M-7

MENENTUKAN JARAK PADA RUANG DIMENSI TIGA DENGAN ANALISIS VEKTOR

Fiki Alghadari
Pendidikan Matematika STKIP Kusuma Negara Jakarta
alghar6450@gmail.com

Abstract

This article is a study on the ways of vector concepts to determine the distance in three-dimensional space. Typically, mathematics learning has introduced three-dimensional to students at the middle school. These three-dimensional learning during ordinary was implemented by based on spatial ability, both conventional and computer-assisted learning. Student spatial intelligence is different clearly. Based on the result of several studies in the literature, especially for female students has shown that they were difficulties in the mathematical spatial problem so that there was an imbalance of learning achievement, and vector concepts can be used to help. The purpose of this article is knowing how to determine of geometrical measure on the solid using vector concepts. Vector concepts in this study as one of all of counting alternative by students high school who have spatial difficulties. Vector concepts that be used like orthogonal projection and vector in the direction normal to the plane. Using the vector concepts because of solid like cube can be drawn on three-dimensional of coordinate. On the other hand, the spatial relation like points, lines, and planes was studied in vector analysis. Using of vector concepts, student's three-dimensional learning would not involve much of spatial ability, but student's ability in mathematical count would have been more.

***Keywords**: Distance; Three-Dimensional; Vector.*

1. PENDAHULUAN

Beberapa contoh bangun ruang sisi datar seperti kubus, balok, dan limas. Geometri ruang dimensi tiga seperti ukuran panjang sisi, panjang rusuk, dan besar sudut mulai dikenalkan pada pembelajaran matematika sekolah menengah. Contoh materi belajar dimensi tiga dalam buku sumber adalah menghitung jarak antara dua titik, jarak antara titik dengan garis, jarak antara titik dengan bidang, jarak antara garis dengan bidang, jarak antara garis dengan garis, jarak antara bidang dengan bidang (Krismanto, 2008).

Selama ini teknik pembelajaran dilaksanakan dengan menggambar bangun ruang seperti bangun kubus pada papan tulis. Menemukan suatu jarak dalam ruang dimensi tiga yaitu dengan cara membuat garis-garis untuk membantu menemukan jarak mana yang dimaksudkan. Gambar konvensional secara manual akan membuat banyak garis dalam satu *frame* gambar sehingga perpotongan garis satu sama lain menjadi rumit dalam penglihatan mata, membuat pandangan mata menjadi kurang nyaman, dan menyebabkan hilang konsentrasi alur mula kemunculan garis-garis baru.

Berkembangnya teknologi komputer membuat teknik belajar ini telah ramai ditinggalkan. Teknologi membawa dampak nyata bahwa belajar dimensi tiga telah didominasi pemanfaatan bantuan aplikasi *software*. Bangun ruang bisa ditampilkan *software* komputer hanya dalam waktu sekejap mata memandang. Menemukan suatu jarak tertentu bisa lansung ditampilkan *screen* layar dalam pandangan tiga dimensi yang sejuk di mata, bahkan telah didukung dengan rotasi sehingga gambar dengan mudah untuk diputarbalikan. Tidak ada lagi konstruksi garis-garis berpotongan yang semrawut seperti gambar konvensional. Dengan matanya, siswa di kelas dibuat nyaman dan merasa seperti sedang berada dalam ruang konstruksi jarak geometris.

Teknologi membantu konstruksi pemahaman siswa dengan tetap melibatkan kemampuan spasial (Marunic & Glazar, 2013). Siswa tidak akan menemukan kesulitan apabila mereka dengan baik memiliki kecerdasan spasial. Siswa dituntun secara tidak lansung membayangkan kondisi ruang tiga dimensi sehingga bayangan gambar dari *screen* layar tampilan aplikasi komputer terekam dalam pikirannya. Efek teknologi telah mengintergasi pikiran siswa dan bantuan teknologi merupakan bagian dari latihan kemampuan spasial yang masih terus menjadi rekomendasi. Dengan kata lain, berpikir spasial dapat ditingkatkan dan mudah dibentuk melalui metode latihan karena efektif dilakukan (Uttal, *et al*., 2013; Marunic & Glazar, 2013).

