M-10

GROUP YANG DIBANGUN OPERATOR LINEAR TERBATAS SEBAGAI SUATU PENYELESAIAN MCA HOMOGEN

Susilo Hariyanto
Departemen Matematika Fakultas Sains dan Matematika
Universitas Diponegoro Semarang
sus2_hariyanto@yahoo.co.id

Abstrak

Dalam paper ini diperkenalkan suatu group yang disusun dari semua operator linear terbatas. Definisi dan sifat-sifat dasarnya akan dibahas secara lengkap beserta contohnya. Hal ini bertujuan untuk memperjelas karakteristik dari group ini. Dengan menggunakan sifat-sifat tersebut, Masalah Cauchy Abstrak(MCA) homogen dapat ditentukan penyelesaiannya dalam bentuk semigroup operator linear terbatas.

Kata Kunci: *operator linear terbatas, masalah Cauchy abstrak*

1. PENDAHULUAN

Diberikan himpunan $\mathcal{H}$ tidak kosong. Lang (1987) menyatakan bahwa ruang vektor $\mathcal{H}$ atas field F adalah suatu himpunan obyek-obyek yang dapat dijumlah dan dikalikan dengan elemen di F, sedemikian hingga hasil penjumlahan dua buah elemen $\mathcal{H}$ adalah suatu elemen yang juga anggota $\mathcal{H}$, hasil perkalian elemen $\mathcal{H}$ dengan elemen F adalah suatu elemen anggota $\mathcal{H}$ dan memenuhi aksioma-aksioma berikut:

a. $x + (y + z) = (x + y) + z$, untuk semua $x, y, z \in \mathcal{H}$ (sifat asosiatif),
b. terdapat suatu elemen $\underline{0} \in \mathcal{H}$, sedemikian sehingga $\underline{0} + x = x + \underline{0} = x$ untuk semua $x \in \mathcal{H}$ (eksistensi elemen netral terhadap penjumlahan),
c. untuk setiap $x \in \mathcal{H}$, terdapat $-x \in \mathcal{H}$, sehingga $x + (-x) = \underline{0}$ (eksistensi invers setiap elemen terhadap penjumlahan),
d. untuk setiap $x, y \in \mathcal{H}$ berlaku $x + y = y + x$ (komutatif),
e. untuk setiap $a \in F$ dan setiap $x, y \in \mathcal{H}$ berlaku $a(x + y) = ax + ay$ (distribusi kiri),
f. untuk setiap $a, b \in F$ dan setiap $x \in \mathcal{H}$ berlaku $(a + b)x = ax + bx$ (distribusi kanan),
g. untuk setiap $a, b \in F$ dan setiap $x \in \mathcal{H}$ berlaku $(ab)x = a(bx)$,
h. untuk setiap $x \in \mathcal{H}$, berlaku $1x = x$.

Himpunan $H \subset \mathcal{H}$ disebut ruang bagian di dalam $\mathcal{H}$ jika terhadap operasi-operasi yang sama pada $\mathcal{H}$, himpunan H juga merupakan ruang vektor. Berdasarkan definisi tersebut dapat diturunkan syarat perlu dan cukup suatu himpunan $H \subset \mathcal{H}$ merupakan ruang bagian adalah sebagai berikut

Akibat 1.1 *Diberikan ruang vektor $\mathcal{H}$ dan $H \subset \mathcal{H}$. Himpunan tak kosong H merupakan ruang bagian di dalam $\mathcal{H}$ jika dan hanya jika dipenuhi,*

i. *Untuk setiap $h_1, h_2 \in H$ berlaku $h_1 + h_2 \in H$.*
ii. *Untuk setiap $h_1 \in H$ dan $\alpha \in F$ berlaku $\alpha h_1 \in H$.*

Dalam paper ini difenisikan suatu jenis fungsi tertentu, yang mana fungsi ini memetakan dari suatu ruang vektor ke ruang vektor. Fungsi tertentu ini selanjutnya disebut operator. Jika operator ini memenuhi sifat linearitas, maka disebut operator linear.

