INTEGRAL LIPAT DALAM MENGHITUNG VOLUME DAN LUAS PERMUKAN BENDA GEOMETRI SEDERHANA DAN TERPANCUNG

Ulil Azmi[1], Lilik Hendrajaya[2]
Pengajaran Fisika ITB, Bandung
E-mailkorespondensi: ulil.hasbi88@gmail.com

Abstrak: Pemahaman konsep fisika matematika sangat dibutuhkan dalam memecahkan berbagai persoalan fisika. Dalam studi ini, telah disusun sebuah acuan modul praktikum sebagai penguatan konsep fisika matematika mengenai integral lipat yang dapat digunakan untuk menghitung volume benda. Benda yang digunakan adalah benda bangun ruang sederhana (silinder, silinder pancung, bola, bola pancung, kerucut, dan kerucut pancung), di dalam modul praktikum ini berisi langkah-langkah menghitung volume benda ruang tersebut.

Kata Kunci: Integral lipat, volume, luas permukaan.

1. PENDAHULUAN

Fisika matematika adalah mata matakuliah yang dapat meningkatkan dan mengembangkan kemampuan peserta didik dalam berfikir analitik dan kuantitatif dalam menyelesaikan persoalan fisika. Melihat peranannya, maka perlu perlu dirancang pembelajaran yang lebih strategis. contoh-contoh soal dan penyelesaiannya, dan soal-soal latihan melainkan diikuti dengan praktikum yang sesuai dengan materi- materi yang di ajarkan.

Dalam tulisan ini dibahas sebuah acuan modul untuk materi integral lipat dan penggunaannya dalam menentukan volume- volume bangun ruang sederhana, bola terpancung, dan kerucut terpancung. pembahasan bola terpancung dan kerucut terpancung dapat menjadi hal yang mebagi peserta didik sebagai bahan belajar yang dapat mengembangkan nalar dalam memahami materi integral lipat untuk menentukan volume bangun ruang tersebut.

Integral

Integral suatu fungsi *f(x* terhadap *x* yang didefinisikan dengan $\int f(x)dx$. Jika $g(x)=\int f(x)dx$ maka berarti *g(x)* adalah fungsi yang turunannya terhadap *x* sama dengan *f(x)*.Integral dengan batas a dan b yang dinyatakan dengan $\int_a^b f(x)dx$ dinamakan integral tertentu. Integral ini diartikan sebagai sebagai luas daerah yang dibentuk antara kurva *f(x)*, sumbu *x*, garis *x* = a dan garis *x* = b.

Integral Lipat Dua dan Integral Lipat Tiga

Integral lipat dua dari suatu fungsi*f(x,y)* pada suatu daerah A dalam bidang *xy*dinyatakan sebagai volume di bawahfungsi *f(x,y)* dan dibatasi luasan A. Integral ini biasanya ditulis sebagai $\iint_A f(x,y)dxdy$. Selain itu, integral lipat dua ini dapat ditafsirkan sebagai luas suatu daerah dengan batas dari suatu kurva tertentu.

3. METODE PENELITIAN

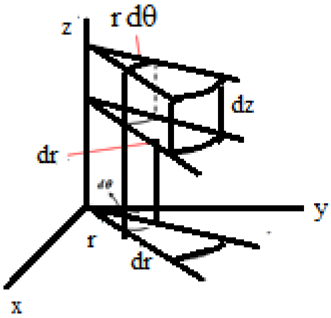
Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka.Dalam tahap ini dicari sumber pustaka dan dipilih bagian dari sumber pustaka untuk menentukan voume geometri (bola terpancung, silinder terpancuk, dan kerucut terpancung).

x

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

a. Luas Permukaan Bangun Simetris

Tabung (Silinder)



Gambar 1. Elemen luas dan elemen volume dalam sistem koordinat silinder (Boas, 2006).