Beberapa temuan hasil studi para ahli mengenai perbedaan antara kemampuan spasial laki-laki dan perempuan (Yilmaz, 2009; Halpern, 2012; Alghadari, 2016), sehingga perbedaan tersebut menjadi suatu pembahasan yang menarik (Yilmaz, 2009). Siswa yang mengalami kesulitan spasial berakibat pada pencapaian geometri, karena kemampuan spasial mempunyai peran dalam perkembangan konseptualisasi ide geometri (Seng & Chan, 2000; Guzel & Sener, 2009; Krismanto, 2008; Uttal, *et al*., 2013). Kelemahan hitung geometri ruang merupakan akibat kurang sempurnanya kombinasi kemampuan pendukung kemampuan spasial, karena kemampuan ini terbentuk dari kombinasi kemampuan seperti memecahkan pertanyaan geometri, penggunaan peta, dan representasi dalam ruang berdimensi (Yilmaz, 2009), sehingga memerlukan pemahaman dan strategi tambahan (Krismanto, 2008). Kondisi ini adalah peluang munculnya inovasi cara menentukan ukuran geometris pada bangun ruang. Salah satunya adalah dengan konsep vektor.

Tujuan kajian ini adalah untuk mengetahui bagaimana menentukan ukuran geometris pada bangun ruang dengan bantuan konsep vektor. Perhitungan dengan konsep vektor adalah salah satu cara perhitungan yang bisa membantu siswa bagi yang mengalami kesulitan spasial, namun bukan untuk membantu meningkatkan kemampuan spasialnya. Menentukan jarak pada bangun ruang dengan konsep vektor mengarahkan siswa pada latihan kemampuan memecahkan masalah geometri. Dengan bantuan vektor, siswa dapat menyelesaikan masalah jarak pada bangun ruang sehingga siswa tidak bergelut pada kesulitan spasialnya, dan diharapkan pencapaian belajarnya tidak terhambat, serta bisa menanggulangi perbedaan pencapaian geometri siswa berdasarkan gender.

 ISSN: 2502-6526

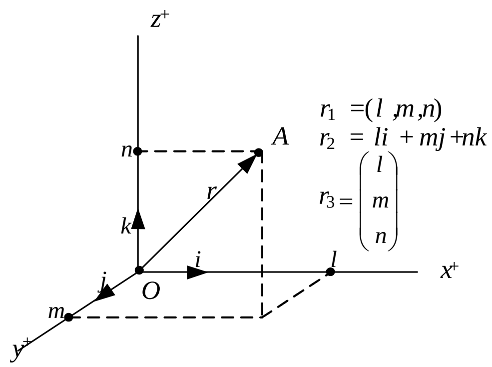
2. METODE PENELITIAN

Artikel ini ditulis dengan kajian literature berupa buku dan jurnal yang berkaitan dengan belajar dimensi tiga. Karena setiap siswa adalah pribadi unik dan beda dari siswa lain sehingga akan tetap ada siswa yang mengalami kesulitan belajar, khususnya kesulitan spasial. Kondisi ini menuntut adanya alternatif belajar selain cara konvensional atau berbantuan teknologi. Salah satunya dengan bantuan konsep vektor.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

a. Definisi dan Konsep Vektor

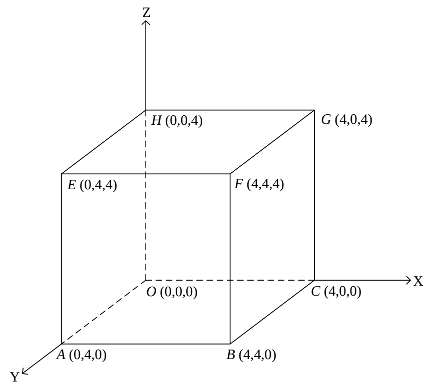
Vektor adalah suatu kontribusi terbesar di bidang matematika yang ditemukan Gibbs. Definisi vektor adalah besaran yang memiliki panjang dan arah, sehingga vektor dikatakan sebagai ruas garis berarah. Walaupun sama-sama lurus, tetapi vektor berbeda dengan garis. Penyajian vektor dinyatakan dalam bentuk vektor baris (r_1), vektor basis (r_2), atau vektor kolom (r_3) (Gibbs, 1901). Pada koordinat digambar seperti gambar 1.



