KETAKSAMAAN TIPE LEMAH UNTUK OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL DI RUANG MORREY ATAS RUANG METRIK TAK HOMOGEN

Idha Sihwaningrum
Jurusan Matematika FMIPA Unsoed
Email: idha.sihwaningrum@unsoed.ac.id

Abstrak

Pada makalah ini dibuktikan ketaksamaan tipe lemah (1, q) untuk operator integral fraksional di ruang Morrey atas ruang metrik tak homogen. Ketaksamaan tersebut dibuktikan menggunakan suatu ketaksamaan yang melibatkan operator maksimal serta ketaksamaan Chebysev. Bukti alternatif dari ketaksamaan tipe lemah (1, q) untuk operator integral fraksional juga dapat diperoleh menggunakan ketaksamaan tipe Hedberg dan ketaksamaan tipe lemah (1, 1) dari operator maksimal. Hasil yang diperoleh pada makalah ini merupakan perumuman dari ketaksamaan tipe lemah (1, q) untuk operator integral fraksional di ruang Lebesgue atas ruang metrik tak homogen

Kata Kunci: *ketaksamaan tipe lemah, operator integral fraksional, operator maksimal, ruang Morrey, ruang metrik tak homogen.*

1. PENDAHULUAN

Pada analisis Fourier dikenal beberapa operator, yang salah satu diantaranya adalah operator integral fraksional. Operator yang diperkenalkan oleh Hardy dan Littlewood (1927) ini merupakan salah satu operator yang penting karena operator ini merupakan perumuman dari penyelesaian persamaan Poisson

$$-\Delta\, u = f.$$

Jika u menyatakan potensial elektrostatik, maka persamaan Poisson tidak lain adalah hukum konduksi elektrostatis Ohm (lihat (Evans, 1998)). Oleh karena itu, operator integral fraksional sering disebut potensial Riesz. Salah satu sifat yang ingin diketahui orang mengenai operator integral fraksional adalah ukuran fungsi distribusi yang melibatkan operator tersebut. Ketaksamaan yang menyatakan sifat ini sering disebut sebagai ketaksamaan tipe lemah.

Operator integral fraksional I_α didefinisikan oleh Garcia-Cuerva dan Gatto (2004) dengan

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{X}} \frac{f(y)}{d(x,y)^{n-\alpha}}\, d\mu(y). \tag{1}$$

Definisi ini merupakan pengembangan dari definisi operator integral fraksional (klasik) yang diberikan oleh Hardy dan Littlewood (1927). Pada persamaan (1), $\mathbb{X}$ adalah ruang metrik berdimensi m yang dilengkapi dengan fungsi jarak d dan ukuran Borel μ yang memenuhi *growth condition*

$$\mu(B(x,r)) \le Cr^n, \tag{2}$$

untuk setiap bola $B(x,r)$ di $\mathbb{X}$ dan suatu konstanta positif C yang independen baik terhadap x maupun r. Selain itu, baik pada persamaan (1) maupun (2), $0 < n \leq m$. Karena pada persamaan (2) ukuran bola dikontrol oleh jari-jari bola berpangkat n, maka orang sering menyebut ukuran yang memenuhi *growth condition* sebagai *growth measure* berorde n. Ruang metrik yang dilengkapi dengan ukuran yang memenuhi kondisi pada persamaan (2) sering disebut ruang metrik tak homogen (Nazarov, dkk., 1998). Contoh-contoh ruang metrik tak homogen dapat dilihat pada (Verdera, 2002). Sementara itu, hasil-hasil di ruang bertipe tak homogen dapat dilihat misalnya di (Sihwaningrum, dkk., 2010 dan 2012).