Luas Permukaan Tabung

Luas selimut tabung:

$$dA = Rd\theta dz$$

$$L_{SS} = \int_{z=0}^{h}\int_{\theta=o}^{2\pi} Rd\theta dz = 2\pi R\int_{z=0}^{h} dz = 2\pi Rh$$

Luas lingkaran:

$$dA = rdrd\theta$$

$$L_{lingkaran} = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=o}^{2\pi} rdrd\theta = 2\pi\int_{r=0}^{0} rdr = 2\pi\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^R = \pi R^2$$

Luas permukaan tabung (silinder):

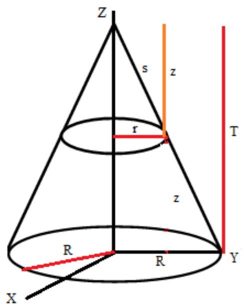
$$L_{PS} = L_{lingkaran} + L_{ss} = \pi R^2 + 2\pi Rh$$

Volume tabung (silinder):

$$V_{tabung} = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=o}^{\pi}\int_{z=0}^{h} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr \;= \pi R^2 h$$

Kerucut

Luas Permukaan Kerucut:



Gambar 2. Kerucut (perbandingan segitiga)

Luas permukaan kerucut dapat ditentukan melalui persamaan sederhana sebagai berikut:

$$\frac{\text{luas selimut kerucut}}{\text{luas lingkaran}} = \frac{\text{keliling alas kerucut}}{\text{keliling lingkaran}}$$

$$\frac{A}{\pi s^2} = \frac{2\pi R}{2\pi s} \Rightarrow A = \pi s^2 \frac{2\pi R}{2\pi s} \Rightarrow A \;= \pi s R$$

Jika diselesaikan dengan menggunakan integral lipat dua, maka persamaan luas kerucut adalah sebagai berikut:

$$\frac{r}{z} = \frac{R}{T} \Rightarrow r = \frac{R}{T} z$$

$$s^2 = z^2 + r^2 = z^2 + \frac{R^2}{T^2} z^2 = z^2 \left[1 + \frac{R^2}{T^2} \right]$$

$$s = z\sqrt{1 + \frac{R^2}{T^2}}$$

$$ds = dz\sqrt{1 + \frac{R^2}{T^2}}$$

$$dA = r d\theta ds$$

$$A = \int_0^h \int_0^{2\pi} r d\theta ds = \pi R s$$

dimana $: s = \sqrt{T^2 + R^2}$

Dengan menggunakan integral lipat tiga, volume kerucut dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\frac{R}{T} = \frac{r}{T-z} \Rightarrow r = \frac{R(T-z)}{T}$$

$$dv = r\, d\theta dr dz$$

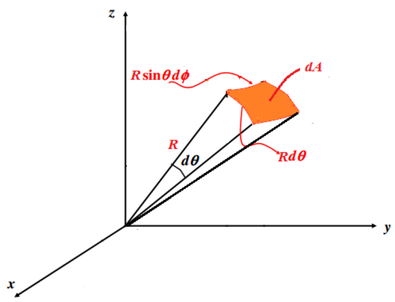
$$= \int_{z=0}^{T} dz \int_{r-0}^{\frac{R(T-z)}{T}} r dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = 2\pi \int_{z=0}^{T} \frac{1}{2} r^2 \Big|_{r=0}^{\frac{R(T-z)}{T}} dz$$

$$= 2\pi \int_{z=0}^{T} \frac{1}{2} \frac{R^2}{T^2} (T^2 - 2Tz + z^2) dz$$

$$= \frac{\pi R^2}{T^2} \left(T^3 - T^3 + \frac{1}{2} T^3 \right)_0^T$$

$$= \frac{\pi R T}{3}$$

Bola



Gambar 3. Elemen luas dan elemen volume dalam sistem koordinat bola

$$dA = (Rd\theta)(R\sin\theta d\varphi) = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$A = \int_{\theta=o}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} R^2 \sin\theta d\theta d\varphi = R^2(-\cos|_0^{\pi})2\pi = R^2 2\pi(2) = 4\pi R^2$$