Gambar 1. Vektor pada sumbu koordinat tiga dimensi

Pada gambar 1, titik *O* pada titik pangkal koordinat. Karena definisi vektor adalah besaran yang memiliki panjang dan arah, maka vektor *r* arahnya dari titik *O* ke titik *A*, sehingga vektor *r* dinyatakan dengan vektor $\overrightarrow{OA}$. Sedangkan besaran vektor merupakan panjang vektor, yaitu sepanjang ruas garis dari titik *O* ke titik *A*. Beberapa konsep analisis vektor yang dimanfaatkan dalam hitung menentukan jarak geometris ruang tiga dimensi adalah besaran vektor, jumlah vektor, vektor satuan, *direct product*, *cross product*, proyeksi ortogonal, dan vektor normal bidang (Gibbs, 1901).

Penggunaan konsep vektor untuk menentukan suatu jarak spasial karena bangun ruang dapat digambarkan di koordinat. Contoh, misalkan diketahui kubus dengan panjang sisi 4 satuan, seperti pada gambar 2.



Gambar 2. Kubus pada sumbu koordinat

Ukuran-ukuran geometris spasial adalah hubungan antara titik, garis, dan bidang. Ukuran tersebut seperti jarak, besar sudut, serta sifat-sifat lainnya (Krismanto, 2008). Kajian ini membahas masalah jarak.

b. Menghitung jarak titik *A* dengan titik *G*.

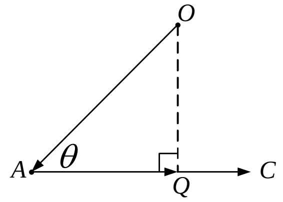
Salah satu unsur jarak geometris pada kubus adalah jarak antara dua titik (Krismanto, 2008). Menghitung jarak antara titik dan titik, dalam konsep vektor adalah menghitung panjang vektor atau besaran vektor.

Pada gambar 2, jarak titik $A(0,4,0)$ ke titik $G(4,0,4)$ adalah besaran vektor $\vec{AG}$. Vektor $\vec{AG}=\vec{OG}-\vec{OA}=(4,-4,4)$, sehingga jaraknya (dilambangkan $\left|\vec{AG}\right|$), adalah $\left|\vec{AG}\right|=\sqrt{(4)^2+(-4)^2+(4)^2}=4\sqrt{3}$ satuan.

Jarak antara dua titik di bidang koordinat pada dasarnya adalah aplikasi konsep teorema Pythagoras, dan pada vektor juga demikian. Menghitung jarak antara dua titik cukup mengetahui vektor apa yang merepresentasi jarak tersebut, dan kemudian hitung besaran vektornya.

c. Menghitung jarak titik *O* dengan garis *AC*.

Ukuran spasial kedua adalah jarak antara titik dan garis. Acuan tetap sama seperti perhitungan cara konvensional atau berbantuan komputer, bahwa definisi jarak antara titik dengan garis adalah jarak terpendek yang ditarik dari titik serta tegak lurus terhadap garis (Krismanto, 2008). Dengan analisis vektor, proyeksi ortogonal menjadi konsep perhitungan jarak antara titik dan garis. Sebagai contoh, yaitu menghitung jarak titik *O* dengan garis *AC*, seperti pada gambar 3 berikut.



