M-2

# PERHITUNGAN PREMI ASURANSI KENDARAAN MENGGUNAKAN PENDEKATAN DISTRIBUSI PELUANG

**Anita Andriani**
Universitas Hasyim Asy'ari Tebuireng, Jombang
anita.unhasy@gmail.com

***Abstrak***

*Asuransi kendaraan bermotor adalah salah satu jenis asuransi yang paling diminati oleh masyarakat. Dengan mengasuransikan kendaraannya, masyarakat dapat meminimalisir kerugian akibat dari resiko yang mungkin terjadi di jalanan serta meningkatkan kehati – hatian berkendara. Premi awal asuransi kendaraan ditentukan berdasarkan usia, jenis kelamin, jenis kendaraan, dan domisili pemegang polis. Pada makalah ini akan dibahas tentang penentuan premi yang didasarkan pada sejarah klaim pemegang polis, disebut dengan sistem bonus-malus. Perhitungan premi untuk tahun berikutnya dilakukan dengan menggunakan pendekatan distribusi peluang dan Bayessian. Distribusi peluang yang akan digunakan adalah gabungan antara distribusi binomial negatif dengan distribusi invers Gaussian. Estimasi parameter dilakukan dengan metode maksimum likelihood, hasil estimasi parameter akan digunakan untuk melihat kecocokan data dengan distribusi. Selanjutnya, metode Bayessian digunakan untuk perhitungan premi pada sistem bonus malus. Berdasarkan hasil fitting dan prosentase kenaikan premi, dalam studi kasus yang dilakukan dapat disimpulkan bahwa distribusi binomial negatif–invers Gaussian dapat digunakan sebagai alternative perhitungan premi asuransi kendaraan dengan system bonus malus.*

***Kata Kunci:*** *bonus malus; distribusi peluang; premi asuransi kendaraan*

## 1. PENDAHULUAN

Peningkatan jumlah kendaraan di masyarakat yang tidak diimbangi dengan fasilitas jalan yang memadai menyebabkan padatnya arus kendaraan di jalan raya. Akibatnya probabilitas terjadinya kecelakaan semakin besar. Salah satu cara yang dapat dilakukan untuk mengurangi akibat dari risiko kecelakaan adalah dengan mengambil jasa asuransi. Dalam asuransi kendaraan (motor atau mobil), premi dasar ditentukan berdasarkan besar, harga atau kapasitas dari kendaraan yang diasuransikan. Penentuan besar premi pada tahun berikutnya hanya dipengaruhi oleh banyaknya kecelakaan dalam satu tahun periode sebelumnya. Penentuan premi seperti ini disebut dengan sistem bonus-malus. Sistem ini pertama kali diperkenalkan di Eropa pada awal tahun 1960 dan dikembangkan oleh Bichsel dan Buhlman tahun 1964 dan Delaporte pada tahun 1965 [6].

Sistem bonus-malus adalah sistem asuransi yang membagi kelas – kelas premi. Premi yang dibayarkan dipengaruhi oleh jumlah klaim yang diajukan oleh pemegang polis di tahun sebelumnya. Dalam sistem bonus-malus jika pemegang polis melakukan klaim di tahun sebelumnya, maka akan dikenakan malus (penalti) yaitu peningkatan jumlah premi yang harus dibayar untuk tahun berikutnya. Sebaliknya jika pemegang polis di tahun sebelumnya tidak melakukan klaim, maka akan diberikan bonus (diskon) yaitu pengurangan jumlah premi yang harus dibayar untuk tahun berikutnya [3].

Salah satu distribusi yang sering digunakan untuk memodelkan klaim adalah distribusi Poisson. Namun pada prakteknya data klaim asuransi kendaraan sering terjadi overdispersi atau variansi sampel lebih besar dari rataan sampel. Ketika model Poisson diaplikasikan untuk data yang overdispersi maka akan memberikan hasil yang kurang tepat. Sebagai alternatif dalam mengatasi data yang mengalami overdispersi adalah dengan menggunakan distribusi *mixed* Poisson. Denuit telah menggunakan distribusi *mixed Poisson* untuk memodelkan berbagai klaim asuransi kendaraan bermotor [1]. Wilmot menggunakan distribusi *mixed* Poisson dengan invers Gaussian sebagai alternatif dari distribusi binomial negatif untuk perhitungan frekuensi klaim [9], yang kemudian diteruskan oleh Trembley [9], Walhin & Paris [10] yang menggunakan distribusi *mixed* Poisson-invers Gaussian untuk premi pada sistem bonus malus. Distribusi *mixed* binomial negatif, seperti binomial negatif-invers Gaussian untuk perhitungan premi telah diperkenalkan oleh Ojeda [8] dan Gomez & Sarabia [2].