Volume bola:

$$dv = (r\sin\theta\, d\theta\, d\varphi)(dr)(rd\theta) = r^2 \sin\theta\, d\theta d\phi dr$$

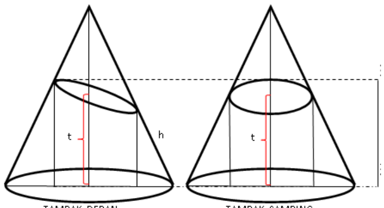
$$V_{bola} = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \sin\theta\, d\theta d\phi dr$$

$$= \frac{1}{3}R^3(-\cos\theta\big|_0^{\pi})2\pi = \frac{2\pi}{3}R^3(2) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

b. Volume Kerucut Terpancung Miring

Dalam pembahasan ini, kerucut dipancung miring. Kerucut yang dipancung ini dibagi menjadi 2 bagian, yaitu kerucut bagian atas (kerucut miring) dan pancungan bagian bawah.Kerucut miring berbeda dengan kerucut biasa. Kerucut miring adalah kerucut yang sumbunya tidak tegak lurus dengan alas. Kerucut miring memiliki ketinggian yang tegak lurus dengan alasnya.

Berikut adalah langkah untuk mendapatkan volume kedua bagian kerucut yg terpancung tersebut:



Gambar 3. Tampak depan atau samping dari kerucut yang terpancung

Volume pancungan bagian bawah (Vt) dapat diperoleh dengan mengurangkan volume kerucut penuh (Vp) dengan volume kerucut miring atas (Vm):

$$Vt = Vp - Vm$$

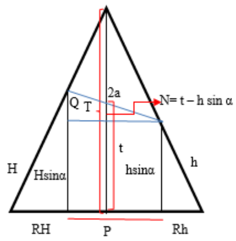
Dimana :

$$Vp = \frac{1}{3}\pi r^3$$

$Vm = \frac{1}{3} \times$ luas elips miring (LE) $\times$ tinggi dari elips ke puncak kerucut Dengan

$$LE = \pi\, a\, b$$

$$= \pi\left[\frac{sumbu\ panjang}{2}\right]\left[\frac{sumbu\ pendek}{2}\right]$$

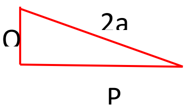


Sudut kemiringan bidang kerucut (α) adalah:

$$\tan\alpha = \frac{T}{R}$$

Panjang sisi miring kerucut (S) :

$S = \sqrt{R^2 + T^2}$, sudut miringnya juga bisa didapatkan $\cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2+T^2}}$



$$Rh = h\cos\alpha = \frac{hR}{\sqrt{R^2+T^2}}$$

$$RH = H\cos\alpha = \frac{HR}{\sqrt{R^2+T^2}}$$

Untuk menetukan besar P,

$$P = 2R - RH - Rh = 2\mathrm{R} - \frac{HR}{\sqrt{R^2+T^2}} - \frac{hR}{\sqrt{R^2+T^2}}$$

$$= \mathrm{R}\left[2 - \frac{(H+h)}{\sqrt{R^2+T^2}}\right] = 2R - (H+h)\cos\alpha$$

Besar Q,

$$Q = H\sin\alpha - h\sin\alpha = (H-h)\frac{T}{\sqrt{R^2+T^2}} = (H-h)\sin\alpha$$

Besar *a*,

$$(2a)^2 = Q^2 + P^2$$

$$2a = \sqrt{Q^2+P^2}$$

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{Q^2+P^2}$$

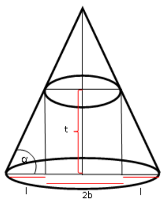
Menetukan sumbu pendek (2b)