Gambar 3. Hubungan titik *O* dan garis *AC* dalam skema vektor

Pada gambar 2, $\vec{AC} = (4,-4,0)$ sehingga $\left|\vec{AC}\right| = 4\sqrt{2}$, dan $\vec{AO} = (0,-4,0)$. Gambar 3 menyatakan bahwa $\vec{AQ}$ adalah proyeksi vektor ortogonal $\vec{AO}$ pada $\vec{AC}$ (Gibbs, 1901), sehingga $\vec{AQ} = \dfrac{\vec{AO} \bullet \vec{AC}}{\left|\vec{AC}\right|^2}\vec{AC}$ $= \dfrac{(0,-4,0) \bullet (4,-4,0)}{32}(4,-4,0) = \dfrac{16}{32}(4,-4,0) = (2,-2,0)$.

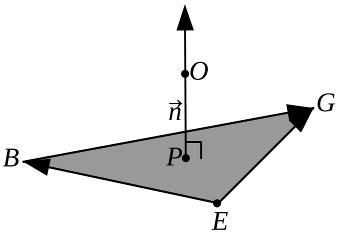
Jarak O ke garis AC direpresentasi $\vec{OQ}$ dan $\vec{OQ} = \vec{OA} + \vec{AQ}$ $= \vec{AQ} - \vec{AO} = (2,-2,0) - (0,-4,0) = (2,2,0)$. Dengan demikian jarak titik O ke garis AC, $\left|\vec{OQ}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = 2\sqrt{2}$ satuan. Jadi, beberapa langkah menentukan jarak antara titik dan garis, yaitu: (1) membuat ilustrasi gambar jarak yang bersesuaian, (2) membuat hubungan antara titik dan garis dalam bentuk vektor, (3) menghitung proyeksi ortogonal.

d. Menghitung jarak titik *O* dengan bidang *BEG*.

Menentukan jarak antara suatu titik (misal titik O) dengan suatu bidang (bidang BEG dengan tiga titik sudutnya $E(0,4,4)$, $B(4,4,0)$, dan $G(4,0,4)$) yaitu pertama-tama mencari normal bidang. Normal bidang merupakan suatu vektor hasil *cross product* dua buah vektor yang tidak sejajar dan segaris, (dinotasikan $\vec{n}$), (Gibbs, 1901). Contohnya $\vec{EB} = (4,0,-4)$ dan $\vec{EG} = (4,-4,0)$, sehingga diperoleh $\vec{n}$ dari BEG.

$$\begin{aligned}
\vec{EB} \times \vec{EG} = \vec{n} &= (4i + 0j - 4k) \times (4i - 4j + 0k) \\
&= 16(i \times i) - 16(i \times j) + 0(i \times k) + 0(j \times i) + 0(j \times j) + 0(j \times k) \\
&\quad - 16(k \times i) + 16(k \times j) + 0(k \times k) \\
&= 16(0) - 16k + 0(-j) + 0(-k) + 0(0) + 0(i) - 16(j) + 16(-i) \\
&\quad + 0(0) \\
&= -16k - 16j - 16i \\
&= \lambda(1,1,1)
\end{aligned}$$

$\vec{n}$ adalah vektor yang tegak lurus dengan vektor $\vec{EB} = (4,0,-4)$ dan vektor $\vec{EG} = (4,-4,0)$. Selain itu, $\vec{n}$ juga selalu tegak lurus dengan setiap vektor atau titik yang dimuat bidang (Gibbs, 1901). Berikut ilustrasinya.