Garcia-Cuerva dan Gatto (2004) telah membuktikan keberlakuan ketaksamaan tipe lemah (1, q) untuk operator integral fraksional di ruang Lebesgue atas ruang metrik tak homogen. Pada makalah ini akan dibuktikan ketaksamaan tipe lemah untuk operator integral fraksional (1) di ruang Morrey tak homogen atas ruang metrik. Ruang Morrey ini merupakan ruang Lebesgue untuk kasus tertentu sehingga hasil yang diperoleh pada makalah ini dapat dipandang sebagai perumuman dari hasil Garcia-Cuerva dan Gatto (2004). Untuk selanjutnya, baik pada teorema, lemma, maupun bukti-bukti, notasi C akan digunakan untuk menyatakan konstanta yang berbeda-beda, meskipun konstanta berada pada satu baris.

2. METODE PENELITIAN

Ketaksamaan tipe lemah (1, q) untuk operator integral fraksional di ruang Morrey atas ruang metrik tak homogen akan dibuktikan menggunakan ketaksamaan Chebysev

$$\mu\left(\{x \in E : |f(x)| > \gamma\}\right) \leq \frac{1}{\gamma} \int_E |f(x)|\, d\mu(x).$$

Ketaksamaan tersebut juga dapat dibuktikan secara alternatif dengan menggunakan ketaksamaan tipe Hedberg dan ketaksamaan tipe lemah (1, 1) untuk operator maksimal M di ruang Morrey atas ruang metrik tak homogen. Operator ini didefinisikan dengan

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x,2r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, d\mu(y)$$

oleh Sawano (2005). Ketaksamaan Hedberg merupakan estimasi untuk operator integral fraksional oleh operator maksimal dan norma dari fungsi di ruang Morrey atas ruang metrik tak homogen. Dengan demikian, sebelum bukti alternatif tersebut diberikan, maka harus terlebih dahulu dibuktikan keberlakuan dari ketaksamaan tipe Hedberg dan ketaksamaan tipe lemah (1, 1) untuk operator maksimal di ruang Morrey atas ruang metrik tak homogen.

3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Ruang Morrey atas ruang metrik tak homogen, $L^{1,\lambda}(\mu)$, didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi f di ruang Lebesgue lokal $L^1_{loc}(\mu)$ sedemikian sehingga norma

$$\|f\|_{L^{1,\lambda}(\mu)} := \sup_{B(x,r)} \frac{1}{\mu(B(x,2r))^{\lambda}} \int_{B(x,r)} |f(y)| \; d\mu(y)$$

berhingga. Jika $\lambda = 0$, maka ruang Morrey tidak lain adalah ruang Lebesgue. Hasil-hasil mengenai operator integral fraksional (klasik) di ruang Lebesgue atas ruang Euclid yang homogen diberikan oleh Hardy dan Littlewood (1927), sedangkan hasil di ruang Morrey atas ruang Euclid yang homogen diberikan oleh Adams (1975) serta Chiarenza dan Frasca (1987). Di ruang bertipe homogen, ukuran Borel memenuhi *doubling condition*

$$\mu(B(x,2r) \leq CB(x,r).$$

Selanjutnya, misalkan $\chi_{B(a,r)}$ menyatakan fungsi karakteristik pada bola $B(a,r)$. Untuk membuktikan ketaksamaan tipe lemah di ruang Morrey tak homogen atas ruang metrik diperlukan teorema berikut. Teorema ini berkenaan dengan ketaksamaan yang melibatkan operator maksimal M .

Teorema 1. *Jika* $0 \leq \lambda < 1$, *maka untuk sembarang fungsi* f *di* $L^{1,\lambda}(\mu)$ *dan sembarang bola* $B(a,r)$ *di* $\mathbb{X}$ *berlaku*

$$\int_{\mathbb{X}} |f(x)| M\chi_{B(a,r)} d\mu(x) \leq Cr^{n\lambda} \|f\|_{L^{1,\lambda}(\mu)}.$$