Makalah ini akan membahas tentang aplikasi distribusi binomial negatif-invers Gaussian dalam penentuan premi pada sistem bonus malus. Sebagai pembanding performa akan dipilih distribusi Poisson – invers Gaussian. Estimasi parameter akan didapatkan dengan menggunakan metode maksimum likelihood, sedangkan perhitungan premi dilakukan dengan *Bayesian*.

## 2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan mempelajari karya – karya ilmiah yang disajikan dalam bentuk buku, jurnal, makalah, tesis, disertasi ataupun artikel yang relevan dengan topik penelitian, khususnya terkait dengan distribusi probabilitas seperti binomial negatif dan invers Gaussian, distribusi gabungan dalam ilmu aktuaria (*mixture)*, metode maksimum *likelihood*, dan sistem bonus malus. Berikut diberikan beberapa definisi dan teorema yang akan digunakan untuk membentuk distribusi binomial negative – invers Gaussian dan tabel sistem bonus malus

### 2.1 Distribusi Gabungan (*Mixture*)

**Teorema 2.1 [4]** Jika $X$ memiliki fungsi kepadatan probabilitas $f_{X|\Lambda}(x|\lambda)$ dan fungsi kumulatif $F_{X|\Lambda}(x|\lambda)$, dengan $\lambda$ adalah parameter dari $X$ dan $X$ mempunyai parameter lain yang tidak berhubungan dengan $\lambda$, sedangkan $\lambda$ adalah suatu nilai dari peubah acak $\Lambda$ dengan fungsi kepadatan probabilitas $f_\Lambda(\lambda)$, maka fkp dari $f_X(x)$ adalah:

$$f_X(x) = \int f_{X|\Lambda}(x|\lambda)\, f_\Lambda(\lambda) d\lambda$$

$f_X(x)$ inilah yang disebut dengan distribusi *mixture*. Momen dari distribusi *mixture* dapat dicari dengan

$$E(X^k) = E[E(X^k|\Lambda)]$$

sedangkan untuk variansinya adalah

$$Var(X) = E[Var(X|\Lambda)] + Var[E(X|\Lambda)].$$

**2.2 Distribusi – Distribusi Probabilitas**

**Definisi 2.1 [5]** Jika variabel random $Y$ didefinisikan sebagai banyaknya kegagalan yang terjadi sebelum didapatkan sukses ke$-r$, maka distribusi probabilitas dari $Y$ adalah

$$P(Y = y) = \binom{y + r - 1}{y} p^r (1 - p)^y \quad , \; y = 0,1,2,3, \ldots$$

fungsi pembangkit probabilitas distribusi binomial negatif adalah

$$P_Y(z) = p^r (1 - zq)^{-r}$$

dengan mean $E(Y) = \frac{r(1-p)}{p}$ dan variansi $Var(Y) = \frac{r(1-p)}{p^2}$.

**Definisi 2.2 [11]** Distribusi Poisson memiliki fungsi massa probabilitas:

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \qquad x = 0,1,2,3, \ldots$$

dengan fungsi pembangkit probabilitas

$$P_X(z) = e^{\lambda(z-1)}, \qquad \lambda > 0 \,,$$

Mean distribusi Poisson adalah $E(X) = \lambda$ dan variansinya adalah $Var(X) = \lambda$.

**Definisi 2.3 [7]** Variabel random $X$ dikatakan berdistribusi invers Gaussian dengan parameter $\mu$ dan $\theta$ jika fungsi kepadatan probabilitas $x$ berbentuk

$$IG(x; \mu, \theta) = \sqrt{\frac{\theta}{2\pi x^3}} \exp\left\{-\frac{\theta(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right\}, \qquad 0 < x < \infty$$

Fungsi pembangkit momen distribusi invers Gaussian adalah sebagai berikut

$$M_X(t) = \exp\left[\frac{\theta}{\mu}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\mu^2 t}{\theta}}\right)\right]$$

dengan mean $E(X) = \mu$ dan variansi $Var(X) = \frac{\mu^3}{\theta}$.