Gambar 4. Hubungan titik *O* dan bidang *BEG* dalam skema vektor

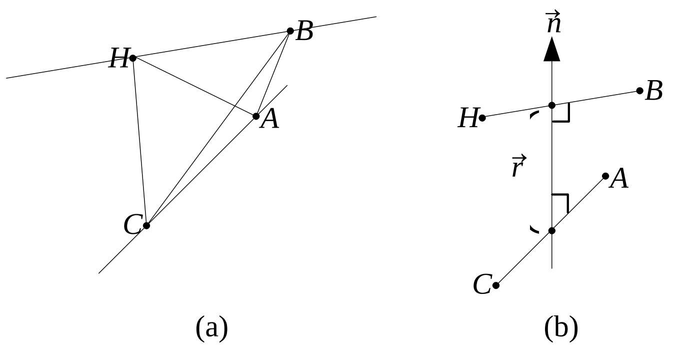
Pada gambar 4, misal $\left|\vec{r}\right|$ adalah jarak titik *O* ke bidang *BEG*. $\left|\vec{r}\right|$ adalah proyeksi skalar ortogonal $\vec{OB} = (4,4,0)$ pada $\vec{n} = \lambda(1,1,1)$, atau $\vec{OG}$ pada $\vec{n}$, atau $\vec{OE}$ pada $\vec{n}$. Ketiga proyeksi skalar tersebut akan menghasilkan angka yang sama. Berikut contoh perhitungannya

$$\left|\vec{r}\right| = \frac{\vec{OB} \bullet \vec{n}}{\left|\vec{n}\right|} = \frac{\lambda(4+4+0)}{\lambda\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

Dengan demikian, jarak titik *O* ke bidang *BEG*, ($\left|\vec{r}\right|$) adalah $\frac{8}{\sqrt{3}}$ satuan. Hasil perhitungan ini sama dengan hasil pada perhitungan secara konvensional.

e. Menghitung jarak garis *AC* dan garis *HB*.

Dua buah garis dikatakan memiliki jarak tertentu apabila termasuk salah satu dari dua *option* yang ada, yaitu: kedua garis saling sejajar dan tidak berimpit, atau kedua garis bersilangan dan tidak berpotongan. Contohnya pada gambar 2, bahwa garis *AC* dan garis *HB* adalah dua garis bersilangan dan tidak berpotongan, sehingga kedua garis itu memiliki jarak terdekat.



Gambar 5. Garis *HB* dan garis *AC* dan Vektor yang tegak lurus

Perhatikan gambar 5a, bahwa panjang *AB*, atau panjang *BC*, atau panjang *AH*, atau panjang *HC* bukan merupakan jarak terdekat antara garis *HB* dan garis *AC*. Jarak terdekatnya adalah jarak antara titik potong garis yang tegak lurus dengan *HB* dan *AC* (gambar 5b).

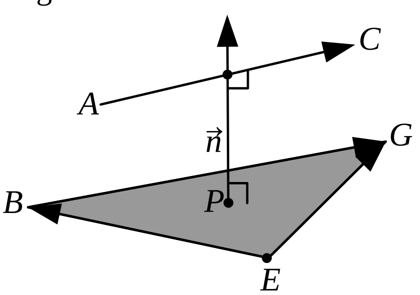
Misal $\vec{n}$ suatu vektor yang tegak lurus garis *HB* dan garis *AC*. $\vec{n}$ adalah hasil *cross product* $\vec{AC} = (4,-4,0)$ dan $\vec{HB} = (4,4,-4)$. $\vec{AC} \times \vec{HB} = \vec{n} = \lambda(1,1,2)$.

$\vec{n}$ berimpit dengan $\vec{r}$, anggap $\left|\vec{r}\right|$ adalah jarak antara garis *AC* dan garis *HB*. $\left|\vec{r}\right|$ adalah proyeksi skalar $\vec{AB} = (4,0,0)$ pada $\vec{n} = \lambda(1,1,2)$, atau $\vec{AH}$ pada $\vec{n}$, atau $\vec{BC}$ pada $\vec{n}$, atau $\vec{CH}$ pada $\vec{n}$. Jadi jarak antara garis *HB* dan garis *AC* adalah $\left|\vec{r}\right| = \frac{\vec{AB} \bullet \vec{n}}{\left|\vec{n}\right|} = \frac{4}{\sqrt{6}}$ satuan.

