pencerminan

$A'' \quad = \quad (k + \cos 3\theta - k\cos 2\theta\,, \sin 3\theta - k\sin 2\theta)$

$B \quad = \quad -k(\cos 2\theta - 1), -k\sin 2\theta)$

$C \quad = \quad (k, 0)$

$D'' \quad = \quad (k - \cos\theta\,, -\sin\theta)$

$P'' \quad = \quad (k - k\cos 2\theta + t\cos 2\theta\,, t\sin 3\theta - k\sin 2\theta)$

Persamaan garis yang melewati $A''C'$

$$(\sin\theta - k\sin 2\theta)x - \big(\cos\theta - k - k(\cos 2\theta - 1)\big)y + k^2\sin 2\theta - k\sin\theta + k\cos 2\theta\sin\theta - k\sin 2\theta\cos\theta$$

Untuk mengefieisenkan prosedur, cukup cerminkan titik P’’ sehingga didapatkan P’’’ dengan koordinat

$$P'''\left(\frac{k+k^2\cos 3\theta - k^3\cos 2\theta + t\cos\theta - k\cos 2\theta - k^2\cos\theta - 2kt + k^3 + k^2 t\cos\theta}{k^2-2k\cos\theta+1}, \frac{k^2\sin 3\,\theta - k^3\sin 2\theta - t\sin\theta - k\sin 2\theta + k^2\sin\theta + k^2 t\sin\theta}{k^2-2k\cos\theta+1}\right)$$

Sehingga diperoleh persamaan garis yang melewati titik P dan P’’’

$$(t\sin\theta - \frac{\left(k^2\sin 3\theta - k^3\sin 2\theta - t\sin\theta - k\sin 2\theta + k^2\sin\theta + k^2 t\sin\theta\right)}{k^2-2(\cos\theta)k+1})x$$

$$-(t\cos\theta - \frac{\left(\begin{array}{l} k+k^2\cos 3\theta - k^3\cos 2\theta + t\cos\theta - k\cos 2\theta \\ -k^2\cos\theta - 2kt + k^3 + k^2 t\cos\theta \end{array}\right)}{k^2-2(\cos\theta)k+1})y$$

$$-\frac{\left(\begin{array}{l} kt\sin\theta - 2kt^2\sin\theta + k^3 t\sin\theta + 2t^2\cos\theta\sin\theta + k^2 t\cos 3\theta\sin\theta \\ -k^2 t\sin 3\theta\cos\theta - k^3 t\cos 2\theta\sin\theta + k^3 t\sin 2\theta\cos\theta - kt\cos 2\theta\sin\theta \\ +kt\sin 2\theta\cos\theta - 2k^2 t\cos\theta\sin\theta \end{array}\right)}{k^2-2(\cos\theta)k+1}$$

Untuk mendapatkan titik minimm dari t, maka substitusikan titik D'. Persamaan ini selanjutnya disederhanakan berdasarkan variabel t. Diperoleh

$$t^2\frac{\sin 2\theta - 2k\sin\theta}{k^2-2(\cos\theta)k+1} - t\frac{\left(2(\sin\theta)k^3 - (\sin 2\theta)k^2 - 2(\sin\theta)k + \sin 2\theta\right)}{k^2-2(\cos\theta)k+1}$$

$$-\frac{\left(k^3\sin 3\theta - 3k^2\sin 2\theta - k^4\sin 2\theta + 2k\sin\theta + 3k^3\sin\theta\right)}{k^2-2(\cos\theta)k+1}$$

Sehingga didapatkan akar-akar dari t

$$\frac{(-\frac{\left(2(\sin\theta)k^3 - (\sin 2\theta)k^2 - 2(\sin\theta)k + \sin 2\theta\right)}{k^2-2(\cos\theta)k+1} + \sqrt{\begin{array}{l}(\frac{\left(2(\sin\theta)k^3 - (\sin 2\theta)k^2 - 2(\sin\theta)k + \sin 2\theta\right)}{k^2-2(\cos\theta)k+1})^2 - 4(\frac{\sin 2\theta - 2k\sin\theta}{k^2-2(\cos\theta)k+1}) \\ (\frac{\left(k^3\sin 3\theta - 3k^2\sin 2\theta - k^4\sin 2\theta + 2k\sin\theta + 3k^3\sin\theta\right)}{k^2-2(\cos\theta)k+1})\end{array}}}{2\frac{\sin 2\theta - 2k\sin\theta}{k^2-2(\cos\theta)k+1}}$$

Jika $t > \psi$ dengan ψ merupakan salah satu akar dari akar-akar t, maka selalu terdapat titik Q sehingga bola putih memantul sisi yang lain dan kembali lagi ke titik semula.

4. KESIMPULAN

Hal yang menjadi faktor penentu terhadap kembalinya bola dari titik P pada trapesium sama kaki ABCD jarak dari titik P pada sisi A, besar sudut yang terbentuk dari DAB harus $\alpha + 2\beta > \frac{\pi}{2}$, serta panjang dari sisi alas trapesium sama kaki $ABCD$ yaitu $< \frac{\cos 2\theta}{sin\theta}$.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Dorrie, Heinrich. 1965. *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, New York, Dover Publication.

[2] Isaac, M. I, 2001.Geometri for College, United Kingdom: Wadsonsworth Group.

[3] Martin, G. E. 1991. *Transformation Geometri*, New York: Springer

[4] Mitchell, J.S., Polishchuk, V., 2008 Minimum-perimeter enclosures. *Inform. Process. Lett.* 107(3–4), 120–124.

[5] Rawuh.1993.*Geometri Transformasi*, Departemen Pendidikan dan Kebudayaan

[6] Ryan, P. J..1986. *Euclidean and Non Euclidean Geometry, an Analytic Approach*, New York: Cambridge University.

[7] Zouev, alexander. 2007. *Extended Essay-Mathematics Alhazen's Billiard Problem*, Antwerp International School