**2.3 Metode Maksimum Likelihood**

**Definisi 2.4 [4]** Fungsi likelihood $\theta$ adalah perkalian dari peubah acak $X_1, X_2, \ldots, X_n$, yang dinotasikan:

$$L(\theta) = \prod_{j=1}^{\infty} \left[p(x_j|\theta)\right]^{n_j}$$

dengan $x_j$ adalah observasi $x$ ke$-j$, $p(x_j|\theta) = p_j = f(x)$ adalah fungsi kepadatan probabilitas peubah acak $X$ dan $n_j$ adalah frekuensi observasi ke$-j$

### 2.4 Distribusi Prior dan Posterior

**Definisi 2.5 [11]** Distribusi $\theta$ dari $x$ disebut dengan distribusi posterior jika

$$\pi(\theta|x) = \frac{f(x\,,\theta)}{g(x)} = \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{g(x)}$$

dengan $g(x)$ adalah distribusi marginal dari $x$, yang dapat dicari menggunakan:

$$g(x) = \begin{cases} \sum_{\theta} f(x|\theta)\pi(\theta)\,, \text{ jika } \theta \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x|\theta)\pi(\theta), \text{ jika } \theta \text{ kontinu} \end{cases}$$

### 2.5 Sistem Bonus Malus

Secara umum sistem bonus malus didasarkan pada variabel random $K = k_1, k_2, \dots, k_t$ yang menyatakan banyaknya klaim dari pemegang polis selama periode $t$, yang mengikuti fungsi massa peluang $f(K|\theta)$, dengan $\theta$ adalah parameter yang tidak diketahui. Parameter $\theta$ diperoleh dari variabel random distribusi prior yang diberikan. Variabel random $K$ diasumsikan i.i.d

Premi pada sistem bonus malus dihitung dengan menggunakan rumus

$$\delta^*(K,t) = P_0 \frac{\mathbb{E}_{f(\theta|K)}\big[[\delta(\theta)]\big]}{\mathbb{E}_{f(\theta)}\,[\delta(\theta)]}$$

dengan $P_0$ adalah premi awal yang dibayarkan, $\delta(\theta) = \sum_k k\, P(K = k|\theta)$, $f(\theta)$ adalah distribusi prior dan $f(\theta|K)$ adalah distribusi posterior [2].

## 3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

### 3.1 Kharakteristik Distribusi Binomial Negatif-Invers Gaussian

Variabel random $X$ mempunyai distribusi binomial negatif-invers Gaussian jika memenuhi :

$$X|\lambda \sim BN(r, p = e^{-\lambda})$$
$$\lambda \sim IG(\mu, \psi)$$

dengan $r, \mu, \psi > 0$. Distribusi ini dinotasikan dengan $X \sim BNIG(r, \mu, \psi)$.

Distribusi binomial negatif-invers Gaussian memiliki fungsi kepadatan peluang

$$P(X) = \int_0^\infty P(x|\lambda)\, f(\lambda;\theta) d\lambda$$

dengan $f(\lambda;\mu,\psi)$ adalah fungsi kepadatan peluang untuk distribusi invers Gaussian dengan $\theta = \mu, \psi$ dan $P(X = x|\lambda)$ adalah fungsi kepadatan peluang untuk distribusi binomial negatif dengan $p = e^{-\lambda}$.

$$P(X)=\int_0^\infty \binom{r+x-1}{x}\sum_{j=0}^{x}(-1)^j\binom{x}{j}e^{-\lambda(r+j)}f(\lambda;\theta)d\lambda$$
$$=\binom{r+x-1}{x}\sum_{j=0}^{x}(-1)^j\binom{x}{j}\int_0^\infty e^{-\lambda(r+j)}f(\lambda;\theta)d\lambda$$
$$=\binom{r+x-1}{x}\sum_{j=0}^{x}(-1)^j\binom{x}{j}exp\left[\frac{\psi}{\mu}\left(1-\sqrt{1+\frac{2(r+j)\mu^2}{\psi}}\right)\right], x=0,1,2...$$

momen faktorial ke$-k$ distribusi binomial negatif-invers Gaussian adalah

$$P_X{}^k(1)=E_\lambda\{E[P_X{}^k(1)(x|\lambda)]\}$$
$$=E\left[\frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)}\left(\frac{1-e^{-\lambda}}{e^{-\lambda}}\right)^k\right]$$
$$=\frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)}E\left(e^\lambda-1\right)^k$$
$$=\frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^jE\left(e^{\lambda(k-j)}\right)$$
$$=\frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j\,exp\left[\frac{\psi}{\mu}\left(1-\sqrt{1-\frac{2(k-j)\mu^2}{\psi}}\right)\right]$$