Catatan penting bahwa jarak antara garis *HB* dan garis *AC* adalah proyeksi skalar ortogonal $\vec{AB}$, atau $\vec{AH}$, atau $\vec{BC}$, atau $\vec{CH}$, pada $\vec{n}$, karena keempat vektor tersebut terbentuk dari kombinasi dua titik yang dilewati kedua garis seperti gambar 5(a). Empat vektor itu mewakilkan jarak antara kedua garis, namun bukan jarak terdekat. Supaya menjadi jarak terdekat, maka diproyeksikan pada $\vec{n}$.

f. Menghitung jarak garis *AC* dengan bidang *BEG*.

Garis yang berimpit dan menembus bidang dikatakan tidak mempunyai jarak. Terbentuknya jarak terdekat dari suatu garis ke suatu bidang apabila garis tersebut sejajar dengan bidang (Krismanto, 2008). Gambar 6 adalah ilustrasi garis sejajar bidang yang memiliki jarak tertentu, contohnya pada kubus (gambar 2), diketahui bahwa garis *AC* sejajar dengan bidang *BEG*.



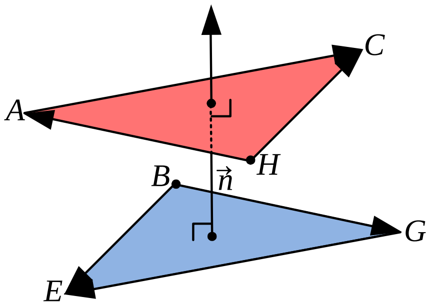
Gambar 6. Garis *AC* sejajar bidang *BEG* dalam skema vektor

Jarak suatu garis terhadap suatu bidang ditentukan juga dengan bantuan proyeksi skalar orthogonal seperti pada konsep jarak antara dua garis yang sejajar. Pada pembahasan sebelumnya, telah dihitung bahwa vektor normal bidang *BEG* adalah $\vec{n} = \lambda(1,1,1)$, dan vektor $\vec{AC} = (4,-4,0)$, sehingga jarak antara garis *AC* dan bidang *BEG* ditentukan dengan memproyeksikan $\vec{CG}$, atau $\vec{CB}$, atau $\vec{CE}$, atau $\vec{AG}$, atau $\vec{AB}$, atau $\vec{AE}$, pada $\vec{n}$. Misalkan $\left|\vec{r}\right|$ adalah jarak tersebut, ditentukan dengan proyeksi $\vec{AB} = (4,0,0)$ pada $\vec{n}$, dengan hasil hitung $\left|\vec{r}\right| = \dfrac{\vec{AB} \bullet \vec{n}}{\left|\vec{n}\right|} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ satuan.

Cara perhitungan ini tidak hanya berlaku pada bangun ruang kubus saja, melainkan bisa pada bangun ruang sisi datar lain seperti balok atau prisma. Namun perhitungan jarak garis ke bidang ini tidak berlaku pada bangun ruang limas, karena limas tidak memiliki unsur geometris ini.

g. Menghitung jarak bidang *ACH* dan bidang *BEG*.

Jarak antara dua bidang merupakan jarak dua bidang yang sejajar (Krismanto, 2008). Pada kubus, contoh dua bidang sejajar adalah bidang *ACH* dan bidang *BEG*, sehingga apabila kedua bidang ini digambarkan maka akan terlihat seperti berikut.



Gambar 7. Bidang *ACH* sejajar bidang *BEG* dalam skema vektor

Pada gambar di atas, $\vec{n}$ adalah vektor tegak lurus bidang *BEG*. Karena bidang *BEG* sejajar bidang *ACH*, sehingga $\vec{n}$ juga tegak lurus terhadap bidang *ACH*. Jadi bidang *BEG* dengan $\vec{n} = \lambda(1,1,1)$, maka untuk vektor normal bidang *ACH* juga demikian.