***Bukti*.** Untuk sembarang fungsi f di $L^{1,\lambda}(\mu)$, diperoleh

$$\int_{\mathbb{X}} |f(x)| M\chi_{B(a,r)} d\mu(x)$$

$$\leq \int_{B(a,2r)} |f(x)|\, M\chi_{B(a,r)} d\mu(x) + \int_{\mathbb{X}\setminus B(a,2r)} |f(x)|\, M\chi_{B(a,r)} d\mu(x)$$

$$\leq \int_{B(a,2r)} |f(x)|\, M\chi_{B(a,r)} d\mu(x) + \sum_{k=i}^{\infty} \int_{B(a,2^{k+1}r)\setminus B(a,2^k r)} |f(x)| M\chi_{B(a,r)} d\mu(x)$$

$$\leq C\left(\int_{B(a,2r)} |f(x)|\, d\mu(x) + \sum_{k=i}^{\infty} \int_{B(a,2^{k+1}r)\setminus B(a,2^k r)} 2^{-kn} |f(x)| d\mu(x) \right)$$

$$\leq C\left(\int_{B(a,2r)} |f(x)|\, d\mu(x) + \sum_{k=i}^{\infty} 2^{-kn} \int_{B(a,2^{k+1}r)} |f(x)|\, d\mu(x) \right)$$

$$\leq C \|f\|_{L^{1,\lambda}(\mu)} \left((\mu(B(a,4r))^{\lambda} + \sum_{k=i}^{\infty} 2^{-kn} \left(\mu(B(a,2^{k+2}r)\right)^{\lambda} \right).$$

Dengan menggunakan *growth condition* dari μ pada persamaan (2) dan dengan menggunakan asumsi $0 < \lambda \leq n \leq m$ diperoleh

$$\int_{\mathbb{X}} |f(x)| M\chi_{B(a,r)} d\mu(x) \leq C\|f\|_{L^{1,\lambda}(\mu)} \left((4r)^{n\lambda} + \sum_{k=i}^{\infty} 2^{-kn+kn\lambda+2n\lambda}\, r^{n\lambda} \right).$$

$$\leq Cr^{n\lambda}\|f\|_{L^{1,\lambda}(\mu)}.$$

Dengan demikian, terbukti ketaksamaan pada konsekuen dalam teorema. ■

Untuk membuktikan ketaksamaan tipe lemah di ruang Morrey atas ruang metrik tak homogen juga diperlukan lemma berikut.

Lemma 2. *Untuk sembarang R positif dan bola* $B(a,r) \subset \mathbb{X}$ *berlaku*

$$\int_{B(y,R)} \frac{\chi_{B(a,r)}(x)}{d(x,y)^{n-\alpha}} d\mu(x) \leq CR^{\alpha} M\chi_{B(a,r)}(y).$$

Bukti. Dengan menggunakan *growth condition* diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_{B(y,R)} \frac{\chi_{B(a,r)(x)}}{d(x,y)^{n-\alpha}} d\mu(x) &= \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_{B(y,2^{j+1}R)\setminus B(y,2^{j}R)} \frac{\chi_{B(a,r)}(x)}{d(x,y)^{n-\alpha}} d\mu(x) \\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2^{j}R)^{n-\alpha}} \int_{B(y,2^{j+1}R)} \chi_{B(a,r)}(x)\, d\mu(x) \\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{(2^{j}R)^{\alpha} 2^{2n}}{(2^{j+2}R)^{n}} \int_{B(y,2^{j+1}R)} \chi_{B(a,r)}(x) d\mu(x) \\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{2^{j\alpha}R^{\alpha}}{\mu(B(y,2^{j+2}R))} \int_{B(y,2^{j+1}R)} \chi_{B(a,r)}(x) d\mu(x) \\
&\leq CR^{\alpha} M\chi_{B(a,r)}(y) \sum_{j=-\infty}^{-1} 2^{j\alpha}.
\end{aligned}$$

Karena deret $\sum_{j=-\infty}^{-1} 2^{j\alpha}$ konvergen, maka diperoleh ketaksamaan

$$\int_{B(y,R)} \frac{\chi_{B(a,r)}(x)}{d(x,y)^{n-\alpha}} d\mu(x) \leq CR^{\alpha} M\chi_{B(a,r)}(y).$$

Dengan demikian, bukti selesai. ■

Selanjutnya, dengan menggunakan Teorema 1 dan Lemma 2, akan dibuktikan ketaksamaan tipe lemah (1, *q*) di ruang Morrey atas ruang metrik tak homogen pada teorema berikut.