momen pertama distribusi binomial negatif-invers Gaussian adalah

$$P_X{}^1(1)=\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r)}\sum_{j=0}^{1}\binom{1}{j}(-1)^j M_\lambda(1-j)=r(M_\lambda(1)-1)$$
$$=r(M_\lambda(1)-1)=E(X)$$

sedangkan momen keduanya adalah

$$P_X{}^2(1)\ =\frac{\Gamma(r+2)}{\Gamma(r)}\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}(-1)^j M_\lambda(2-j)$$
$$=(r^2+r)\{M_\lambda(2)-2M_\lambda(1)+1\}$$
$$E(X^2)\ =(r^2+r)\{M_\lambda(2)-2M_\lambda(1)+1\}+E(X)$$
$$=(r^2+r)M_\lambda(2)-(2r^2+r)M_\lambda(1)+r^2.$$

Variansi dari distribusi binomial negatif-invers Gaussian adalah

$$Var(X)=(r^2+r)M_\lambda(2)-rM_\lambda(1)-r^2M_\lambda^2(1).$$

### 3.2 Estimasi Parameter Distribusi Binomial Negatif-Invers Gaussian

Misalkan parameter dari distribusi invers Gaussian disimbolkan dengan $\Theta=(\theta_1=\mu,\theta_2=\psi)$, $f_x$ adalah frekuensi observasi dan fungsi kepadatan peluang disimbolkan dengan $p_0,\dots,p_n$. Sehingga fungsi *likelihood* untuk $\Phi=(r,\Theta)$ adalah

$$L(\Phi) = \prod_{x=0}^{n} [p_x]^{f_x}$$

$$L(\Phi) = \prod_{x=0}^{n} \left[ \binom{r+x-1}{x} \sum_{j=0}^{x} \binom{x}{j} (-1)^j \times M_\lambda\big(-(r+j)\big) \right]^{f_x}$$

$$\ln L(\Phi) = \sum_{x=0}^{n} f_x \ln[U]$$

dengan

$$U = \binom{r+x-1}{x} \textstyle\sum_{j=0}^{x} \binom{x}{j} (-1)^j M_\lambda\big(-(r+j)\big)$$

turunan parsial terhadap $\theta_i$ dan $r$ adalah

$$\frac{\partial \ln L(\Phi)}{\partial \theta_i} = \sum_{x=0}^{n} \frac{f_x}{p_x} \frac{\partial}{\partial \theta_i} [U] = 0, \qquad i = 1{,}2$$

$$\frac{\partial\, ln\, L(\Phi)}{\partial r} = \sum_{x=0}^{n} \frac{f_x}{p_x} \frac{\partial}{\partial r} [U] = 0$$

turunan $M_\lambda(t)$ terhadap $\mu$ dengan menggunakan turunan parsial adalah

$$\frac{\partial M_\lambda(t)}{\partial \mu} = \exp\left[\frac{\psi}{\mu}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2\mu^2 t}{\psi}}\right)\right] \times \left(\frac{\psi}{\mu^2}\left[1 - \sqrt{1 + \frac{2\mu^2 t}{\psi}}\right] - \frac{2t}{\sqrt{1 + \frac{2\mu^2 t}{\psi}}}\right)$$

turunan $M_\lambda(t)$ terhadap $\psi$ adalah

$$\frac{\partial M_\lambda(t)}{\partial \psi} = \exp\left[\frac{\psi}{\mu}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2\mu^2 t}{\psi}}\right)\right] \times \left[\frac{1}{\mu}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2\mu^2 t}{\psi}}\right) + \frac{\mu t}{\psi \sqrt{1 + \frac{2\mu^2 t}{\psi}}}\right]$$

turunan $M_\lambda(t)$ terhadap $r$,

$$\frac{\partial M_\lambda(t)}{\partial r} = \exp\left[\frac{\psi}{\mu}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2\mu^2 t}{\psi}}\right)\right] \times \left(-\frac{\mu}{\sqrt{1 + \frac{2\mu^2 t}{\psi}}}\right)$$

untuk mendapatkan nilai parameter – parameter distribusi binomial negatif-invers Gaussian selanjutnya dihitung dengan bantuan software komputasi.