Dengan perbandingan segitiga (P,Q), dapat ditentukan t, maka:

$$\frac{(t - h\sin\alpha)}{(H-h)\sin\alpha} = \frac{R - h\cos\alpha}{2R - (H+h)\cos\alpha}$$

$$t - h\sin\alpha = \frac{R - h\cos\alpha}{2R-(H+h)\cos\alpha}((H-h)\sin\alpha)$$

$$t = \frac{R - h\cos\alpha}{2R-(H+h)\cos\alpha}((H-h)\sin\alpha) + h\sin\alpha$$



TAMPAK SAMPING

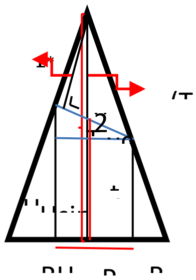
$$\tan\alpha = \frac{t}{l} \Rightarrow l = \frac{t}{\tan\alpha} = t\frac{t}{T/R} = t\frac{R}{T}$$

$$= \frac{R(R - h\cos\alpha)}{T(2R-(H+h)\cos\alpha)}((H-h)\sin\alpha) + h\sin\alpha$$

Maka besar b :

$$b = R - l$$

$$= R - \frac{R(R - h\cos\alpha)}{T(2R-(H+h)\cos\alpha)}((H-h)\sin\alpha) + h\sin\alpha$$



Luas elips (LE) adalah:

$$LE = \pi a b$$
$$= \pi\left[\frac{1}{2}\sqrt{Q^2 + P^2}\right]x$$
$$\left[R - \frac{R(R - h\cos\alpha)}{T(2R - (H+h)\cos\alpha)}((H-h)\sin\alpha) + h\sin\alpha\right]$$

dengan,

$$P = 2R - (H+h)\cos\alpha$$
$$Q = (H-h)\sin\alpha$$

Tinggi kerucut ke puncak elips (t^*)

$$t^* = (\mathrm{T} - \mathrm{t})\sin\gamma = (\mathrm{T} - \mathrm{t})\cos\beta$$
$$\cos\beta = \frac{P}{2a} = \frac{2R - (H+h)\cos\alpha}{\sqrt{(P = 2R - (H+h)\cos\alpha)^2 + ((H-h)\sin\alpha)^2}}$$
$$t^* = \left[\mathrm{T} - \frac{R - h\cos\alpha}{2R - (H+h)\cos\alpha}((H-h)\sin\alpha) + h\sin\alpha\right]x$$
$$\left[\frac{2R - (H+h)\cos\alpha}{\sqrt{(P = 2R - (H+h)\cos\alpha)^2 + ((H-h)\sin\alpha)^2}}\right]$$

Volume kerucut miring atas(Vm):

$$Vm = \frac{1}{3} \times \text{luas elips miring (LE)} \times \text{tinggi dari elips ke puncak kerucut}$$
$$= \frac{1}{3}\pi a b t^*$$

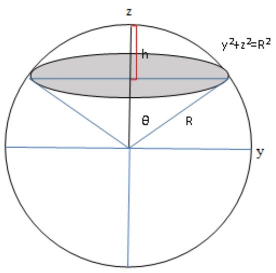
Volume pancungan bagian bawah (Vt):

$$Vt = \text{volume kerucut penuh (Vp)} - \text{volume kerucut miring atas (Vm)}$$
$$= \frac{1}{3}\pi a b t^2 - \frac{1}{3}\pi a b t^*$$

c. Volume Bola Terpancung (Tembereng Bola)

Tembereng bola adalah bangun ruang bagian dari potongan atau pancungan bola yang dibatasi oleh sebagian bidang bola dan sebuah daerah lingkaran dari sisi potonganya. Daerah lingkaran itu dari sisi tersebut disebut alas, bagian bolanya disebut bidang lengkung. Tembereng bola dapat ditentukan dengan bantuan volume bola.