Teorema 3. *Jika* $0 < \alpha < n$ *dan* $0 \leq \lambda < 1 - \frac{\alpha}{n}$ *untuk suatu* λ, *maka terdapat konstanta positif* C *sehingga untuk setiap* $\gamma > 0$ *dan* $B(a,r) \subset \mathbb{X}$ *berlaku*

$$\mu(\{x \in B(a,r) : |I_{\alpha}f(x)| > \gamma\}) \leq Cr^{n\lambda} \left(\frac{\|f\|_{L^{1,\lambda}(\mu)}}{\gamma} \right)^{q}.$$

Bukti. Ambil sembarang bilangan positif *R*. Untuk setiap $f \in L^{1,\lambda}(\mu)$, dilakukan dekomposisi integral, yaitu

$$I_{\alpha f(x)} = \int_{B(x,R)} \frac{f(y)}{d(x,y)^{n-\alpha}} d\mu(y) + \int_{\mathbb{X}\setminus B(x,R)} \frac{f(y)}{d(x,y)^{n-\alpha}} d\mu(y) = A_1 + A_2.$$

Selanjutnya, estimasi untuk A_2 adalah

$$\begin{aligned} |A_2| &\leq \int_{\mathbb{X}\setminus B(x,R)} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{n-\alpha}} d\mu(y) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{B(x,2^{j+1}R)\setminus B(x,2^jR)} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{n-\alpha}} d\mu(y) \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2^jR)^{n-\alpha}} \int_{B(x,2^{j+1}R)} |f(y)|\, d\mu(y) \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2^jR)^{\alpha} 2^{2n}}{(2^{j+2}R)^n} \int_{B(x,2^{j+1}R)} |f(y)|\, d\mu(y). \end{aligned}$$

Karena μ memenuhi *growth condition*, maka diperoleh

$$\begin{aligned} |A_2| &\leq C \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{j\alpha} R^{\alpha} \left(\mu\left(B(x,2^{j+2}R)\right)\right)^{\lambda-1}}{\left(\mu(B(x,2^{j+2}R))\right)^{\lambda}} \int_{B(y,2^{j+1}R)} |f(y)|\, d\mu(y) \\ &\leq CR^{\alpha} \|f\|_{L^{1,\lambda}(\mu)} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\alpha} \left(\mu\left(B(x,2^{j+2}R)\right)\right)^{\lambda-1} \\ &\leq CR^{\alpha} \|f\|_{L^{1,\lambda}(\mu)} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\alpha} (2^{j+2}R)^{n(\lambda-1)} \\ &\leq CR^{\alpha+n(\lambda-1)} \|f\|_{L^{1,\lambda}(\mu)} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(\alpha+\alpha+n(\lambda-1))}. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan asumsi $0 \leq \lambda < 1 - \frac{\alpha}{n}$, didapatkan bahwa

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(\alpha+\alpha+n(\lambda-1))}$$

merupakan deret konvergen. Jadi,

$$|A_2| \leq CR^{\alpha+n(\lambda-1)} \|f\|_{L^{1,\lambda}(\mu)}.$$

Selanjutnya, misalkan

$$CR^{\alpha+n(\lambda-1)}\|f\|_{L^{1,\lambda}(\mu)} = \frac{\gamma}{2}.$$

Karena $|A_2| > \frac{\gamma}{2}$, maka diperoleh

$$\left\{x \in B(a,r) \colon |A_2| > \frac{\gamma}{2}\right\} = \emptyset.$$

Ini mengakibatkan

$$\mu\left(\left\{x \in B(a,r) \colon |A_2| > \frac{\gamma}{2}\right\}\right) = 0.$$