### 3.3 Premi Bonus Malus Distribusi Binomial Negatif – Invers Gaussian

Premi bonus malus distribusi binomial negatif-invers Gaussian dihitung menggunakan rumus

$$\delta^*(x,n) = P_0 \frac{E_{f(\lambda|x)}[\delta(\lambda)]}{E_{f(\lambda)}[\delta(\lambda)]} = P_0 \frac{\delta(x,n)}{\delta(0,0)}$$

dengan:

$\delta(x,n) \ = E_{f(\lambda|x)}[\delta(\lambda)]$

$\delta(\lambda) \quad = \sum_x x\, P(X = x|\lambda) = r\left(e^{\lambda} - 1\right)$

$f(\lambda) \quad = \sqrt{\frac{\psi}{2\pi\lambda^3}} \exp\left(-\frac{\psi(\lambda-\mu)^2}{2\mu^2\lambda}\right)$

$f(\lambda|x)$ = distribusi posterior

$x$ = banyaknya klaim yang diajukan

$n$ = periode pengajuan klaim (tahun)

$P_0$ = premi awal

Distribusi posterior diperoleh dengan cara membagi distribusi bersama dari binomial negatif dan distribusi invers Gaussian dengan distribusi marginalnya, yaitu distribusi *mixture* binomial negatif-invers Gaussian,

$$f(\lambda|x) = \frac{P(x|\lambda)f(\lambda)}{\int_0^\infty P(x|\lambda)f(\lambda)d\lambda}$$

$$= \frac{\sum_{j=0}^{x}(-1)^j \binom{x}{j} \sqrt{\frac{\psi}{2\pi\lambda^3}} \exp\{Z\}}{\sum_{j=0}^{x}(-1)^j \binom{x}{j} \exp\left\{\frac{\psi}{\mu}\left[1 - \sqrt{1 + \frac{2(j+rn)\mu^2}{\psi}}\right]\right\}}$$

dengan $Z = -\lambda(j + rn) - \frac{\psi(\lambda-\mu)^2}{2\mu^2\lambda}$

$$\delta(x,n) = E_{f(\lambda|x)}[\delta(\lambda)] = \int_0^\infty r\left(e^{\lambda} - 1\right) f(\lambda|x)d\lambda$$

$$= \frac{r}{\alpha}\sum_{j=0}^{x}(-1)^j \binom{x}{j} \exp\{T\} - r$$

dengan

$$T = \frac{\psi}{\mu}\left[1 - \sqrt{1 + \frac{2(j+rn-1)\mu^2}{\psi}}\right]$$

$$\alpha = \sum_{j=0}^{x}(-1)^j \binom{x}{j} \exp\left\{\frac{\psi}{\mu}\left[1 - \sqrt{1 + \frac{2(j+rn)\mu^2}{\psi}}\right]\right\}$$

Sehingga premi bonus malus untuk distribusi binomial negatif-invers Gaussian adalah

$$\delta^*(x,n) = P_0 \frac{\frac{r}{\alpha}\sum_{j=0}^{x}(-1)^j \binom{x}{j} \exp\{T\} - r}{r \exp\left\{\frac{\psi}{\mu}\left[1-\sqrt{1-\frac{2\mu^2}{\psi}}\right]\right\} - r}$$

## 4. Studi Kasus

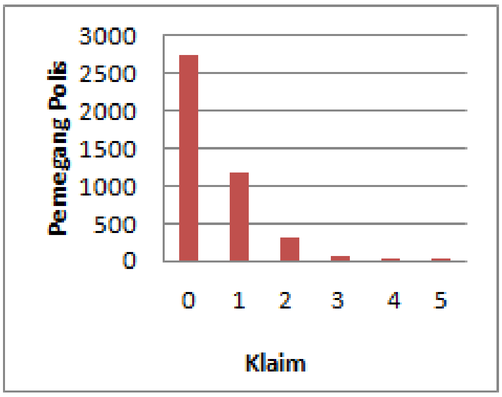
### 4.1.Deskripsi Data

Data yang digunakan pada studi kasus ini adalah data klaim asuransi kendaraan bermotor yang diperoleh dari perusahaan asuransi umum “XYZ” yang berlokasi di Jakarta yang menyediakan asuransi *Third Party Liability (*Asuransi Tanggung Gugat). Pada studi kasus ini digunakan jenis *Automobile Liability Insurance*, yaitu jenis asuransi yang menjamin tuntutan hukum dari pihak ketiga atas kelalaian yang diakibatkan atas penggunaan kendaraan bermotor yang dilakukan oleh pihak tertanggung, dimana pihak ketiga mengalami cedera tubuh atau kerugian terhadap barang miliknya.