Dalam pembahasan ini, tembereng dibagi menjadi 2 segmen, yaitu tembereng besar dan tembereng kecil. Tembereng besar adalah bangun ruang (tembereng) yang memiliki ukuran lebih besar dan berada dibagian bawah, sedangkan tembereng kecil adalah tembereng yang bervolume kecil dan berada pada bagian atas (dengan tebal h).Untuk menentukan volume tembereng kecil, hal yang perlu diperhatikan dari Gambar III.3. adalah batas-batas yang akan digunakan yaitu dari R-h sampai dengan R,dengan h adalah ketebalan dari tembereng kecil dan R adalah jari-jari bola.



Gambar 4. Bola terbancung menjadi dua bagian (tembereng besar dan tembereng kecil)

Volume tembereng kecil dapat ditentukan dengan menggunakan intergral, melalui phytagoras didapatkan $R^2 = y^2+z^2$.

$$dv = \pi y^2 dz$$

$$= \pi \int_{R.h}^{R} (R^2 - z^2) dz$$

$$= \pi R^2 z \Big|_{R-h}^{R} - \frac{\pi}{3} z^3 \Big|_{R-h}^{R}$$

$$= \pi R^2 \left[R - R + h\right] - \frac{\pi}{3}\left[R^3 - (R-h)^3\right]$$

$$= \pi R^2 h - \frac{\pi}{3}\left[R^3 - R^3 + 3R^2 h - 3Rh^2 + h^3\right]$$

$$= \pi R^2 h - \frac{\pi h}{3}\left[3R^2 - 3Rh + h^2\right]$$

$$= \pi R^2 h - \frac{\pi h}{3}\left[R^2 + 2R^2 - 2Rh - Rh + h^2\right]$$

$$= \pi R^2 h - \frac{\pi h}{3}\left[R^2 + 2R(R-h) - h(R-h)\right]$$

$$= \pi R^2 h - \frac{\pi h}{3}\left[R^2 + 2R(R-h) - h(R-h)\right]$$

$$= \pi R^2 h - \frac{\pi h}{3}\left[R^2 + (2R-h)(R-h)\right]$$

$$= \pi R^2 h - \frac{\pi}{3} R^2 h + \frac{\pi}{3} h(2R-h)(R-h)$$

$$= \frac{2}{3}\pi R^2 h + \frac{\pi}{3} h(2R-h)(R-h)$$

$$= \frac{\pi}{3} h \left[2R^2 - (2R^2 - 2hR - hR + h^2)\right]$$

$$= \frac{\pi}{3} h \left[2R^2 - 2R^2 + 2hR + hR - h^2)\right]$$

$$= \frac{\pi}{3} h \left[3Rh - h^2)\right]$$

$$V_T = \frac{\pi}{3} h^2 \left[3R - h)\right]$$

Setelah didapatkan volume tembereng kecil, juga bisa didapatkan volume tembereng besar. Volume tembereng besar dapat ditetukan dengan mengurangi volume bola dengan volume tembereng kecil

$$\text{Volume bawah (VB)} = \text{Volume bola utuh} (V_{bola}) - \text{Volume tembereng} (V_T)$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{\pi}{3} h^2 \left[3R - h)\right]$$

4. Kesimpulan

Adapun kesimpulan yang dapat di ambil dari tulisan ini adalah:

1. Integral lipat dapat digunakan dalam menentukan volume benda ruang seperti tabung, bola silinder dan lain lain.
2. Dari perhitungan penentuan volume bangun ruang terpancung ini dapat dijadikan sebagai bahan dasar bagi peserta untuk memahami materi integral lipat.

5. DAFTAR PUSTAKA

Boas, L. m. (2006). *Mathematical Methods In The Physical Science.* Canada: John Willey and sons.

Clemens, S. R. (1984). *Geometry.* USA: Addision-Westley Publishing Company, inc.

Mujiarto R, K. J. (2010). *Matematika Fisika 1.* Bandung: ITB.

Varberg, P. (2007). *Kalkulus Edisi sembilan.* Indonesia: Erlangga.