Selanjutnya,

$$\{x \in B(a,r) \colon |I_\alpha f(x)| > \gamma\} \subset \left\{x \in B(a,r) \colon |A_1| > \frac{\gamma}{2}\right\} \cup \left\{x \in B(a,r) \colon |A_2| > \frac{\gamma}{2}\right\}$$
$$= \left\{x \in B(a,r) \colon |A_1| > \frac{\gamma}{2}\right\}.$$

Dengan menggunakan Teorema 1 diperoleh

$\mu(\{x \in B(a,r) \colon |I_\alpha f(x)| > \gamma\})$

$$\leq \mu\left(\left\{x \in B(a,r) \colon |A_1| > \frac{\gamma}{2}\right\}\right)$$
$$\leq \mu\left(\left\{x \in B(a,r) \colon |A_1| > \frac{\gamma}{2}\right\}\right)$$
$$\leq \mu\left(\left\{x \in B(a,r) \colon \int_{B(x,R)} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{n-\alpha}}\, d\mu(y) > \frac{\gamma}{2}\right\}\right)$$

Kemudian, dengan menggunakan Lemma 2 dan ketaksamaan Chebysev,

$$\mu(\{x \in B(a,r) \colon |I_\alpha f(x)| > \gamma\})$$
$$\leq \frac{2}{\gamma}\int_{B(a,r)}\int_{B(x,R)} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{n-\alpha}}\, d\mu(y) d\mu(x)$$
$$\leq \frac{2}{\gamma}\int_{\mathbb{X}}\int_{B(x,R)} \frac{|f(y)|\chi_{B(a,r)}(x)}{d(x,y)^{n-\alpha}}\, d\mu(y) d\mu(x)$$
$$\leq \frac{2}{\gamma}\int_{\mathbb{X}} |f(y)|\left(\int_{B(x,R)} \frac{\chi_{B(a,r)}(x)}{d(x,y)^{n-\alpha}}\, d\mu(x)\right) d\mu(y)$$
$$\leq \frac{C}{\gamma}\int_{\mathbb{X}} |f(y)| R^\alpha M\chi_{B(a,r)}(y)\, d\mu(y)$$
$$\leq \frac{C}{\gamma} R^\alpha r^{n\lambda}\|f\|_{L^{1,\lambda}(\mu)}$$
$$\leq C r^{n\lambda}\left(\frac{\|f\|_{L^{1,\lambda}(\mu)}}{\gamma}\right)^q.$$

Dengan demikian, terbukti ketaksamaan yang diinginkan. ■

Umumnya, ketaksamaan tipe lemah (1, q) untuk operator integral fraksional dibuktikan dengan menggunakan ketaksamaan tipe lemah (1, 1) untuk operator maksimal dan ketaksamaan tipe Hedberg. Oleh karena itu, untuk memberikan bukti alternatif dari Teorema 3 akan disajikan terlebih dahulu ketaksamaan tipe lemah (1, 1) untuk operator maksimal (Teorema 4) dan ketaksamaan tipe Hedberg (Teorema 5) di ruang Morrey yang diperumum atas ruang metrik tak homogen.