Tabel 3.1 Data Banyaknya Pemegang Polis yang Mengajukan Klaim

| Jumlah Klaim | Banyaknya Pemegang Polis |
|---|---|
| 0 | 2756 |
| 1 | 1180 |
| 2 | 325 |
| 3 | 65 |
| 4 | 13 |
| 5 | 2 |
| > 5 | 0 |
| Total | 4341 |

Jumlah total pemegang polis dalam studi kasus ini adalah 4341 orang. Selama tiga tahun berturut – turut, yaitu pada tahun 2008 – 2011, ada sebanyak 2087 klaim yang telah diajukan oleh 1585 pemegang polis.




Gambar 3.1 Histogram Banyaknya Pemegang Polis dan Klaim yang diajukan

Berdasarkan Gambar 3.1 terlihat bahwa Jumlah klaim terbanyak yang diajukan oleh pemegang polis dalam kurun waktu 3 tahun adalah 5 klaim, dengan banyak pemegang polis hanya 2 orang. Pemegang polis terbanyak pada tahun 2008 - 2011 adalah pemegang polis yang tidak mengajukan klaim sama sekali. pemegang polis lebih sering mengajukan 1 klaim daripada 2 atau 3 klaim dengan banyak pemegang polis mencapai lebih dari 2 kali lipat.

### 4.2 Analisis Data

Berikut akan disajikan perbandingan kecocokan distribusi binomial negatif-invers Gaussian (BNIG) dan Poisson-invers Gaussian (PIG) dengan data yang diperoleh.

Tabel 3.2 *Fitting* Distribusi Binomial Negatif-Invers Gaussian dan Poisson-Invers Gaussian

| Jumlah Klaim | Banyak Pemegang Polis | Distribusi BNIG | Distribusi PIG |
|---|---|---|---|
| 0 | 2756 | 2759,435 | 2759,239 |
| 1 | 1180 | 1182,086 | 1190,219 |
| 2 | 325 | 315,404 | 311,189 |
| 3 | 65 | 68,087 | 65,401 |
| 4 | 13 | 13,118 | 12,309 |
| 5 | 2 | 2,3697 | 2,186 |
| > 5 | 0 | 0,412 | 0,376 |
| Total | 4341 | 4340,914 | 4340,923 |
| $\chi^2$ | - | 0,9115 | 1,138 |
| Db | - | 2 | 3 |
| *p-value* | - | 0,633 | 0,767 |
| Estimasi Parameter | | $\hat{r} = 5,273$ | - |
| | | $\hat{\mu} = 0,086$ | $\hat{\mu} = 0,477$ |
| | | $\hat{\psi} = 1,639$ | $\hat{\hat{\psi}} = 2,032$ |

Berdasarkan Tabel 3.2 terlihat bahwa binomial negatif-invers Gaussian memiliki nilai *chi-squared* yang lebih kecil (0,9115) jika dibandingkan dengan distribusi Poisson-invers Gaussian (1,138). Sehingga berdasarkan nilai *chi-squared* dapat disimpulkan bahwa distribusi binomial negatif-invers Gaussian lebih baik dan lebih mendekati data sebenarnya daripada distribusi Poisson-invers Gaussian.

Nilai premi bonus malus untuk distribusi binomial negatif-invers Gaussian dengan premi dasar dari agregat keseluruhan klaim sebesar Rp3.331.474.21 adalah sebagai berikut:

Tabel 3.3 Nilai Premi Bonus Malus Menggunakan Distribusi Binomial Negatif-Invers Gaussian (dalam Rp 1.000.000), dg n= tahun x=banyak klaim

| x/n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 3,331 | 3,249 | 3,173 | 3,102 | 3,036 |
| 1 | - | 3,418 | 3,334 | 3,256 | 3,183 |
| 2 | - | 3,594 | 3,502 | 3,416 | 3,336 |
| 3 | - | 3,778 | 3,677 | 3,584 | 3,497 |
| 4 | - | 3,969 | 3,859 | 3,758 | 3,663 |
| 5 | - | 4,168 | 4,049 | 3,938 | 3,836 |
| 6 | - | 4,374 | 4,245 | 4,126 | 4,015 |

Tabel 3.3 memperlihatkan bahwa jika pemegang polis pada tahun pertama masa asuransinya ($n = 0$) tidak mengajukan klaim sampai satu tahun kedepan, maka premi yang harus dibayarkan untuk tahun berikutnya ($n = 1$) adalah sebesar Rp. 3,249 juta. Jika pemegang polis mengajukan 1 klaim pada tahun pertama masa asuransinya, maka premi yang harus dibayarkan untuk tahun berikutnya adalah sebesar Rp. 3,418 juta.