Diberikan $\mathcal{H}_1$, dan $\mathcal{H}_2$ masing-masing ruang vektor atas lapangan *K* himpunan bilangan kompleks dan $\mathcal{D}(T)$ domain dari operator *T* merupakan ruang bagian di dalam $\mathcal{H}_1$. Range dari operator *T* dinotasikan dengan *Ran(T)*. Operator $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ dikatakan linear jika memenuhi syarat-syarat berikut

i. $T(u+v) = T(u) + T(v),$ untuk setiap $u, v \in \mathcal{D}(T),$
ii. $T(\alpha u) = \alpha T(u),$ untuk setiap $\alpha \in K$ dan $u \in \mathcal{D}(T).$

Dalam paper ini akan diperkenalkan suatu group yang dibangun dari operator-operator linear terbatas pada ruang Hilbert. Selanjutnya bentuk ini diterapkan dalam Masalah Cauchy Abstrak Degenerate. Penerapannya adalah untuk menentukan suatu penyelesaian masalah tersebut dalam bentuk semigroup operator linear.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan suatu kajian teori yang akan memformulasikan suatu group yang dibangun oleh operator-operator linear terbatas dan dihubungkan dengan penyelesaian dari masalah sistem persamaan diferensial tertentu yang termasuk dalam klasifikasi Masalah Cauchy Abstrak Degenerate Homogen. Oleh karena itu alur jalannya penelitian ini adalah sebagai berikut:

Pertama-tama ditentukan terlebih dahulu bahwa ruang pembahasan dalam kajian ini adalah ruang vektor yang merupakan ruang Hilbert. Selanjutnya dikonstruksikan bahwa operator-operator linear yang menjadi obyek dalam penelitian ini merupakan operator linear terbatas dari ruang Hilbert pertama ke ruang Hilbert kedua. Dalam kasus tertentu dimungkinkan operator linear tersebut pada ruang Hilbert yang sama.

Kedua, difenisikan suatu bentuk fungsi $S(t) = e^{At}$, dengan $t \in R$, dan A operator linaear terbatas, merupakan suatu himpunan atau koleksi dari operator liniear terbatas pada $\mathcal{H}$. Himpunan ini dilengkapai dengan suatu operasi penjumlahan akan ditunjukkan merupan suatu group dari operator linear terbatas pada $\mathcal{H}$. Selanjutnya sifat-sifat dasar dari group ini akan diuraikan dan dikaji secara detail untuk dikaitkan dengan MCA homogen.

Ketiga, diformulasikan MCA homogen. Masalah ini akan ditentukan penyelesaiannya dengan menggunakan sifat-sifat dasar dari group yang dikaji dalam langkah kedua.

Demikian alur penelitian ini yang akan mengkaitkan penyelesaian MCA homogen dengan kajian teori tentang group yang dibangun oleh operator linear terbatas.

3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Diberikan Masalah Nilai Awal atau Masalah Cauchy Abstrak:

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t), \quad (t \geq 0) \qquad (1)$$
$$u(0) = x$$

dengan $u(t)$ keadaan saat t, yang mana rata-rata perubahannya disaat t dinyatakan dalam fungsi A. Menurut Dai dan Carrol (1976) penyelesaian dari masalah (1) adalah:

$$u(t) = e^{At}x.$$

Dilain pihak menurut Favini dan Thaller, untuk setiap $t \in R$ didefinisikan :

$$S(t) = e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n. \qquad (2)$$

Karena barisan ini merupakan barisan konvergen absolut untuk setiap $t \in R$, maka definisi (2) merupakan koleksi operator linear terbatas. Selanjutnya menurut (2) diperoleh:

$$\|S(t)\| \leq e^{\|A\||t|}, t \in R \text{ dan}$$
$$S(0) = I \qquad (3)$$
$$S(t+s) = S(t)\,S(s) \text{ untuk } s,t \in R \qquad (4)$$
$$S(t)^{-1} = S(-t), untuk\ setiap\ \ t \in R. \qquad (5)$$