Teorema 4. *Jika γ sembarang konstanta positif, maka untuk setiap $B(a,r) \in \mathbb{X}$ berlaku*

$$\mu(\{x \in B(a,r): Mf(x) > \gamma\}) \leq \frac{C}{\gamma} r^{n\lambda} \|f\|_{L^{1,\lambda}(\mu)}.$$

Teorema 5. *Misalkan m adalah dimensi dari ruang metrik $\mathbb{X}$ dan $0 < \alpha < n \leq m$. Jika $0 \leq \lambda < n - \alpha$, maka terdapat kontanta positif C sedemikian sehingga*

$$|I_\alpha f(x)| \leq C[Mf(x)]^{1-\alpha/n(\lambda-1)} \|f\|_{L^{1,\lambda}(\mu)}^{\alpha/n(\lambda-1)}.$$

Bukti. Dengan menggunakan *growth condition*, diperoleh

$$\begin{aligned}
|A_1| &\leq \int_{B(x,r)} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{n-\alpha}} d\mu(y) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_{B(x,2^{j+1}r)\setminus B(x,2^j r)} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{n-\alpha}} d\mu(y) \\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2^j r)^{n-\alpha}} \int_{B(x,2^{j+1}r)} |f(y)|\, d\mu(y) \\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{(2^j r)^\alpha 2^{2n}}{(2^{j+2} r)^n} \int_{B(x,2^{j+1}R)} |f(y)|\, d\mu(y) \\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{(2^j r)^\alpha}{\mu(B(y,2^{j+2}r))} \int_{B(x,2^{j+1}R)} |f(y)|\, d\mu(y) \\
&\leq C r^\alpha Mf(x).
\end{aligned}$$

Selanjutnya, didapatkan

$$|A_2| \leq \int_{\mathbb{X}\setminus B(x,r)} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{n-\alpha}} d\mu(y)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{B(x,2^{j+1}r)\setminus B(x,2^{j}r)} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{n-\alpha}}\, d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{j}r)^{n-\alpha}} \int_{B(x,2^{j+1}r)} |f(y)|\, d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(2^{j}r\right)^{\alpha} 2^{2n}}{(2^{j+2}r)^{n}} \int_{B(x,2^{j+1}r)} |f(y)|\, d\mu(y).$$

$$\leq C \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{j\alpha} r^{\alpha} \left(\mu\left(B\left(x,2^{j+2}r\right)\right)\right)^{\lambda-1}}{\left(\mu\left(B(x,2^{j+2}r)\right)\right)^{\lambda}} \int_{B(y,2^{j+1}r)} |f(y)|\, d\mu(y)$$

$$\leq C r^{\alpha} \|f\|_{L^{1,\lambda}(\mu)} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\alpha}\left(2^{j+2}r\right)^{n(\lambda-1)}$$

$$\leq C r^{\alpha+n(\lambda-1)} \|f\|_{L^{1,\lambda}(\mu)}.$$

Dengan memisalkan

$$r = \left(\frac{Mf(x)}{\|f\|_{L^{1,\lambda}(\mu)}}\right)^{1/n(\lambda-1)},$$

diperoleh

$$|I_{\alpha}f(x)| \leq C[Mf(x)]^{1-\alpha/n(\lambda-1)} \|f\|_{L^{1,\lambda}(\mu)}^{\alpha/n(\lambda-1)},$$

yang merupakan ketaksamaan yang diinginkan. ■

Bukti alternatif untuk Teorema 3. Dari ketaksamaan tipe Hedberg pada Teorema 5 diperoleh

$$\gamma < |I_{\alpha}f(x)| \leq C[Mf(x)]^{1-\alpha/n(\lambda-1)} \|f\|_{L^{1,\lambda}(\mu)}^{\alpha/n(\lambda-1)} = C[Mf(x)]^{1/q} \|f\|_{L^{1,\lambda}(\mu)}^{\alpha/n(\lambda-1)}$$

atau

$$Mf(x) > \left(\frac{\gamma}{\|f\|_{L^{1,\lambda}(\mu)}^{\alpha/n(\lambda-1)}}\right)^{q}.$$