Nilai premi bonus malus dengan menggunakan distribusi Poisson-invers Gaussian akan disajikan dalam Tabel 3.4 berikut:

Tabel 3.4 Nilai Premi Bonus Malus Menggunakan Distribusi Poisson-Invers Gausssian (dalam Rp. 1.000.000) dg n= tahun x=banyak klaim

| x/n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 3,331 | 2,748 | 2,392 | 2,146 | 1,964 |
| 1 | - | 3,863 | 3,238 | 2,827 | 2,533 |
| 2 | - | 5,301 | 4,303 | 3,671 | 3,230 |
| 3 | - | 7,002 | 5,556 | 4,657 | 4,041 |
| 4 | - | 8,887 | 6,947 | 5,752 | 4,940 |
| 5 | - | 10,888 | 8,431 | 6,925 | 5,905 |
| 6 | - | 12,963 | 9,977 | 8,150 | 6,917 |

Pada Tabel 3.4 dapat dilihat bahwa jika pemegang polis pada tahun pertama ($n = 0$) tidak mengajukan klaim sama sekali selama satu tahun, maka untuk tahun kedua ($n = 1$) premi yang harus dibayarkan adalah Rp. 2,748 juta. Jika pada tahun pertama pemegang polis tidak mengajukan klaim sama sekali selama empat tahun pada masa asuransinya, maka tahun kelima ($n = 4$) premi yang harus dibayarkan adalah sebesar Rp. 1,964 juta

 ISSN: 2502-6526

Tabel 3.5 Prosentase Perubahan Premi Distribusi Binomial Negatif-Invers Gaussian, dg n=tahun dan x=banyak klaim

| x/n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 100% | -2,46% | -4,75% | -6,88% | -8,88% |
| 1 | - | 2,59% | 0,07% | 2,27% | 4,46% |
| 2 | - | 7,88% | 5,12% | 2,55% | 0,15% |
| 3 | - | 13,40% | 10,38% | 7,57% | 4,96% |
| 4 | - | 19,14% | 15,85% | 12,80% | 9,96% |
| 5 | - | 25,12% | 21,54% | 18,22% | 15,14% |
| 6 | - | 31,31% | 27,42% | 23,83% | 20,50% |

Pada Tabel 3.5, misalkan setelah satu tahun masa asuransinya berakhir dan diketahui bahwa pemegang polis tersebut mengajukan klaim sebanyak satu kali, ketika ingin memperpanjang polisnya selama satu tahun maka premi yang dibayarkan untuk tahun berikutnya adalah sebesar Rp. 3.417.761. Jika pemegang polis masih ingin memperpanjang kembali polisnya dan selama masa asuransi yang baru tersebut tidak mengajukan klaim sama sekali, maka premi yang harus dibayarkan adalah $\text{Rp. } 3.417.761 - (\text{Rp. } 3.417.761 \times 2{,}4587\%) = \text{Rp. } 3.333.728$. Akan tetapi jika pada masa asuransi yang baru pemegang polis tersebut mengajukan dua klaim, maka premi yang harus dibayarkan adalah $\text{Rp. } 3.417.761 + (\text{Rp. } 3.417.761 \times 7{,}8758\%) = \text{Rp. } 3.686.937$.

Tabel 3.6 Prosentase Perubahan Premi Distribusi Poisson-Invers Gaussian, dg n=tahun dan x=banyak klaim

| x /n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 100% | -17,51% | -28,19% | -35,57% | -41,06% |
| 1 | - | 15,97% | 2,82% | 15,15% | 23,97% |
| 2 | - | 59,11% | 29,18% | 10,20% | 3,03% |
| 3 | - | 110,16% | 66,78% | 39,80% | 21,29% |
| 4 | - | 166,73% | 108,52% | 72,67% | 48,29% |
| 5 | - | 226,83% | 153,07% | 107,87% | 77,26% |
| 6 | - | 289,10% | 199,46% | 144,65% | 107,62% |

Tabel 3.6. Jika setelah satu tahun masa asuransinya berakhir dan pemegang polis tersebut mengajukan klaim sebanyak dua kali, ketika ingin memperpanjang polisnya selama satu tahun maka premi yang dibayarkan untuk tahun berikutnya adalah sebesar Rp. 5.300.812. Jika pemegang polis masih ingin memperpanjang kembali polisnya dan selama masa asuransi yang baru tersebut tidak mengajukan klaim sama sekali, maka premi yang harus

dibayarkan adalah Rp. 5.300.812 $-$ (Rp. 5.300.812×17,5119%) = Rp. 4.372.539. Akan tetapi jika pada masa asuransi yang baru pemegang polis tersebut mengajukan satu klaim, maka premi yang harus dibayarkan adalah Rp. 5.300.812 $+$ ( Rp. 5.300.812×15,9679%) = Rp. 6.147.240.