Dari uraian diatas dapat disimpulkan bahwa $S(\circ)$ merupakan group dari operator-operator linear terbatas pada $\mathcal{H}$. Untuk selanjutnya dari definisi $S(\circ)$ di atas, maka cukuplah jelas pemetaan $t \to S(t)$ analitik dari R ke $L(\mathcal{H})$, dengan $L(\mathcal{H})$ merupakan koleksi operator-operator linear pada $\mathcal{H}$. Lebih lanjut diperoleh:

$$\frac{d}{dt}S(t) = AS(t) = S(t)A, \ t \in R.$$

Hal ini menunjukkan bahwa fungsi $u(t)=S(t)x$ untuk setiap $t \in R$ dan $x \in \mathcal{H}$ adalah penyelesaian tunggal dari masalah Cauchy

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad u(0) = x, \ \text{ pada } R. \qquad (6)$$

Ketunggalan penyelesaian (6) dijamin , dikarenakan setiap penyelesaian u(t) dari (6) dengan u(0)=0 memenuhi

$$\|u(t)\| \le \|A\| \left| \int \|u(\tau)\| d\tau \right|, \quad t \in R,$$

dan akibatnya u(t)=0 menurut ketidaksamaan Gronwall.

Jika diperhatikan kembali (6), maka diperoleh $A = \frac{d}{dt} S(t) \Big|_{t=0}$, yakni

$$A = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(S(t) - I \right).$$

Teorema 1 (Kappel, F.)

Misalkan $S(t), t \ge 0$ merupakan koleksi dari operator linear terbatas yang memenuhi pada $\mathcal{H}$ yang memenuhi (3), dan (4). Maka $S(.) \in C([0,\infty); L(\boldsymbol{\mathcal{H}}))$ jika dan hanya jika $S(t) = e^{At}$, $t \ge 0$ untuk suatu $A \in L(\boldsymbol{\mathcal{X}})$.

Berdasarkan teorema di atas, maka penyelesaian masalah (1) adalah $u(t) - s(t)x.$

4. KESIMPULAN

Dengan memperhatikan pembahasan diatas maka dapat disimpulkan bahwa:

a. Setiap operator linear terbatas dapat membangun suatu group dari operator linear terbatas tersebut.
b. Masalah Cauchy abstrak homogen dapat diselesaikan dalam bentuk semigroup operator linear terbatas.

5. DAFTAR PUSTAKA

Carroll, R.W & Showalter,R.E. (1976), Singular and Degenerate Cauchy Problems, *Math. Sci. Engrg*., Vol. 127, Academic Press, New York-San Fransisco-London.

Dai, L., (1989), *Singular Control Systems*, Lecture Notes in Control and Inform, Sci., Vol.118, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

Favini, A. (1979). Laplace Tranform Method for a Class of Degenerate Evolution Problems.*Rend. Mat. Appl*. **12**(2): 511-536.

Favini, A. 1981. Abstract Potential Operator and Spectral Method for a Class of Degenerate Evolution Problems.*J. Differential Equations*.**39**: 212-225.

Favini, A., Plazzi, P. (1988). On Some Abstract Degenerate Problems of Parabolic Type-1 the Linear Case.*Nonlinear Analysis*.**12**: 1017-1027.

Favini, A., Plazzi, P. (1989). On Some Abstract Degenerate Problems of Parabolic Type-2 theNonlinear Case.*Nonlinear Analysis*.**13**: 23-31.

Favini, A., Plazzi, P. (1990). On Some Abstract Degenerate Problems of Parabolic Type-3 Applications to Linear and Nonlinear Problems.*Osaka J. Math*. **27**: 323-359.

Kappel, F., (1996). Strongly Continuous Semigroups. University of Graz

Thaller, B. (1992).*The Dirac Eqution*. Text and Monographs in Physics. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg-New York

Thaller, B., Thaller, S. (1996). Factorization of Degenerate Cauchy Problems : The Linear Case.*J. Operator Theory*.**36**:121-146.

Thaller, B., Thaller, S. (1996), *Approximation of Degenerate Cauchy Problems*. SFB F0003 ”Optimierung und Kontrolle” 76. University of Graz