Selanjutnya, Teorema 4 memberikan

$$\mu(\{x \in B(a,r) : |I_{\alpha}f(x)| > \gamma\})$$

$$\leq \mu\left(\left\{x \in B(a,r): Mf(x) > \left(\frac{\gamma}{\|f\|_{L^{1,\lambda}(\mu)}^{\alpha/n(\lambda-1)}}\right)^{q}\right\}\right)$$

$$\leq C\left(\frac{\|f\|_{L^{1,\lambda}(\mu)}^{\alpha/n(\lambda-1)}}{\gamma}\right)^{q} r^{n\lambda}\|f\|_{L^{1,\lambda}(\mu)}$$

$$\leq Cr^{n\lambda}\left(\frac{\|f\|_{L^{1,\lambda}(\mu)}}{\gamma}\right)^{q}.$$

Jadi, terbukti ketaksamaan tipe lemah (1, q) untuk operator integral fraksional di ruang Morrey atas ruang metrik tak homogen. ■

4. SIMPULAN

Hasil yang diperoleh pada makalah ini merupakan perumuman dari hasil Garcia-Cuerva dan Gatto [3] karena ruang Lebesgue merupakan kasus khusus dari ruang Morrey. Hasil yang serupa untuk operator integral fraksional (dengan versi yang berbeda, yaitu operator integral fraksional yang tidak melibatkan dimensi dari ruang metrik) di ruang Morrey atas ruang metrik (dengan versi yang berbeda) dapat dijumpai pada (Sihwaningrum dan Sawano, 2013). Pada (Sihwaningrum dan Sawano, 2013)., bukti ketaksamaan tersebut tidak menggunakan ketaksamaan Chebysev, tetapi menggunakan ketaksamaan tipe Hedberg dan ketaksamaan tipe lemah (1, 1) untuk operator maksimal.

5. DAFTAR PUSTAKA

Adams, D. R. (1975) A Note on Riesz Potential, *Duke Math. J.*, **42**, 765–778.

Chiarenza, F. & Frasca, M. (1987). Morrey Spaces and Hardy-Littlewood Maximal Function, *Rend. Mat.*, **7**, 273–279.

Evans, L.C. (1998) *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Maths, **19**, American Mathematical Society, Providence.

Garcia-Cuerva, J. & Gatto, A.E. (2004). Boundedness Properties of Fractional Integrals Associated to Non-Doubling Measures. *Studia Math*, **162**(3), 245–261.

Hardy, G. H. & Littlewood, J.E. (1927). Some Properties of Fractional Integral I. *Math. Zeit.*, **27**, 565–606.

Nazarov, F., Treil, S. & Volberg, A. (1998). Weak Type Estimates and Cotlar Inequalities for Calderón-Zygmund Operators on Nonhomogeneous Space, *Internat. Math. Res. Notices* **9**, 463–487.

Sawano, Y. (2005). Sharp Estimates of the Modified Hardy Littlewood Maximal Operator on the Non-homogeneous Space via Covering Lemmas, *Hokkaido Math. J.* **34**, 435–458.

Sihwaningrum, I., Maryani, S. & Gunawan H. 2012. Weak Type Inequalities for Fractional Integral Operators on Generalized Non-homogeneous Morrey Spaces. *Anal. Theory Appl.*, **28**(1), 65–72.

Sihwaningrum, I. & Sawano, Y. 2013. Weak and Strong Type Estimates for Fractional Integral Operator on Morrey Spaces over Metric Measure Spaces, *Eurasian Math. J.* **4**(1), 76–81.

Sihwaningrum, I., Suryawan, H.P. & Gunawan, H. 2010. Fractional Integral Operators and Olsen Inequalities on Non-Homogeneous Spaces. *Aust. J. Mah. Anal. Appl.* No.1, Article 14, 6pp. Diakses dari http://ajmaa.org/cgi-bin/paper.pl?string=v7n1/V7I1P14.tex

Verdera, J. 2002. The Fall of the Doubling Condition in Calderón-Zygmund Theory, *Pub. Mat.*, Vol Extra, 275–292.