Tabel 3.7 Prosentase kenaikan premi dari klaim x=1 ke x=2

| n | BNIG | PIG |
|---|---|---|
| 2 | 2,46% | 11,39% |
| 3 | 2,47% | 13,39% |
| 4 | 2,49% | 14,28% |
| 5 | 2,48% | 14,63% |

Pada Tabel 3.7 terlihat bahwa prosentase kenaikan premi dari klaim $x = 1$ ke klaim $x = 2$ untuk distribusi binomial negatif-invers Gaussian cenderung lebih stabil bila dibandingkan dengan distribusi Poisson-invers Gaussian. Sebagai contoh, untuk $n = 2$, penalti premi dari $x = 1$ ke $x = 2$ pada distribusi binomial negatif-invers Gaussian hanya sebesar 2,46%. Sedangkan ntuk distribusi Poisson-invers Gaussian adalah 11,39%. Prosentase kenaikan premi paling tinggi dari $x = 1$ ke $x = 2$ untuk distribusi binomial negatif-invers Gaussian hanya sebesar 2,49%, sedangkan distribusi Poisson-invers Gaussian mencapai 14,63%. Hal ini berarti bahwa distribusi Poisson-invers Gaussian memberikan penalti yang lebih tinggi daripda distribusi binomial negatif-invers Gaussian, atau dapat dikatakan premi yang dihasilkan oleh distribusi Poisson-invers Gaussian terlalu mahal.

## 5. SIMPULAN

Berdasarkan nilai *chi-squared* yang lebih kecil, dapat disimpulkan bahwa distribusi binomial negatif-invers Gaussian ($\chi^2$ = 0,911512) memberikan performa yang lebih baik daripada distribusi Poisson-invers Gaussia ($\chi^2$ = 1,138064). Hal ini didukung pula dengan prosentase kenaikan premi distribusi binomial negatif-invers Gaussian yang lebih stabil dan tidak terlalu tinggi. Sehingga dalam kasus ini distribusi binomial negatif-invers Gaussian dapat digunakan sebagai alternatif untuk menghitung premi kendaraan dengan sistem bonus malus.

## 6. DAFTAR PUSTAKA

Denuit, Michel, X. Marechal, S. Pitrebois, J.F. Walhin. (2007). *Actuarial Modelling of Claim Counts*. United State of America: John Willey & Sons, Inc.

Gomez, E, J.M. Sarabia dan E.C. Ojeda. (2008). *Univariate and Multivariate Versions of the Negative Binomial – Inverse Gaussian Distributions with Applications*. Insurance: Mathematics and Economics 42(2008) 39-49.

Kaas, Rob. (2001). *Modern Actuarial Risk Theory*. Kluwer Academic Publisher. The Netherlands.

Klugman, Stuart A., Harry H. Panjer, dan Gordon E. Willmot. (2004). *Loss Models, From Data to Decisions Second Edition.* United State of America: John Willey & Sons, Inc.

Kobayashi, H., B.L. Mark, W. Turrin. (2012). *Probability, Random Process, and Statistical Analysis*. United Kingdom: Cambridge University Press.

Lemaire, J. 1998. *Bonus-Malus System*. The European and Asian Approach to Merit Rating. North American Actuarial Journal, Vol 2, N0. 1, 26-47

Matsuda, Kazuhisa. 2005. *Inverse Gaussian Distribution*. New York.

Ojeda, E.C, E. Gomez , J.M. Sarabia. 2003. *Using a New Distribution of Probability to Model the Number of Claims in an Automobile Insurance Portfolio*.

Trembley, Luc. 1992. *Using The Poisson Inverse Gaussian in Bonus Malus Systems*. Astin Bulletin, Vol 22, No 1.

Walhin, J.F. dan J. Paris. 1999. *Using Mixed Poisson Process in Connection with Bonus Malus Systems*. Astin Bulletin, Vol 29, No 1.

Walpole, R.E., R.H. Myers, S.L. Myers. (2012). Probability & Statistics For Engineer and Scientist Ninth Edition. Prentice Hall.

Willmot, G.E. (1987). *The Poisson – Inverse Gaussian Distribution as an Alternative to the Negative Binomial*. Scandinavian Actuarial Journal.