Cara menghitung jarak antara dua bidang memiliki sedikit kesamaan dengan cara menghitung jarak antara dua garis, atau jarak antara garis dan bidang, yaitu memproyeksikan suatu vektor yang mewakili kedua bidang (vektor yang diperoleh dari kombinasi dua titik, yaitu satu titik dari bidang *ACH* dan satu titik lagi dari bidang *BEG*). Dengan demikian, jarak antara bidang *BEG* dan bidang *ACH* adalah proyeksi skalar ortogonal $\vec{AB} = (4,0,0)$ pada $\vec{n} = \lambda(1,1,1)$, sehingga diperoleh $\left|\vec{r}\right| = \frac{\vec{AB} \bullet \vec{n}}{\left|\vec{n}\right|} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ satuan.

4. SIMPULAN

Berdasarkan tujuan kajian yaitu bagaimana menentukan ukuran geometris pada bangun ruang dengan bantuan konsep vektor, beserta hasil dan pembahasan, maka diperoleh simpulan sebagai berikut:

a. Menentukan jarak antara dua titik pada suatu bangun ruang yaitu dihitung dengan konsep besaran atau panjang vektor.
b. Menentukan jarak antara titik dan garis yaitu pertama-tama dimulai dengan menghitung proyeksi vektor ortogonal, kemudian menjumlahkan hasil perhitungan proyeksi vektor ortogonal tersebut dengan suatu vektor dari hasil kombinasi titik dan satu titik pada garis, dan selanjutnya menghitung besaran vektor dari jumlah vektor itu.
c. Menentukan jarak terdekat antara titik dan bidang, antara garis dan garis, antara garis dan bidang, dan antara bidang dan bidang, terdapat sedikit kesamaan cara. Caranya yaitu terlebih dahulu mencari vektor normal (yaitu vektor normal bidang untuk menentukan jarak antara titik dan bidang, jarak antara garis dan bidang, maupun jarak antara bidang dan bidang; atau vektor normal dari dua vektor yang merepresentasi kedua garis untuk menentukan jarak antara garis dan garis), kemudian membuat suatu vektor yang diperoleh dari pasangan kombinasi titik yang mewakili kedua komponen (titik dan bidang, garis dan garis, garis dan bidang, bidang dan bidang), selanjutnya memproyeksikan vektor tersebut pada vektor normal.

Keunggulan konsep vektor dalam menentukan jarak yang memiliki hubungan spasial yaitu siswa tidak perlu membayangkan bentuk transformasi spasialnya. Hanya saja, siswa perlu mengetahui letak titik koordinat pada sumbu tiga dimensi untuk suatu bangun ruang tertentu sesuai ukuran yang diketahui. Sedangkan kelemahannya adalah tidak melatih untuk meningkatkan kemampuan spasial siswa.

5. DAFTAR PUSTAKA

Alghadari, F. (2016). Pemecahan Masalah Spasial Matematis Calon Guru Matematika Ditinjau dari Langkah-Langkah Pemecahan Masalah Polya. *Jurnal Penelitian Pendidikan*, **16**(3), 226-234.

Gibbs, J.W. (1901). *Vektor Analysis*. USA: Yale University Press.

Guzel, N., & Sener, E. (2009). High school students' spatial ability and creativity in geometry. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, **1**(1), 1763-1766.

Halpern, D. F. (2013). *Sex differences in cognitive abilities*. USA: Psychology press.

Krismanto, A. (2008). *Pembelajaran Sudut dan Jarak Dalam Ruang Dimensi Tiga*. Yogyakarta: Departemen Pendidikan Nasional.

Marunic, G., & Glazar, V. (2013). Spatial ability through engineering graphics education. *International Journal of Technology and Design Education*, **23**(3), 703-715.

Seng, S., & Chan, B. (2000). Spatial Ability and Mathematical Performance: Gender Differences in an Elementary School. *Educational Resources Information Center*. ED438973.

Uttal, D. H., Miller, D. I., & Newcombe, N. S. (2013). Exploring and enhancing spatial thinking links to achievement in science, technology, engineering, and mathematics?. *Current Directions in Psychological Science*, **22**(5), 367-373.

Yilmaz, H. B. (2009). On the development and measurement of spatial ability. *International Electronic Journal of Elementary Education*, **1**(2), 83-96.